INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CAMPUS JATAÍ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

KELEN HELENA DE OLIVEIRA

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO-FORMATIVO FUNDAMENTADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

JATAÍ
2018

KELEN HELENA DE OLIVEIRA

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO-FORMATIVO FUNDAMENTADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Campus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestra em Educação para Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.
Linha de pesquisa: Fundamentos, metodologias e recursos para a Educação em Ciências e Matemática
Sublinha de pesquisa: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

JATAÍ

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

OLI/tri

Oliveira, Kelen Helena de.
Trigonometria no triângulo retângulo: um experimento didático-formativo fundamentado na teoria do ensino fundamental [manuscrito] / Kelen Helena de Oliveira. -- 2018.
396 f.; il.

Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.
Dissertação (Mestrado). IFG – Câmpus Jataí, Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2018.
Bibliografias.
Apêndices.

1. Ensino desenvolvimental. 2. Experimento didático-formativo. 3. Trigonometria. 4. *Software* Geogebra. 5. Dissertação. I. Vaz, Duelci Aparecido Freitas. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título.

CDD 372.7

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Rosy Cristina Oliveira Barbosa – CRB 1/2380 – Campus Jataí. Cód. F073/18

KELEN HELENA DE OLIVEIRA

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO-FORMATIVO FUNDAMENTADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestra em Educação para Ciências e Matemática.

Esta dissertação foi defendida e aprovada, em 25 de outubro de 2018, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

BANCA EXAMINADORA

Duelci A. de F. Vaz

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Cleberson Pereira Arruda

Prof. Dr. Cleberson Pereira Arruda
Membro interno
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

João Eduardo Reis

Prof. Dr. João Eduardo Reis
Membro externo
Pontifícia Universidade Católica de Goiás

Dedico este trabalho a meu amado sobrinho

Mateus Andrade dos Reis (I*n memoriam)*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me abençoar todos os dias da minha vida. A minha família, em especial a minha irmã Kátia Dias de Andrade, pois com sua determinação, me ensinou que devemos continuar lutando, mesmo quando tudo parece não ter mais sentido.

Ao meu esposo Sidneis Martins da Silva, pelo incentivo, compreensão, e por ter assumido a responsabilidade dos serviços domésticos de nosso lar para que eu pudesse me dedicar ao mestrado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz, que mediou esta pesquisa com responsabilidade, sabedoria, dedicação e compreensão.

Aos meus colegas de mestrado pelos momentos inesquecíveis durante as aulas e eventos do mestrado.

A todos os professores do mestrado, em especial ao professor Dr. Adelino Candido Pimenta que sempre me dirigiu palavras de incentivo. Ao professor Dr. Paulo Henrique Souza, por sua atenção, educação e competência.

O aprendizado é mais do que a aquisição de capacidade para pensar; é a aquisição de muitas capacidades especializadas para pensar sobre várias coisas.

(VIGOTSKI, 2007, p. 92)

RESUMO

A pesquisa foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – campus Rio Verde, nos cursos Técnicos em Administração e Edificações, integrados à modalidade de Educação de Jovens e Adultos, do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos – PROEJA, na disciplina Matemática IV. Metodologicamente, foi realizada uma pesquisa qualitativa fundamentada na Teoria do Ensino Desenvolvimental. Autores como Libâneo e Freitas; Ponte, Brocardo e Oliveira; Rego, Sancho e Hernández; Vaz, entre outros serviram de aporte para a investigação. A pergunta que orientou a pesquisa foi: "Como organizar um experimento didático-formativo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo, fundamentando-se na teoria do ensino desenvolvimental?". Buscando responder esta questão, foram planejadas atividades de estudo de trigonometria no triângulo retângulo com a utilização de ferramentas do *software* Geogebra. O experimento foi realizado no decorrer dos meses de fevereiro, março, abril, maio e junho de 2018. Os alunos responderam um questionário, que foi proposto com o intuito de obter dados para analisar o perfil dos sujeitos da pesquisa, responderam uma avaliação diagnóstica que foi aplicada com o objetivo de identificar os conhecimentos preliminares dos estudantes referentes a conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo, apresentaram seminários referentes à história da Trigonometria, entre outras tarefas, realizaram atividades de construção e investigação de figuras geométricas utilizando ferramentas do *software* Geogebra. Resolveram situações problemas de aplicação dos conteúdos estudados. As ações realizadas no decorrer do experimento didático-formativo foram propostas com o intuito de despertar zonas de desenvolvimento proximal que pudessem possibilitar a análise do desenvolvimento dos sujeitos da pesquisa. Apesar das dificuldades apcresentadas, as tarefas propostas possibilitaram que os sujeitos da pesquisa transitassem dos conceitos empíricos para os científicos. A interação dos alunos, e as mediações contribuíram para a apropriação das ferramentas do *software* e dos conceitos estudados. Acreditamos que a organização do experimento didático-formativo de estudo de trigonometria no triângulo retângulo produziu algo fundamentalmente novo no desenvolvimento dos sujeitos da pesquisa.

Palavras-chave: Ensino Desenvolvimental. Experimento didático-formativo. Trigonometria. *Software* Geogebra.

ABSTRACT

The research was carried out at the Federal Institute of Education, Science and Technology Goiano - campus Rio Verde, in the Technical courses in Administration and Buildings, integrated to the modality of Education of Youths and Adults, of the National Program of Integration of the Professional Education with the Basic Education in the Youth and Adult Education Modality - PROEJA, in Mathematics IV. Methodologically, a qualitative research was carried out based on the Theory of Developmental Teaching. Authors like Libâneo and Freitas; Ponte, Brocardo and Oliveira; Rego, Sancho and Hernández; Vaz, among others, contributed to the investigation. The question that guided the research was: "How to organize a didactic-formative teaching-learning experiment of trigonometry in the triangle rectangle, based on the theory of developmental teaching?". Seeking to answer this question, we planned activities of trigonometry study in the triangle rectangle with the use of Geogebra software tools. The experiment was carried out during the months of February, March, April, May and June of 2018. The students answered a questionnaire, which was proposed with the purpose of obtaining data to analyze the profile of the subjects of the research, answered a diagnostic evaluation that was applied with the objective of identifying students' preliminary knowledge regarding trigonometry contents in the triangle rectangle, presented seminars related to the history of Trigonometry, among other tasks, carried out activities of construction and investigation of geometric figures using Geogebra software tools. Resolved problems problems of application of the studied contents. The actions carried out during the didactic-formative experiment were proposed with the intention of awakening zones of proximal development that could allow the analysis of the development of the subjects of the research. Despite the difficulties presented, the proposed tasks allowed the research subjects to move from the empirical concepts to the scientists, the interaction of the students, and the mediations contributed to the appropriation of the software tools and the concepts studied. It is believed that the organization of the didactic-formative study of trigonometry in the triangle rectangle produced something fundamentally new in the development of the research subjects.

Key-words: Developmental Teaching. Didactic-formative experiment. Trigonometry. Geogebra Software

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE APÊNDICES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEB	Câmara de Educação Básica
CNE	Conselho Nacional de Educação
EAD	Educação a distância
EJA	Educação de Jovens e Adultos
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IFG	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
IF GOIANO	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
PPC	Projeto Pedagógico de Curso
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática
PROEJA	Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
MOODLE	*Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment*
OCDE	Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
TIC	Tecnologia da informação e comunicação
UNESCO	Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O desejo de pesquisar metodologias de ensino, que pudessem contribuir com a aprendizagem de conteúdos de trigonometria, surgiu a partir de investigações feitas enquanto professora de um curso de formação de professores de matemática. A oportunidade de concretizar as práticas pesquisadas surgiu no primeiro semestre de 2018, quando a assumi a disciplina de Matemática IV dos cursos Técnicos em Administração e Edificações, integrados à modalidade de Educação de Jovens e Adultos, do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA), do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – câmpus Rio Verde. Mas, antes de descrever os objetivos e motivos de elaboração deste trabalho, faz-se necessário conhecer a trajetória estudantil de pesquisadora.

Venho de uma família empreendedora, sou primogênita de três filhas, nunca conheci meu pai, minha mãe casou-se quando eu tinha apenas dois anos de idade. Meu padrasto era autodidata, e formou-se como mecânico estudando com livros enviados por correspondência. Apesar das dificuldades financeiras, minha mãe, que durante minha infância e juventude, trabalhou de auxiliar de cozinha, empregada doméstica, cuidadora de idosos, entre outras profissões, fazia questão de comprar todos os livros exigidos pela escola, lembro-me que encapava os cadernos e exigia o cuidado com os materiais escolares. Iniciei meus estudos em 1981, aos sete anos de idade, na época uma criança poderia iniciar seus estudos pelo jardim de infância, dependendo da idade cursava o jardim I, II e III, depois passava para o pré-escolar, e em seguida, para a primeira série. Devido à idade, comecei a estudar pela 1ª série, em uma escola pública da cidade de Martinho Campos, no estado de Minas Gerais. Ao final do ano letivo, fiquei para recuperação em Língua Portuguesa, pois não conseguia ler, até hoje, me pergunto como fui aprovada nas demais disciplinas, se não sabia ler. Lembro que a professora me encaminhava para sala da diretora, onde eu tinha que fazer leituras. Minha mãe não concordou com a recuperação e preferiu que eu repetisse a 1ª série, pois acreditava que era o melhor para minha formação. Recordo-me que quando fui aprovada no ano seguinte, fui correndo para casa contar a minha mãe, mas ela me disse que eu não tinha motivos para comemorar, pois deveria ter sido aprovada no ano anterior. A pesar da pouca idade, coloquei como meta nunca mais reprovar, para não a decepcionar.

Tempos depois mudamos para cidade de Contagem, próximo a Belo Horizonte, onde concluí a 4ª série, na Escola Municipal René Chateaubriand Domingues. Na época, para continuar os estudos era necessário ser aprovada em um processo seletivo. Participei da seleção para estudar na Escola Municipal Pedro Pacheco de Souza. Conforme a nota que obtive na avaliação, fui classificada para estudar na 5ª série F, o que não era bom, pois as letras indicavam o conhecimento dos alunos. Quem era classificado para uma série tipo A, tinha um conhecimento considerado excelente, e a série tipo F era a última classificação. Apesar de obter média para aprovação, meu desempenho escolar não era considerado dos melhores. Recordo que minha mãe trabalhava o dia todo, mas quando chegava em casa, conferia meus cadernos e de minhas irmãs, para ver se tínhamos feito o “para casa”, tomava a tabuada e motivava a leitura. Mesmo com o incentivo de minha mãe, não me dedicava aos estudos como deveria, sem um adulto em casa durante o dia, aproveitava somente para brincar. Contudo, lembro que nas brincadeiras, gostava de ser a professora.

Por volta de 1987, mudamos para Goiás. Conclui a 6ª série em uma escola pública municipal da cidade de Santo Antônio da Barra, neste período, acordava às quatro horas da manhã para ir trabalhar com minha mãe na colheita de algodão. Às dezessete horas, voltava para casa, e me arrumava rápido para ir estudar. Por motivos financeiros, mudamos para zona rural, e após um ano sem estudar, mudamos para Rio Verde, onde cursei as séries 7ª e 8ª na Escola Estadual do Sol. Nesta época, trabalhava de doméstica, e apesar de não me dedicar ao estudo extraclasse, não tinha notas abaixo da média. Lembro que apresentava dificuldades ao estudar os conteúdos de matemática, fato que superei a partir da 8ª série, o que credito a professora de matemática, que explicava muito bem os conteúdos. A partir desta série a Matemática passou a ser minha disciplina preferida.

Em 1992, iniciei o Ensino Médio Técnico em Contabilidade, concluí o curso sem dificuldades de aprendizagem, apesar de estudar somente às vésperas das avaliações. Na época, trabalhava em uma empresa como operadora de caixa de segunda a sexta das 8h às 18h e aos sábados das 8h às 12h. O tempo que tinha para estudar era aos finais de semana, mas preferia sair para passear e assim não me dedicava aos estudos como deveria. Matemática continuou a ser a disciplina que considerava mais fácil, lembro-me que era a primeira a terminar a avaliação e pedia ao professor que corrigisse antes de finalizar a aula, para que eu soubesse a nota que havia obtido. Conclui o ensino médio em 1994, contudo, acredito que, se tivesse me dedicado mais aos estudos, meu aprendizado teria sido melhor.

Tenho poucas lembranças dos professores, no entanto, lembro que não gostava da disciplina de Língua Portuguesa, acredito que devido às dificuldades que se iniciaram na 1ª série. Gostava de escrever redações, nisso eu me considerava ótima. Nunca esqueci o dia que a professora pediu para que escrevêssemos uma redação em casa, escrevi, mas na aula seguinte, ela nem tocou no assunto e começou outro conteúdo. Recordo-me que fiquei muito chateada, e em pensamento, recriminei aquela atitude, culpando a professora por minhas dificuldades na disciplina. Recordo-me que pensei: “por isso, que não aprendo Português, essa professora nem lembra o que pediu na aula anterior”. Como se a professora fosse à única responsável por minhas dificuldades. Criei um bloqueio em relação aos conteúdos da disciplina, por acreditar que era incapaz de aprender.

Acredito que a interação professor-aluno, durante minha formação no ensino fundamental, tenha contribuído com minha dificuldade de aprendizagem em algumas disciplinas. Desse modo, essa interação, praticamente não existia, excetuando a professora de matemática da 8ª série, me recordo que na maioria das disciplinas, os professores explicavam os conteúdos e os alunos “se comportavam”, mantendo o silêncio, não haviam questionamentos. Se algum aluno fizesse uma pergunta, tinha como resposta do tipo: “você não presta atenção enquanto explico e agora me diz que não entendeu”. Recordo-me que ficava com dúvidas, mas preferia não perguntar, por medo da reação dos professores.

Concordo com Tardif (2000, p. 15) quando afirma que “o trabalho na sala de aula, na presença dos alunos, exige uma variedade de habilidades e competências” essenciais ao processo de ensino e aprendizagem. Atualmente, a relação professor-aluno é diferente, ou pelo menos deveria ser, pois como professora ainda deparo com situações similares às presenciadas quando era estudante do ensino fundamental.

Apesar de minha formação no Ensino Fundamental ter se baseado em exposição de conteúdos pelos professores, sem interação com os alunos, a partir do Ensino Médio esta situação começou a mudar. Muitos professores explicavam o conteúdo e, em seguida, perguntavam se tínhamos entendido. Recordo-me de professores que faziam questão de explicar novamente o conteúdo com diferentes exemplos. Neste contexto, eu que era uma aluna tímida no Ensino Fundamental, a partir do Ensino Médio mudei o comportamento, gostava de responder atividades no quadro e ajudar os colegas com dificuldades em matemática. Posso afirmar que a partir do momento que a interação entre professores e alunos passou a fazer parte da minha formação, minha aprendizagem melhorou.

Apesar de ter concluído o Ensino Médio em 1994, somente em 2006, comecei a cursar uma graduação. Optei por cursar licenciatura, pois gostava de matemática e o curso era gratuito, eu considerava a graduação como uma possibilidade de prestar um concurso público e garantir minha estabilidade financeira. Fui aprovada no vestibular da Universidade Estadual de Goiás - Campus Santa Helena de Goiás, no final de 2005, concorrendo a uma vaga para cursar licenciatura em Matemática por meio de cota para estudante de escola pública. Ao iniciar o curso me deparei com uma decepcionante realidade, o principal motivo de minha escolha do curso, a facilidade de aprendizagem em matemática, não se manteve, e estudar conteúdos da disciplina de Cálculo I e, sobretudo, limites, se tornou um pesadelo, minha base em matemática era insuficiente. Lembro-me de um colega dizer que eu não conseguiria fazer o curso, pois não sabia o que fazer com 2^{-1}. Apesar de todas as dificuldades, eu coloquei como meta concluir o curso em quatro anos, e sem precisar fazer a quinta avaliação, que era um tipo de recuperação, quando não se atingia a média sete, depois de realizar as quatro avaliações propostas durante o ano letivo.

A metodologia de ensino no curso era praticamente a tradicional, os professores explicavam os conteúdos, expondo fórmulas e regras para realizar os cálculos e os alunos faziam listas de exercícios, os quais chegavam mais de cem. Muitas vezes, fazíamos grupos de estudos aos sábados após a aula, ou dividíamos os exercícios, cada aluno resolvia dez e depois passava para os demais. Eu sempre questionava os professores quando não entendia o conteúdo, apesar de alguns não gostarem. Também recorria a colegas que tinham mais facilidade. Como eu trabalha de segunda a sábado, tinha que estudar muito nos finais de semana. Lembro-me que apresentava mais facilidade de aprendizagem nas disciplinas em que havia maior interação entre o professor-aluno, isso me leva a concordar com Tardif (2000, p. 13), embora os professores “trabalhem com grupos de alunos, devem atingir os indivíduos que os compõem, pois são os indivíduos que aprendem”.

Concluí a licenciatura em quatro anos e sem recuperação, como havia planejado, contudo após a realização estágio obrigatório, ser professora não era mais minha intenção. A realidade da indisciplina nas escolas me desmotivou, eu gostava de ensinar, mas as observações durante o estágio, e os comentários de profissionais da educação, me levaram a decidir que não seguiria a profissão de professora. Conclui a graduação em 2009, neste mesmo ano, passei em um concurso público municipal, para o cargo de Auxiliar Administrativo. Devido a minha formação, fui encaminhada para a secretaria de uma escola de Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano. Comecei a trabalhar em maio de 2010, como auxiliar de secretaria, mas em agosto do mesmo ano, iniciei como professora substituta, em virtude, o afastamento temporário de um professor de matemática. Eu ministrava aulas de matemática para turmas de 6º, 8º e 9º anos. Inicialmente, confesso que tive vontade de desistir, a indisciplina dos alunos foi o principal motivo.

Pontuando sobre a profissão de professor Tardif (2000, p. 13), “os primeiros anos de prática profissional são decisivos na aquisição do sentimento de competência e o estabelecimento das rotinas de trabalho, ou seja, na estruturação da prática profissional”. Apesar das dificuldades, ao final dos três meses de substituição, decidi que continuaria lecionando. Entretanto, a questão da indisciplina dos alunos ainda me perturbava. Buscando aprender mais sobre a profissão de professor, em 2012, iniciei uma pós-graduação *Lato Sensu* em Práticas Docentes e Gestão na Educação Básica, pois como leciona Tardif (2000, p. 07), "os conhecimentos profissionais são evolutivos e progressivos e necessitam, por conseguinte, uma formação contínua e continuada. Os professionais devem, assim, autoformar-se e reciclar-se através de diferentes meios, após seus estudos universitários iniciais".

Conclui a pós-graduação em agosto de 2013, apesar de estar passando por um processo de recuperação após um grave acidente de carro. Ao final do mesmo ano, participei de uma seleção para professor temporário na Universidade Estadual de Goiás – Câmpus Santa Helena de Goiás, para ministrar disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática. Fui aprovada no processo seletivo, e comecei a lecionar em fevereiro de 2014. Durante os anos de 2014, 2015 e 2016, ministrei nesta instituição, as disciplinas de História da Matemática, Matemática Financeira, Álgebra Abstrata, Funções de Uma Variável Complexa, Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais Aplicadas, Fundamentos de Matemática e outras.

Contudo, desde que iniciei minha carreira de professora, muitas mudanças ocorreram em relação a minha concepção de ensino-aprendizagem, conforme Tardif (2000, p. 13) assevera "os saberes profissionais dos professores são temporais, ou seja, são adquiridos através do tempo", portanto a prática profissional não é um local de aplicação dos conhecimentos universitários, mas sim de transformação e adaptação desses conhecimentos de acordo com as exigências do trabalho.

Em minha prática profissional, o processo de transformação e adaptação dos conhecimentos adquiridos durante minha formação tem sido constante. Inicialmente, eu acreditava que ensinar era simplesmente explicar os conteúdos, expor as fórmulas, as regras para calcular e a aprendizagem dos alunos estaria garantida. Todavia, o processo de ensino-aprendizagem não é simples assim, é bem mais complexo, como posiciona-se Tardif (2000, p. 17):

> Embora seja possível manter os alunos fisicamente presos em uma sala de aula, não se pode forçá-los a aprender. Para que aprendam, eles mesmos devem, de uma maneira ou de outra, aceitar entrar em um processo de aprendizagem. Ora, essa situação põe os professores diante de um problema que a literatura chama de motivação dos alunos: para que os alunos se envolvam em uma tarefa, eles devem ser motivados. Motivar os alunos é uma atividade emocional e social que exige mediações complexas da interação humana: a sedução, a persuasão, a autoridade, a retórica, as recompensas, as punições etc.

Posso afirmar que desde o início de minha prática profissional, a cada dia, aprendo um pouco mais sobre como ensinar e, principalmente, sobre a importância do professor no processo de ensino-aprendizagem. Nesse contexto, com o intuito de me qualificar profissionalmente, em 2015, participei do processo seletivo para o Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Goiás – Câmpus Jataí, mas não fui classificada. Em agosto do mesmo ano, iniciei o curso como aluna especial, e conclui as disciplinas de História e Filosofia da Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação no Ensino de Matemática. Em 2016, participei novamente do processo seletivo para o mesmo mestrado, desta vez com êxito, comecei a cursar o mestrado como aluna regular no mês de agosto do referido ano.

A partir deste período, iniciei investigações a respeito da evasão e reprovação de alunos da disciplina de Fundamentos da Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática em que eu era professora. Um dos prováveis motivos para o índice de evasão e reprovação era o déficit de aprendizagem relativo à trigonometria estudada na Educação Básica. Buscando contribuir com o ensino dos conteúdos desta área da matemática, aprofundei meus estudos a respeito da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov. Neste período, fui aprovada em um processo seletivo para professor substituto de Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – Campus Rio Verde, e optei por sair da Universidade Estatual de Goiás, o que impossibilitou a continuidade da pesquisa naquela instituição.

> A Teoria do Ensino Desenvolvimental tem como objetivo principal promover o desenvolvimento intelectual dos alunos por meio de atividades de estudo estruturadas de forma que levem os alunos a estarem ativos no processo de ensino-aprendizagem, promovendo a autonomia e construção do conhecimento (BARROS; VAZ, 2016, p. 270).

Sustentando o desejo de poder contribuir com o ensino-aprendizagem de conteúdos de trigonometria, comecei a visitar escolas públicas da cidade de Rio Verde – Goiás, em busca de uma instituição que permitisse a realização de um experimento didático-formativo de estudo de trigonometria fundamentado nas perspectivas de Davydov. Um dos principais requisitos era uma instituição que tinha laboratório de informática, o que passou a ser um grande problema. Visitei muitas escolas públicas, nas municipais, fui informada que os laboratórios tinham sido desativados e transformados em sala de aula. Muitos colégios estaduais também não tinham laboratórios. Após várias visitas, encontrei um colégio estadual que tinha um laboratório desativado. Apresentei o projeto de estudo de trigonometria, a direção e coordenação da instituição aprovaram a realização da pesquisa.

O laboratório do colégio dispunha de quinze computadores, mas a maioria apresentava problemas de funcionamento, então com a ajuda de um técnico em informática, oito computadores foram colocados em funcionamento. A professora de matemática das turmas de 9ª ano selecionou os alunos participantes do estudo de trigonometria. O experimento didático-formativo foi desenvolvido nos meses de outubro e novembro de 2017. Mas, não fiquei satisfeita com o estudo, devido à quantidade de sujeitos participantes, apenas cinco alunos, e o tempo de realização da pesquisa, foram disponibilizadas 14 horas-aula para realização do experimento. Não foi possível obter dados suficientes com o estudo desenvolvido. A partir desta constatação, comecei a procurar outras escolas, com o intuito de encontrar uma que disponibilizasse uma quantidade maior de alunos participantes, e mais tempo para realização do experimento, porém, não encontrei.

Pela experiência vivida, posso afirmar que é difícil encontrar instituições públicas de ensino na cidade de Rio Verde – Goiás, para realizar pesquisas na área educacional que envolva o uso de computadores. Além da ausência de laboratório de informática, o que percebi na maioria das escolas que visitei, foi à preocupação da direção, coordenação e professores em seguir ementas e cumprir cronogramas, o que impossibilitou a disponibilidade de horas aulas suficientes para realização do experimento didático-formativo. Compete a “escola” cumprir prazos e conteúdos, contudo, é preciso que direção, coordenação e, sobretudo, o professor comprometa-se com a qualidade do ensino-aprendizagem, não adianta preocupar-se apenas em ministrar os conteúdos da ementa, e cumprir o calendário, se o desempenho dos alunos não é satisfatório, conforme mostram os resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Idep) 2017 (ver capítulo 5, p. 20). Em relação à qualidade da educação, Moysés (2012, p. 18) menciona que,

> Oferecemos à grande maioria dos alunos que frequentam nossas escolas, uma educação de má qualidade. São inúmeros e complexos os fatores que concorrem para isso. Encontram-se tanto no seu interior, quanto fora dela. Configura-se um elenco de questões que variam das mais restritas e localizadas, com as que fazem parte do cotidiano da escola e da sala de aula, à mais amplas, como as macroestruturais. Ensaiam-se no interior da própria escola. Outras chegam até ela vinda de providências do Estado: reciclagem de professores, legislação que determina a promoção automática do aluno, aumento da carga horária etc.

Conforme mencionado por Moysés (2012), são vários os fatores que contribuem com a má qualidade da educação, cotidiano da escola, e da sala de aula, questões macroestruturais, e providências do Estado. Todavia, direção, coordenação, sobretudo, o professor devem pesquisar e aplicarem metodologias diversificadas de ensino-aprendizagem, procurarem agregar tecnologias da informação e comunicação aos recursos didáticos, a fim de aproximar a escola da realidade empírica dos alunos e tentar transformar a educação (SANCHO, 2006).

Retomando a questão da realização do experimento didático-formativo, como informado anteriormente, a oportunidade surgiu no primeiro semestre de 2018, quando a assumi a disciplina de Matemática IV dos cursos Técnicos em Administração e Edificações, integrados à modalidade de Educação de Jovens e Adultos, do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA), do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – câmpus Rio Verde. A disciplina de Matemática IV apresentava na ementa os conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo e na circunferência trigonométrica, o que possibilitou o desenvolvimento do experimento didático-formativo, com a participação de dezesseis alunos, sendo dez do Técnico em Administração e seis do Técnico em Edificações. As turmas dos cursos técnicos supracitados foram integradas, devido à quantidade de alunos por turma, e a inviabilidade de professores para ministrar a disciplina.

Pode-se afirmar que a realização desta pesquisa foi motivada pelo desejo de poder contribuir com o estudo de trigonometria da disciplina de Matemática do IV PROEJA. A questão que orientou este trabalho foi: "Como organizar um experimento didático-formativo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo, fundamentando-se na teoria do ensino desenvolvimental?". O objetivo geral da pesquisa foi analisar a organização do ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo, por meio da realização de um experimento didático-formativo baseando-se no proposto por Davydov, integrando e articulando trigonometria, *software* Geogebra e investigação matemática, fundamentando-se nas perspectivas do ensino desenvolvimental. Davydov foi um psicólogo russo, que desenvolveu em parceira com colaboradores, pesquisas relativas ao desenvolvimento psíquico de crianças em idade escolar. A pesquisa de Davydov, referente ao ensino desenvolvimental, tinha foco na atividade de estudo, tendo o conhecimento teórico como base, a teoria era um desdobramento e aplicação pedagógica da teoria histórico-cultural "fundada por Vygotsky e desenvolvida por Luria, Leontiev, Galperin, Elkonin, Zaporojets, entre outros colaboradores" (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 327).

Para Davydov, o estudo em ambientes escolares, se bem organizado, pode contribuir para o desenvolvimento mental da criança, sendo a formação de conceitos científicos, uma etapa importante do processo de conhecimento, e o pensamento teórico, a etapa superior deste processo. Davydov fundamentado no ensino desenvolvimental de Vygotsky elaborou o método de experimento formativo com o objetivo de "investigar os processos de surgimento de novas formações mentais nos alunos durante a atividade de estudo" (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 340).

Em termos de pesquisa educacional, os procedimentos de um experimento didático-formativo, de acordo com Oliveira (2010), assemelham-se aos de uma pesquisa-ação, pesquisa-intervenção ou pesquisa-participante. Nesse método de pesquisa, o "investigador ao mesmo tempo deixa fluir o desempenho do sujeito, sem aprisioná-lo numa situação experimental muito estruturada, e interfere com perguntas e propostas de tarefas para provocar comportamentos relevantes por parte do sujeito" (OLIVEIRA, 2010, p. 67).

O objetivo geral da pesquisa apresentada, neste trabalho, foi analisar a organização do ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo por meio da realização de um experimento didático-formativo, fundamentando-se nas perspectivas do ensino desenvolvimental. Buscou-se organizar o ensino-aprendizagem de trigonometria, integrando o uso do *software* Geogebra.

> O Geogebra é um *software* educativo que tem como objetivo trabalhar conceitos matemáticos e facilitar a compreensão desses conceitos por alunos e professores de todos os níveis de ensino. Trata-se de um programa de matemática dinâmica que pode ser utilizado em ambiente de sala de aula. Por ter sido escrito em *Java*, roda em qualquer plataforma (Microsoft *Windows*, *Linux*, *Macintosh*, etc.) e pode ser baixado gratuitamente (MOTA et al. 2013, p. 11).

Apesar de ser um *software* de matemática dinâmica desenvolvido para sala de aula, o uso do Geogebra como recurso didático, requer metodologias de ensino-aprendizagem que permitam a aquisição de conhecimentos. As ferramentas do Geogebra permitem a construção e manipulação de figuras com propriedades algébricas e geométricas, contudo sua utilização sem planejamento de situações de uso não possibilita a aprendizagem dos conteúdos (ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010). Concordando com o supracitado, esta pesquisa agregou ao uso do *software* Geogebra, a metodologia da investigação matemática. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2015, p. 13), "investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades". Uma investigação matemática deve ser desenvolvida basicamente em quatro momentos:

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeitos à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2015, p. 20).

Em todos os momentos de uma investigação matemática, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2015), pode haver interação entre os sujeitos participantes, sendo que no último momento esta interação torna-se obrigatória, porque na parte final de uma investigação os resultados devem ser divulgados e avaliados. Logo investigar em matemática requer a participação ativa dos alunos.

Quanto à metodologia, a pesquisa foi qualitativa, segundo Yin (2016, p. 8), "a pesquisa qualitativa pode se uma ocasião para desenvolver novos conceitos. Os conceitos podem tentar explicar processos sociais, tais como ensino escolar".

Em relação aos procedimentos, foi realizado um experimento didático-formativo, conforme Libâneo e Freitas (2015, p. 340), visa "investigar processos de surgimento de novas formações mentais nos alunos durante a atividade de estudo, mediante a orientação para se atingir determinados objetivos". Referente aos recursos, foi utilizado para coleta e análise de dados: questionário, avaliação diagnóstica, tarefas de estudo de trigonometria, avaliação do estudo e diário pessoal. A aplicação do questionário socioeconômico teve como objetivo reconhecer o perfil dos sujeitos da pesquisa. As tarefas de estudo de trigonometria orientaram as investigações. As avaliações foram propostas com o intuito de direcionar o estudo e analisar o desenvolvimento dos alunos, nesse sentido, Luckesi (2011) propõe que

> A avaliação do aproveitamento escolar seja como uma atribuição de qualidade aos resultados da aprendizagem dos educandos, tendo por base seus aspectos essenciais e, como objetivo final, uma tomada de decisão que direcione o aprendizado e, consequentemente, o desenvolvimento do educando (LUCKESI, 2011, p. 54)

A propósito da relevância da pesquisa, considera-se que é importante para o campo da Educação Matemática, por compartilhar a experiência da realização do experimento didático-formativo e disponibilizar a professores e pesquisadores um caderno de atividades de trigonometria no triângulo retângulo e um canal com tutoriais de construção das figuras geométricas propostas nas atividades.

Apresentados os motivos e pressupostos que influenciaram a origem desta pesquisa e os procedimentos metodológicos, compete expor a organização deste trabalho. Os três primeiros capítulos apresentam o referencial teórico da pesquisa.

No primeiro capítulo, são expostas as concepções de Vygotski referente ao ensino desenvolvimental. Em relação ao segundo capítulo, são apresentados os fundamentos da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov. No terceiro capítulo, são abordadas perspectivas da utilização de tecnologias da informação e comunicação na educação e do emprego do *software* Geogebra como recurso didático. O quarto capítulo trata do delineamento da pesquisa, expondo a metodologia da pesquisa, dados da instituição campo, e características dos sujeitos da pesquisa. Já, no quinto capítulo, são descritas as etapas do desenvolvimento do experimento didático formativo, portanto, são apresentados os resultados da aplicação do diagnóstico preliminar de conhecimentos e das tarefas de estudo de trigonometria. Por fim, as considerações finais apresentam as reflexões referentes à realização da pesquisa.

1 LEV SEMENOVICH VYGOTSKY

Em uma breve trajetória, Vygotsky em seus 37 anos de vida conseguiu acumular uma produção intelectual muito intensa e relevante, com cerca de 200 estudos científicos, com temas diferentes sobre a psicologia e ciências humanas das mais diversas. Faleceu em decorrência de tuberculose, que dizimou grande parte da população em sua época. Apesar de passados mais de oitenta anos de sua morte, ainda hoje, o que impressiona pesquisadores, é a sua contemporaneidade. Os seus estudos são referências para vários tipos de pesquisas e suas obras são auxílio de pesquisas e soluções de problemas das ciências humanas (REGO, 2014).

Vygotsky abordou vários temas no seu contexto histórico-cultural, abrangendo diversas áreas como arte, literatura, linguística, filosofia, neurologia e vários temas ligados a problemas da educação. Sua contribuição para os campos da psicologia, pedagogia e outras ciências humanas é impossível de ser definida, pois o alcance de suas obras é elevada. O estilo é bastante peculiar, complexo e denso, sem muitos detalhes das metodologias praticadas. Isto se deve ao fato de muitas de suas obras terem sido traduzidas, editadas e até transcritas, tardiamente, por outras pessoas. Devido a sua enfermidade, Vygotsky fazia anotações não muito claras, ou ditava seus trabalhos para outras pessoas. Além de muitas anotações das suas aulas terem sido utilizadas como parte de seus trabalhos, mesmo sem uma redação legível.

> Ler Vygotsky é, com certeza, um exercício de reunir e se apropriar da fertilidade das descobertas de um estudioso inquieto e obstinado, que dedicou sua vida ao esforço de romper, transformar e ultrapassar o estado de conhecimento e reflexão sobre o desenvolvimento humano de seu tempo (REGO, 2014, p.17)

Em sua carreira, Vygotsky não teve tempo de resolver todas as questões levantadas, mas deixou trilhas para seus contribuidores e estudiosos, que vieram a seguir, continuarem e aprofundarem suas pesquisas, descobrirem novos pontos importantes e completarem seus trabalhos, em virtude, suas teorias são consideradas incompletas e suas obras consideradas abertas (REGO, 2014).

De origem judaica Lev Semenovich Vygotsky, nasceu na pequena cidade de Orsha na Bielo-Russía, em 17 de novembro de 1896, filho de uma professora, que se dedicou a cuidar dos seus oitos filhos, seu pai era muito culto e trabalhava em um banco e seguradora, devido a esta estabilidade familiar, cresceu em um ambiente desafiador em termos intelectuais. Até os quinze anos de idade, estudou somente em casa, com tutores particulares, era muito dedicado e gostava de artes em geral e literatura. Frequentava a biblioteca pública e tinha biblioteca à disposição em casa também, com vasto material em diversas línguas, onde teve contato com várias culturas. Com esta base educacional e familiar bem estruturada, sua curiosidade por diversos temas foi incentivada, o que contribuiu com seus estudos em busca de melhorar o desenvolvimento de outras pessoas (REGO, 2014).

Sua vida acadêmica foi marcada pela interdisciplinaridade, parecia estar saciando seu desejo de saber, buscando cursos em várias áreas: linguística, arte, antropologia, psicologia, cultura, ciências sociais, literatura, filosofia e medicina. Em 1913, formou-se no curso secundário, recebendo premiação por seu esforço. Posteriormente, até 1917, estudou Direito e Literatura na Universidade de Moscou, quando iniciou seus estudos de forma mais sistemática. Nesta mesma época, participava do curso de História e Filosofia na Universidade Popular de Shanyavskii, apesar de não ter adquirido títulos acadêmicos destes cursos. Mais tarde também cursou medicina, buscando entender o desenvolvimento humano (REGO, 2014).

Em sua carreira profissional, dos seus 21 a 27 anos de idade, escrevia críticas literárias, lecionava e ministrava palestras sobre literatura, ciência e psicologia em instituições diversas. Nesta mesma época, Vygotsky dirigia a seção de teatro do Departamento de Educação de Gomel e fundou uma editora, uma revista literária e um laboratório de psicologia no Instituto de Treinamento de Professores, onde também ministrava cursos de psicologia. A partir deste contato com os professores, se deparou com os problemas de crianças com defeitos congênitos, estimulado a encontrar métodos para ajudar o desenvolvimento destas crianças deficientes, e de certa forma, neste caminho encontrou a oportunidade de compreender a mente humana, que foi então, a base de seus projetos futuros (REGO, 2014).

Com apenas 28 anos participou do principal encontro de cientistas em psicologia de sua época, que ocorreu em 1924, causando espanto entre os participantes, pela pouca idade e brilhantismo em sua exposição, sendo convidado a trabalhar no Instituto de Psicologia de Moscou, e tempos depois, fundou o Instituto de Estudos das Deficiências, também dirigiu por certo tempo o Departamento de Educação em Narcompros. A partir do referido ano, foi uma década de muito trabalho, embora a grave doença, com inúmeras internações, Vygotsky se mostrava muito à frente ao seu tempo, com ideias revolucionárias. Parecia estar correndo contra o tempo para formalizar seus estudos em tempo recorde, "liderou também um grupo de jovens cientistas, pesquisadores da psicologia e das anormalidades físicas e mentais" (REGO, 2014, p. 24).

Entre tantos pensamentos, estudos e trabalhos, o seu principal objetivo era o de estudar os processos de transformação do desenvolvimento, “o controle consciente do comportamento, atenção e lembrança voluntária, memorização ativa, pensamento abstrato, raciocínio dedutivo, capacidade de planejamento, etc.” (REGO, 2014, p. 24). Procurando sempre evidenciar as mudanças qualitativas do comportamento no desenvolvimento humano e sua relação com o contexto, onde estamos inseridos na sociedade. Dedicando, especificamente, a fase infantil, que era mais importante que a psicologia, ao que intitulava pedologia, referida como ciência da criança, onde evidenciava o desenvolvimento humano, considerando aspectos biológicos, psicológicos e antropológicos.

No período pós-revolucionário em que viveu Vygotsky, o clima era de renovação e isto definiu seu ritmo de trabalho, marca do contexto sociopolítico em que estava inserido. Nesta época, os avanços científicos eram incentivados pelo governo, para trazerem soluções aos problemas sociais que existiam. As inquietações eram grandes, assim como os estímulos para a produção acadêmica intensa com preocupação com o desenvolvimento, dando mais poder à educação, erradicando o analfabetismo e dando mais oportunidades aos cidadãos. Nesta mesma fase, a psicologia soviética se dividia em duas linhas diferentes, a ciência natural que se detinha na descrição de formas exteriores do comportamento, considerada apenas mecânica. E a ciência mental, que acreditava não poder estudar a psique humana, já que se tratava de manifestação espiritual (REGO, 2014).

Vygotsky entendia estas duas teorias e inovou a psicologia, tecendo críticas às duas correntes de pensamentos instaladas no país, buscava a superação, aplicando métodos para construir uma nova psicologia, transformando as duas teorias, em uma teoria marxista do intelecto humano. O desafio era grande, e para isto, contava com o trabalho de pesquisadores talentosos, como Luria e Leontiev, dos quais falaremos com maiores detalhes, posteriormente. Com este auxílio, trabalhou até sua morte dez anos mais tarde, com o propósito ambicioso de mudar a psicologia em seu país e no mundo (REGO, 2014).

Nesse prisma, Vygotsky, Luria e Leontiev se encontravam frequentemente para estudar os trabalhos produzidos nos últimos cinquenta anos, tanto de autores da Rússia, quanto os estrangeiros, pois dominavam vários idiomas e desta forma, tiveram uma enorme fonte de estudos. Também auxiliaram a tradução de trabalhos importantes para outros idiomas, expandindo o acesso aos estudos da psicologia. Eles formaram o grupo troika, “que traduzia as aspirações, o idealismo e a efervescência cultural de uma sociedade pós-revolucionária” (REGO, 2014, p. 29). No início, os encontros aconteciam na própria residência de Vygotsky e, posteriormente, associando ao partido comunista, se transferiu para o Instituto de Educação Comunista, entre 1927 e 1928, mesma época em que criou o Instituto de Estudos da Deficiência para estudar as crianças anormais (REGO, 2014).

Em seu período de intensa produção, vários foram os trabalhos publicados por Vygotsky. A variedade dos temas tratados pelo pesquisador, nos seus últimos dez anos de vida, objetivava a compreensão das diferentes condutas humanas e reunir informações em campos distintos, e de forma alguma evidencia superficialidade nos temas, todos geravam em torno de seu tema central, entender o desenvolvimento humano e suas influências com o contexto social do indivíduo (REGO, 2014).

Vygotsky teve uma vida intelectual intensa, ele próprio poderia ser uma latente evidência de seu próprio estudo, pois seu desenvolvimento e intelecto aguçado se deviam ao contexto cultural em que viveu ao longo da vida.

Algumas das obras de Vygotsky foram traduzidas para diversos idiomas, assim suas ideias foram disseminadas a outras culturas, dando origem a debates e estudos, avançando com suas ideias e espalhando seus pensamentos para o mundo. Muitos países ocidentais não tiveram acesso à totalidade de suas obras, pois não foram todas traduzidas do russo e muitas ainda não foram editadas nem mesmo em sua região. De modo geral, suas obras demoraram a ser acessadas por outros pesquisadores, mas ainda sim, sem abranger um grande público, ele é sem dúvida um dos mais importantes psicólogos deste século, e ainda hoje, a repercussão de seus estudos e pensamentos têm provocado avanços na educação do Brasil, assim como em outros países (REGO, 2014).

A grande variedade da temática de Vygotsky em seus estudos é surpreendente e coerente com o seu projeto, que visava integrar os processos mentais, integrando neurologia, a psicologia, a linguística e a cultura.

De acordo com Rego (2014, p. 37), Vygotsky

> Dedicou-se à análise de diversos temas relacionados a seu problema central, dentre eles, a crise da psicologia, as diferenças entre o psiquismo animal e humano, a gêneses social das funções psicológicas superiores, as relações entre pensamento e linguagem, a questão da mediação simbólica, as relações entre desenvolvimento e aprendizagem e os processos de aprendizagem que ocorrem no contexto escolar e extraescolar, o problema das deficiências físicas e mental, o papel das diferentes culturas no desenvolvimento das funções psíquicas, a questão do brinquedo, a evolução da escrita na criança e a psicologia da arte.

Devido à variedade de temas pesquisados por Vygotsky, nesta pesquisa, dedicou-se aos temas cuja centralidade gira em torno da educação. Primeiramente, cabe discorrer um pouco sobre a teoria histórico-cultural e, posteriormente, aprofundar nos demais temas que serão pertinentes. A teoria histórico-cultural trata do desenvolvimento das características do homem ao longo da vida, Vygotsky objetivava dar resposta a três questões que para ele eram importantes para entender a psicologia humana. A primeira, esclarecer como os seres humanos, se relacionam com o meio físico e social. A segunda, identificar como o trabalho é fundamental no relacionamento entre homem e a natureza. A terceira pretendia relacionar a natureza com os instrumentos de desenvolvimento da linguagem (REGO, 2014).

Nesse prisma, Vygotsky dedicou-se aos estudos das chamadas funções psicológicas superiores, que inclui a capacidade de planejamento, memória voluntária, imaginação, entre outras. Estes processos se originam nas relações dos indivíduos e se desenvolvem ao longo dos processos de formação cultural. Para comprovar estes pensamentos, Vygotsky e seus colaboradores, fizeram experimentos com crianças de várias culturas, onde atestaram que doenças e traumas desfazem tudo que a experiência e cultura ajudaram a construir. Concluíram que o psiquismo humano é constituído ao longo da vida do indivíduo, não existe primitivamente. Procuram assim, inovar a psicologia, integrando o homem enquanto corpo e mente como ser biológico e social, fazendo parte de um processo evolutivo (REGO, 2014).

Algumas das principais teses de Vygotsky referiam-se ao indivíduo e sociedade. Para ele, as características humanas não estavam presentes desde o nascimento de uma pessoa, mas resultavam de sua interação com a sociedade. O homem é transformado ao mesmo tempo em que transforma o meio ambiente que vive. Outra tese, é que o desenvolvimento humano não é imutável e universal e nem independente do desenvolvimento histórico, ou seja, a cultura é parte constante da natureza do homem. Outro ponto é o cérebro como órgão principal da atividade mental, teve uma longa evolução, mas apesar de nascermos em um determinado estágio evolutivo, é um sistema aberto, logo o desenvolvimento individual também influencia seu desenvolvimento. Os instrumentos técnicos e os sistemas de signos têm o intuito de fazer a mediação entre os indivíduos e o mundo. A sua quarta tese, a linguagem, é um signo importante, pois carrega os conceitos de sua cultura, e o ser humano é o único capaz de criar estas ferramentas. Na quinta tese, postula-se que os processos psicológicos não podem ser descritos apenas como reflexos, pois são complexos e, exclusivamente, humanos (REGO, 2014).

Em se tratando das características do comportamento tipicamente humano, reitera Rego (2014), Vygotsky e seus colaboradores aprofundaram seus estudos nos comportamentos animais, para então poder diferenciá-los com mais propriedade. Utilizaram grupos de chimpanzés, que são considerados os animais com características mais próximas dos humanos, então identificaram três traços característicos importantes que os diferenciam. O primeiro confirma que todo comportamento animal está ligado com os motivos biológicos, ou seja, são comportamentos instintivos em busca de sobrevivência, para suprir necessidades de alimentação, segurança ou procriação. O segundo comportamento diz respeito às experiências passadas, diferentemente do homem, os animais são incapazes de fazer relações, planejar ações futuras, ou prever consequências, pensam de forma mecânica, se remetendo as experiências passadas. No terceiro traço, relatam as diferentes fontes de comportamento entre os homens e os animais. O animal tem fontes limitadas de experiência de sua própria espécie, da hereditariedade, sua experiência individual e imediata. Ou seja, o animal diferente de nós, não transmite e nem tão pouco absorve experiência, pelos exemplos e dados coletados dos outros de sua espécie.

Com base nos estudos do comportamento animal, Vygotsky e seus colaboradores, reafirmaram presunções e diferenças do comportamento humano. O funcionamento psicológico humano é constituído ao longo da vida, em um processo social, apropria-se de sua cultura através dos tempos.

Nesse sentido, Vygotsky afirmava que o homem não é apenas produto de seu contexto social, mas também é agente ativo deste mesmo contexto. O homem utiliza as ferramentas de trabalho social, emprego de instrumentos e a linguagem para dominar o meio ambiente e o seu próprio comportamento, do qual procurou compreender os aspectos sociogenéticos que tratam da evolução da cultura humana, os aspectos ontogenéticos que trata do processo de desenvolvimento individual, mas se deteve especialmente ao desenvolvimento infantil, onde estas ferramentas são aprendidas, principalmente, a linguagem que é uma das mais importantes para diferenciarmos dos animais (REGO, 2014).

As raízes histórico-sociais do desenvolvimento humano foram outro tema central da tese de Vygotsky, o qual procurava compreender a questão de mediação que caracteriza a relação do homem com o mundo e com os seus semelhantes. Ele distinguiu dois elementos básicos responsáveis por esta mediação, o instrumento e signo, em cuja invenção significou um salto evolutivo na história da humanidade. Os instrumentos têm a função de regular as ações sobre os objetos e os signos regulam as ações sobre o psiquismo dos humanos. Apesar do uso destes elementos serem diferentes, eles estão ligados especificamente à evolução de espécie e da evolução individual. Com base em uma série de pesquisas, Vygotsky e seus colaboradores investigaram o papel mediador dos instrumentos e signos (REGO, 2014).

Partindo dos princípios de Marx, que através do trabalho, o homem transforma a natureza ao seu redor e se transforma, relaciona-se com seus semelhantes e fabrica instrumentos. Vygotsky procurou analisar esta função mediadora entre a atividade humana com o trabalho e sua capacidade de provocar mudanças físicas em seu meio social e em si próprio como indivíduo. De forma geral, as pesquisas apontaram que os instrumentos provocam mudanças externas, em seus semelhantes, na natureza e na sociedade. Já os signos, aos quais, denominados de instrumentos psicológicos, provocam mudanças de comportamento, atitudes e de relacionamento. Estes têm a função de auxiliar o homem em suas funções psíquicas, ou seja, mudanças internas no indivíduo (REGO, 2014).

Vygotsky dedicou-se em particular à questão da linguagem, que foi sem dúvida o signo mais importante para evolução humana, pois através dela é possível designar nomeações sobre os objetos do mundo exterior, sobre ações, sobre qualidades dos objetos e sobre as relações entre estes objetos. A formação da linguagem na humanidade criou três mudanças essenciais nos processos psíquicos dos homens, primeiro, como lidar com os objetos do mundo exterior, mesmo ausentes. Outra mudança é a forma de generalizar e abstrair as características dos objetos por meio da linguagem. Uma terceira mudança, a função de comunicação que a linguagem permite a humanidade. Enfim, a linguagem é um sistema de signos que promove o intercâmbio entre os seres humanos, fornecendo significado preciso às coisas materiais e imateriais, permitindo a comunicação entre os homens, o que não é possível entre os animais (REGO, 2014).

Todas estas ideias sobre a linguagem, fez com que Vygotsky começasse um processo de pesquisa, que mais tarde, foi continuado pelos seus seguidores, onde analisavam a relação entre o uso de instrumentos e a fala, que afetam as funções psicológicas, inclusive as operações senso-motoras, a percepção e a atenção. Para Vygotsky, a essência da memória humana é o fato do homem ser capaz de lembrar utilizando os signos, que mudam o comportamento do homem e representam a realidade em seus pensamentos. A cultura em que o indivíduo está inserido influencia seus processos mentais, uma vez que o seu meio ambiente fornece símbolos e significados na forma de troca, salientou Rego (2014), didaticamente.

Rego (2014) descreve que Vygotsky dava muita importância às interações sociais, as relações feitas pelos indivíduos e seu meio cultural. Apesar de não ignorar as funções biológicas, sabia que esta interação com a cultura influenciava de forma efetiva o aprendizado dos indivíduos, principalmente em sua fase infantil, onde o meio de convivência das crianças fornece instrumentos e símbolos importantes para o desenvolvimento. Para ele o aprendizado é um aspecto necessário ao desenvolvimento das funções psicológicas, por meio do aprendizado que o indivíduo tem em seu grupo cultural é que se chega ao desenvolvimento pleno. Sendo assim, as relações entre desenvolvimento e aprendizado ocupam lugar de destaque em suas pesquisas e são observadas em dois aspectos: a relação entre o aprendizado e o desenvolvimento; e a relação destes aspectos no período escolar, apesar do aprendizado se iniciar antes da fase escolar, nesta etapa, que se consolidam.

Vygotsky, em suas pesquisas, identificou o desenvolvimento real ou efetivo e o desenvolvimento potencial. Como os próprios nomes dizem o desenvolvimento real significa as conquistas já realizadas pela criança, capacidades dominadas e coisas que aprendeu e consegue executar sozinha, sem ajuda de outra pessoa, seja de sua faixa etária ou não, como amarrar um cadarço, ler, montar um quebra-cabeças, etc. O desenvolvimento potencial significa quão longe aquela criança pode chegar com base em seu intelecto, mas com ajuda de outras pessoas, sejam elas crianças ou adultos, podemos citar várias atividades, escovar os dentes, escrever, andar de bicicleta, entre tantos outros (REGO, 2014).

A diferença entre o que a criança faz sozinha, e o que ela precisaria de ajuda para executar, ou seja, a distância entre o desenvolvimento real e o desenvolvimento potencial, é chamada de ‘zona de desenvolvimento potencial ou proximal’ e definem as funções ou desenvolvimento que precisam ser aprimoradas ou amadurecidas, chamadas por Vygotsky de brotos ou flores do desenvolvimento. O responsável por criar a zona de desenvolvimento proximal é o aprendizado, onde a criança consegue com ajuda de outros, adquirir seu desenvolvimento pessoal. Portanto, o desenvolvimento proximal, atualmente, será o desenvolvimento real no futuro, ou seja, se hoje, a criança precisa de ajuda para fazer algo, amanhã fará sozinha a mesma tarefa, adquirindo o aprendizado como um desenvolvimento próprio. De acordo com Vygotsky, a formação dos conceitos é um processo importante da aprendizagem que altera o nível de desenvolvimento da criança (REGO, 2014).

A formação de conceitos é um processo psicológico longo, complexo, com várias operações dirigidas pelo uso das palavras. Desta forma, um conceito não pode ser passado de forma mecânica a uma criança, isto é, o professor não pode simplesmente dizer o que se espera que o aluno aprenda, mas fazer com que compreenda o que está sendo estudado. Os conceitos são transmitidos ao indivíduo na fase infantil, pela vida cotidiana e escolar, e somente na fase da puberdade, os conceitos são amadurecidos e se solidificam na base psicológica. O meio ambiente deve sempre desafiar e estimular o intelecto do adolescente para que o processo se complete, porque não depende somente do esforço do indivíduo, mas também do contexto em que ele está inserido (REGO, 2014).

> De acordo com Vygotsky, o desenvolvimento e a aprendizagem estão inter-relacionados desde o nascimento da criança. Como já mencionamos, desde

> muito pequenas, através da interação com o meio físico e social, as crianças realizam uma série de aprendizados. No seu cotidiano, observando, experimentando, imitando e recebendo instruções das pessoas mais experientes de sua cultura, aprende a fazer perguntas e também a obter respostas para uma série de questões. Como membro de um grupo sociocultural determinado, ela vivencia um conjunto de experiências e opera sobre todo o material cultural (conceitos, valores, ideias, objetos concretos, concepções de mundo, etc.) a que tem acesso. Deste modo, muito antes de entrar na escola, já construiu uma série de conhecimentos do mundo que acerca. Por exemplo, antes de estudar matemática na escola, a criança já teve experiência com quantidades e, portanto, já lidou com noções de matemáticas. No entanto, ao ingressar na escola, um outro tipo de conhecimento se processa (REGO, 2014, p. 76).

Vygotsky diferencia os conceitos em dois tipos, cotidianos ou espontâneos e científicos, ressaltando a importância de ambos, e da escola no desenvolvimento das crianças. Os conceitos cotidianos tratam-se dos conceitos constituídos pelos processos do dia-a-dia, pelas vivências, pela observação e convivência com os demais e com o meio ambiente. Já os conceitos científicos são aqueles passados pelos ensinamentos aplicados nas escolas de forma sistematizada. Ambos os conceitos se relacionam, influenciam e juntos complementam o processo de desenvolvimento. A escola representa uma parte importante na formação dos conceitos, principalmente, no que diz respeito aos conceitos científicos. Através de seus ensinamentos sistemáticos, possibilitam que o indivíduo tenha acesso a uma base de conhecimentos científicos acumulados pela humanidade, não de forma direta em seu cotidiano, mas como uma acumulação de informação, de dados, o que na adolescência irá influenciar o desenvolvimento e amadurecimento dos conceitos (REGO, 2014).

Fundamentada no conceito de zona de desenvolvimento proximal, Rego (2014) pondera que o trabalho pedagógico deve proporcionar avanços no desenvolvimento do aluno. A zona de desenvolvimento proximal são funções em formação, que estão entre o que a criança sabe fazer sozinha e o que ela pode fazer com ajuda de outras pessoas. Este fundamento abala algumas crenças pedagógicas consolidadas, nas quais o desenvolvimento é pré-requisito do aprendizado, como vemos em atividades que preparam o aluno para receber no nível pré-escolar para então começar com o ensino de alfabetização (REGO, 2014).

Para Vygotsky, isto é contraditório, já que a sua teoria os processos de desenvolvimento são impulsionados pelo aprendizado, onde o aluno só irá amadurecer quando aprender, participando de práticas que resultem no objeto do ensino que se destina como resultado. Para sua teoria as vivências, os exemplos são meios formadores preciosos, que fazem com que o aluno inserido nesta realidade aprenda e se desenvolva. Logo, um conhecimento passado somente de forma mecanizada não é suficiente (REGO, 2014).

De acordo do Rego (2014, p. 107), "Vygotsky afirma que o bom ensino é aquele que se adianta ao desenvolvimento, ou seja, que se dirige às funções psicológicas que estão em vias de se completarem". Entender o processo de desenvolvimento psicológico é de grande importância na educação, pois possibilita a compreensão do planejamento de ações pedagógicas colaborativas e interventivas. Não é produtivo tentar repassar ensinamentos já adquiridos pelo aluno e nem tão pouco completamente distanciados de sua realidade e de sua capacidade intelectual atual. Para ser produtiva e eficiente, a escola tem como papel fundamental progredir no conhecimento que o aluno já possui em sua base de conceitos cotidianos. "Desta forma, poderá estimular processos internos que acabarão por se efetivar, passando a construir a base que possibilitará novas aprendizagens" (REGO, 2014, p. 108).

Para Davydov (1988), um dos seguidores de Vygotsky, a escola tem que ser capaz de impulsionar o desenvolvimento dos alunos, fornecendo não somente o material de estudo, mas ensinando maneiras de adquiri-los e utilizá-los na vida e formas que lhes permitam assimilar os conhecimentos adquiridos em seu dia-a-dia. De acordo com teoria histórico-cultural, o sujeito evolui não somente por uma maturação orgânica, mas por meio das interações sociais estabelecidas com seus semelhantes e da apropriação dos valores transmitido pelo seu grupo cultural. Desta forma, o papel do outro na construção do conhecimento é importantíssimo.

> Esse patrimônio, material e simbólico, consiste no conjunto de valores, conhecimentos, sistemas de representação, construtos materiais, técnicas, formas de pensar e de se comportar que a humanidade construiu ao longo de sua história. Para que a criança possa dominar esses conhecimentos é fundamental a mediação de indivíduos, sobretudo dos mais experientes de seu grupo cultural (REGO, 2014, p. 109).

Para que a apropriação de valores se torne conhecimento, é necessário que exista internalização, transformando os processos feitos pelas atividades entre as pessoas em processos internos, psicologicamente, adquiridos pelo indivíduo. Sendo assim, construir conhecimento é uma atividade partilhada entre as pessoas. Nas escolas, este processo é resultado da interação social entre os agentes desta convivência, professor, alunos e entre as próprias crianças, produzindo conhecimentos através do diálogo, cooperação, troca de informações, confronto de opiniões, divisão das tarefas e responsabilidades. Compete ao professor permitir a interação entre os alunos e propor atividades que favoreça esse intercâmbio em sala de aula (REGO, 2014).

Um ponto importante desta convivência grupal é a heterogeneidade do grupo que existe em qualquer tipo de cultura, inclusive nas salas de aulas. Os alunos se diferem em seus comportamentos, ritmos, experiências, classes sociais, valores e níveis de conhecimentos já adquiridos. Todas estas diferenças se tornam uma vantagem a partir do momento em que se relacionam e o professor será o responsável por trocar experiências e fazer com que estas diferenças pré-existentes e visões distintas do mundo façam com que confrontos e compartilhamento de ideias ampliem as capacidades individuais. Nesta troca de experiências, o aluno não pode ser visto como aquele que somente recebe novas informações, mas também como quem fornece informação aos outros. A criança de forma espontânea não tem autonomia para apropriar dos conhecimentos fornecidos pela humanidade sozinha, então o professor tem um papel fundamental, como alguém com mais experiência e, pedagogicamente, preparado para transmitir os conhecimentos à sua classe (REGO, 2014).

Rego (2014) assinala outro ponto importante das teorias de Vygotsky, que é o papel da imitação no aprendizado, onde novas dimensões são correlatas. Alguns acreditam que a imitação, trata-se de uma atividade puramente mecânica que copia e repete o movimento ou atividade vista. Mas, para Vygotsky, a imitação é muito mais que isto, sendo uma atividade onde o indivíduo observa de forma externa e reconstrói de forma interna, se tornando caminho para o aprendizado, tornando possível que ultrapasse o limite de suas capacidades. Internalizando o uso de funções que ainda não possui, a criança absorve o conhecimento externo, ampliando a capacidade cognitiva individual. Porém, um ponto importante é que a criança só conseguirá imitar aquilo que está no limite do seu desenvolvimento, pois de alguma forma tem que compreender parte do que está sendo proposto.

Imitar, neste caso, não significa apenas um ritual de cópia, que não favorece o processo de criação deste aluno, através da observação, esse aluno aprecia, comenta, observa características que gostaria de reproduzir. O professor tem o papel de ampliar este movimento de repetição, fazendo com que o repertório do aluno se amplie, permitindo a troca de informação, troca de experiências e, desta forma, adquirir parte do conhecimento propiciado da humanidade. Fica claro que a educação escolar tem papel importante, que de formas mais estruturadas, utiliza a imitação no desenvolvimento das crianças, fornecendo sugestões, exemplos, demonstrações relevantes, propiciando a imitação dirigida com rumo a objetivar progresso dos alunos, através da reprodução de modelos objetivos (REGO, 2014).

Entre as formas de se imitar, as brincadeiras têm suma importância no contexto escolar. Propicia desenvolvimento por meio da zona de desenvolvimento proximal, citada anteriormente. Faz com que o aluno internalize regras, condutas, valores, ações, pensamentos, sejam de forma individual ou relativos ao seu grupo cultural, propiciando no fim, desenvolvimento cognitivo e aprendizado (REGO, 2014).

Nesse passo, os brinquedos têm função pedagógica inerente, para que se conheçam os fenômenos, objetos e comportamentos humanos. A brincadeira deve ser valorizada no meio educacional, estimulada como uma função pedagógica. A atuação do educador é de suma importância neste jogo, ele deve ser o responsável por oferecer condições adequadas para que os eventos ocorram. Como tempo suficiente, ambiente adequado, objetos favoráveis, liberdade de agir e manipular os objetos fornecidos, desta forma, as brincadeiras irão surgir, desenvolver e se encerrar (REGO, 2014).

Em todos os tópicos analisados ressaltamos a importância do professor na execução das atividades e propensão dos resultados almejados. Segundo as teses de Vygotsky, este profissional deixa de ser visto como o agente exclusivo da informação e da formação dos alunos, já que o convívio entre as crianças também tem parte significativa, neste contexto. Todavia, o professor não perde sua importância por não ser o principal agente, não significa que é menos importante. Pelo contrário, ele é elemento mediador, possibilitador da interação entre os alunos e seus objetos de conhecimento. Sendo assim, mais do que ressaltada sua importância em sala de aula (REGO, 2014).

O professor tem responsabilidade definida na manipulação das zonas de desenvolvimento proximal de seus alunos. Apesar de não ser o único agente, nesta atividade, ele tem papel privilegiado e pelo fato de ter mais experiência, mais conhecimento já adquirido, mais informações acumuladas, além da incumbência pedagógica de fornecer aos alunos acessos aos conhecimentos adquiridos. Isto não significa que o professor deva ter sempre respostas prontas, pois tão ou mais importante do que responder a questionamentos, é incentivar a curiosidade dos alunos, a troca de informação, a observação, pesquisas, resoluções de questões, propiciar pensamentos e respostas individuais ou grupais (REGO, 2014).

> É importante que o professor esteja motivado para estruturar suas aulas. Além disso, fazer com que seus alunos estejam motivados para aprender determinado conteúdo também se torna necessário para um melhor aproveitamento da resolução das atividades de estudo e consigam com isso elevar o nível de conhecimento. Este sentimento de necessidade de aprender

> deve estar presente nos alunos para que a interação entre estes aconteça e a generalização possa acontecer (BARROS; VAZ, 2016, p. 278).

Para ser capaz de desempenhar todas estas funções Rego (2014) assinala que o professor precisa conhecer o nível efetivo de conhecimento que os alunos possuem. Com objetivo de alcançar este resultado, o professor deve promover diálogos e situações que permitam que os alunos expressem o que já sabem. Fazer observações, anotações, registros em diários, relatórios, que permitam analisar as características do grupo de alunos, a fim de obter informações relevantes para planejar atividades e obter os resultados almejados.

> Mas, para que o professor possa desempenhar com competência sua função é preciso que, além de melhores condições salarias e de trabalho, ele também seja escutado. Os professores têm ideias, hipóteses, princípios explicativos e conhecimentos (baseados na sua experiência de vida e na sua trajetória como aluno e profissional) que, quando revelados, podem oferecer importantes pistas e subsídios na busca de novos modos de ação (REGO, 2014, p. 117).

As teorias de Vygotsky inspiram reflexões neste sentido e apontam a necessidade de uma escola com espaço para a autonomia, o erro, o diálogo, a dúvida, a discussão, o questionamento, o compartilhamento de saberes, a criatividade, a colaboração e reflexão por parte dos professores e alunos.

2 VASILY VASILYEVICH DAVYDOV

As teorias de Vygotsky foram desenvolvidas por Luria, Leontiev, Galperin, Elkonin, Zaporojets entre tantos outros colaboradores, mas Davydov foi quem mais destacou em pesquisas pedagógicas na terceira geração desta escola científica. Ao longo de vinte e cinco anos, ele pesquisou em escolas russas com objetivos de formular uma teoria que propiciasse o desenvolvimento do pensamento dos alunos, ele achava importante que a escola não passasse apenas informações aos alunos, mas que os fizessem autônomos pensando dialeticamente e que estimulasse seu desenvolvimento mental. Defendia que o ensino devia ser compatível com o mundo contemporâneo, ajudando os alunos na transformação pessoal e social (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Vasily Vasilyevich Davydov nasceu em Moscou, em 31 de agosto de 1930, e faleceu aos 68 anos de idade, no dia 19 de março de 1998, filho de pai metalúrgico, e mãe funcionária da indústria têxtil, era casado e pouco se sabe sobre sua vida pessoal. Davydov graduou-se em Filosofia e Psicologia em 1953, pela Faculdade de Filosofia da Universidade Estadual de Moscou. Em 1958, conclui a pós-graduação em Filosofia e em 1970, o doutorado. Tanto a sua vida acadêmica quanto profissional, girou em torno da pedagogia e psicologia. Por meio de seus professores, tutores, colegas e as demais pessoas com quem convivia, foi sendo levado aos temas de seus estudos, aos quais dedicou uma grande parte de sua vida. Algumas destas pessoas contribuíram e fizeram parte de seus projetos (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

No campo profissional, do ano de 1959 a 1983, trabalhou como chefe do laboratório de psicologia no Instituto de Psicologia Geral e Pedagogia da Academia de Ciências Pedagógicas da União Soviética. Foi nomeado como diretor do departamento de filosofia da universidade de Moscou em 1973, permanecendo até 1983, quando foi desligado por motivos políticos. A vida ativa junto de sua comunidade, procurando sanar os problemas reais da educação Russa, participando de inúmeros seminários e eventos, lhe trouxeram notoriedade e com isto a perseguição política. Denunciado por seus próprios colegas, em 1983 foi excluído do Partido Comunista e desligado do cargo de diretor do Instituto de Psicologia Geral que ocupou por dez anos. Isso devido à publicação do livro “Problemas filosófico psicológicos do desenvolvimento do ensino”, editado por ele com artigos próprios e de outros psicólogos, que também foram perseguidos (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Em 1986, foi reintegrado tanto ao partido, quanto a diretoria do instituto e pode assim dar continuidade as pesquisas. Em 1989, foi novamente designado como diretor do Instituto de Psicologia Geral e anos mais tarde nomeado vice-presidente da Academia de Ciências

Pedagógicas, juntamente com os mais importantes educadores da União Soviética. Em junho de 1998, logo após sua morte, foi homenageado no IV Congresso Internacional sobre a Teoria da Atividade, realizado na Dinamarca. Em sessão plenária foi proferido um discurso "Em memória de um grande cientista epistemológico e educacional, professor Vasily Vasilyevich Davydov", por Hedgaard. Logo após leram o texto preparado pelo próprio homenageado, intitulado "Uma nova abordagem para a compreensão da estrutura e conteúdo da atividade" (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Davydov publicou cerca de 250 obras em várias partes do mundo, entre as quais destacamos três. A primeira intitulada "Tipos de Generalização no Ensino" (1972), tratava de pesquisas em escolas Russas, sistematizando dois tipos de ensino baseados no conhecimento teórico e empírico e premiada em concurso nacional. A segunda obra foi publicada em 1986, com o título "Problemas do Ensino Desenvolvimental a Experiência Teórica e Experimental na Investigação psicológica", apresentava pesquisas feitas em escolas e relatos da teoria da atividade, com várias menções a outros autores como Vygotsky, Rubistein e Loentiev. Na terceira obra, "A Teoria da Educação para o Desenvolvimento" (1966), Davydov relata a formação da personalidade das crianças e a sua teoria do desenvolvimento dos mesmos, assim como suas capacidades intelectuais (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Como pesquisador e cientista, dedicou-se a vários assuntos, mas o destaque foi pela formação da teoria do ensino desenvolvimental, da qual trabalhou por 25 anos. O foco consistia em valorizar o potencial criativo das crianças e por meio dele impulsionar o desenvolvimento mental. Este desenvolvimento poderia seguir por uma vida, podendo ser construído em todas as fases do aprendizado (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Para Libâneo e Freitas (2015, p. 329), "ao formular a teoria do ensino desenvolvimental com o foco na atividade de estudo e ao valorizar o potencial criativo como núcleo da personalidade, é possível que estivesse buscando compreender, e compartilhar com todos a natureza de suas próprias capacidades e os segredos de seu êxito nos estudos". Davydov defendia que o ensino contemporâneo tinha que ter compromisso com a transformação pessoal e social do aluno, desenvolvendo sua análise dos objetivos de estudo de forma dialética e generalizada.

Assim como Vygotsky, Davydov compreendia o aprendizado como necessário ao desenvolvimento das características do ser humano, que não são apenas repassados geneticamente, mas adquirimos ao longo de nossa história. Para eles, a questão central está na relação entre a educação e o desenvolvimento, onde o convívio das crianças com os adultos e com outros de sua idade, fazem parte deste processo de aprendizado. Estimulando e ativando nos alunos processos de desenvolvimento mediante colaboração mútua entre eles. Outro ponto importante destacado pelo pesquisador e seu precursor, a aprendizagem não é igual ao desenvolvimento, mas se estruturado corretamente ativa o desenvolvimento intelectual das crianças. Desta forma, o aprendizado é necessário para que o desenvolvimento aconteça de fato (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Devido à breve vida de Vygotsky, ficou a cargo de seus discípulos a tarefa de formular objetivamente, a tese do ensino desenvolvimental, divididos em dois grupos de pesquisadores, os de Zankov e o de Elkonin. “Znakov pretendia com suas pesquisas construir um sistema de ensino fundamental que pudesse obter, com métodos diferentes do ensino tradicional, um desenvolvimento psíquico geral bem mais elevado das crianças pequenas” (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 337). Já no grupo de Elkonin, ao qual Davydov fazia parte, pretendia transformar em teoria, seguindo com precisão os aspectos das hipóteses de Vygotsky.

Primeiramente, pesquisadores trabalharam com crianças em fase inicial da vida escolar, conhecendo os processos de formação psicológica, as formas de desenvolver, entender o papel da primeira idade escolar e as formas com que esta etapa ajuda na formação psicológica dos seres humanos. Nesta fase, destacaram a importância de propiciar nas crianças a zona de desenvolvimento proximal, que é a diferença entre o que a criança sabe fazer sozinha e o que pode fazer com ajuda dos outros, sejam adultos ou não. Outro ponto relevante na formação da tese originada dos trabalhos de Vygotsky foi diferenciar o pensamento empírico e teórico, suas características e como trabalhar com eles nas escolas. O primeiro deles está voltado nas manifestações exteriores, classificação de objetivos e muito pertinente para o desenvolvimento mental das crianças. O raciocínio teórico cria generalização dos sistemas para construir mentalmente possibilidades do fundamento universal, baseado nas palavras do próprio pesquisador (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

A teoria da atividade de estudo e seus objetivos, eram para Davydov, a essência do ensino desenvolvimental, e devia ser posta em prática nas escolas logo no início dos anos escolares, assim criando nas crianças atitude para o estudo. Libâneo e Freitas (2015) mencionam que a inquietação de Davydov

> em toda a sua vida, foi buscar respostas a estas perguntas: Qual é a relação entre educação e ensino e desenvolvimento mental? Há um tipo de ensino que pode influir mais e melhor para esse desenvolvimento? É possível por meio do ensino e da educação formar numa pessoa certas capacidades ou qualidades mentais que não tinha anteriormente? Essas questões deram origem ao seu livro Problemas do ensino desenvolvimental: investigação psicológica teórica e experimental, no qual estão explicados os conceitos-

> chave da teoria do ensino desenvolvimental (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 338).

Implantada em escolas de Moscou, mais propriamente em escolas primárias, a teoria do ensino desenvolvimental intitulada como sistema Elkonin-Davydov propôs novos programas para as principais disciplinas, e também estabeleceu programas de formação de professores, estes fundamentos estão no livro “Problemas do Ensino Desenvolvimental”. Ainda hoje, são elaboradas e testadas as teorias, para transformar zonas de desenvolvimento proximal em real, onde todas as relações entre os alunos e professores são importantes. Os trabalhos visam formular modelos para elaboração de disciplinas e programas, com a intenção de desenvolver o pensamento teórico, investigando processos de surgimento de novas formações mentais nos alunos (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Davydov atribuía ao ensino escolar grande parte do progresso no desenvolvimento dos alunos, o que foi explicado por Vygotsky na relação entre aprendizagem e desenvolvimento psicológico, “Vygotsky descreveu a lei genética geral do desenvolvimento psicológico humano, mostrou a relação essencial entre aprendizagem e desenvolvimento e enfatizou a aprendizagem escolar de conceitos científicos” (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 431). Davydov se fundamentava na concepção materialista dialética criada pela escola científica fundada por Vygotsky, onde consistia em dizer que a educação e o ensino eram a forma de desenvolvimento, com relações entre as crianças e adultos com fim de se apropriar a cultura elaborada pela humanidade, centralizando a educação e o ensino-aprendizagem.

Um dos conceitos fundamentais da teoria do ensino desenvolvimental é o conceito da atividade, ao qual Vygotsky foi um dos primeiros cientistas a introduzi-lo na psicologia, desenvolvido posteriormente por outros psicólogos e filósofos. A essência do conceito de atividade reflete a relação entre o ser humano e a sua realidade externa, onde ao se relacionar modifica a realidade externa e a si próprio, atuando criativamente, pelo trabalho, atividades mentais e materiais, apropriação da experiência social e histórica, onde reproduzem em si a atividade coletiva (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Leontiev, outro discípulo de Vygotsky, identificava na atividade humana, os elementos de objeto, necessidade, motivo, finalidade, ações, operações, condições. Davydov os incorporou em sua teoria, pois para ele toda atividade humana é sempre dirigida à criação ou transformação de algo, seja material ou espiritual, sendo sempre importante compreender claramente o objetivo da atividade praticada. Davydov avançou em relação à Leontiev ao introduzir o desejo na estrutura psicológica da atividade. Para ele, o desejo era essencial na atividade humana, é o núcleo básico, já que as ações são conectadas muito mais aos desejos do que apenas em motivos. Os alunos se apropriam de conhecimento por necessidades e motivos, neste aspecto, o ensino-aprendizagem é derivado do conceito de atividade. Davydov sistematizou o conceito do pensamento teórico, repercutindo a organização do ensino para o desenvolvimento dos alunos, desenvolveu processos mentais para chegar aos conceitos de transformação a ponto de poder aplicá-lo efetivamente no método de ensino (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Para Davydov, a formação do pensamento teórico-científico do aluno é o objetivo primordial do ensino-aprendizagem, por meio da formação e generalização do conceito que está diretamente relacionado com o conceito de compreensão do processo de conhecimento. Neste contexto, o professor deve investigar os aspectos centrais, as relações fundamentais e a transformação histórica que é princípio geral, estruturando e organizando a atividade de estudo do aluno, realizando abstrações e generalizações conceituais, utilizando a análise e solução de problemas reais com objetivo real. A generalização conceitual é explicada por Davydov a partir do processo de idealização, onde permite a reprodução mental da atividade material e a realização de experimentos em transformações mentais para que adquiram conhecimentos (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Nesse passo, os objetivos criados por nós sejam eles sociais ou históricos correspondem a conceitos que estão ligados aos objetos das nossas atividades práticas e real. Na busca por algo real os seres humanos utilizam o seu conceito, ou seja, formas gerais que pertencem a sua universalidade de forma idealizada. Então ao aprender um objeto científico, o conceito vem sempre primeiro, o professor passa primeiramente o conceito teórico do objeto, para então somente usar uma base genética geral. O pensamento do aluno deve seguir o caminho da abstração e generalização, transitar pelas transformações do objeto científico, permitindo conhecer o objeto percebendo o aspecto geral. Ele deve poder aplicar os seus conceitos em problemas particulares e na realidade concreta, surgindo dois aspectos, o imediato ligado à existência empírica e os aspectos mediatizado ligado à essência do objeto. Detalhando melhor, pensamento empírico é aquele que o aluno chega ao conhecimento direto e imediato, podendo ser descrito, quantificado, definido com traços suficientes para compreender sua aparência, mas sem conexões internas essenciais. Já o pensamento teórico é onde o aluno identifica relações genéticas do objeto, princípio geral desde a origem até que ocorram transformações, surgindo atividade mental para então reproduzir o objeto material a ponto de reproduzi-lo mentalmente (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Segundo Libâneo e Freitas (2015, p. 353), Davydov “concretiza em sua proposta de ensino desenvolvimental uma forma de organização do ensino que, superando os conteúdos e métodos tradicionais, privilegia o pensamento teórico do aluno, pelo movimento de ascensão do pensamento abstrato ao pensamento concreto, com generalizações substantivas”.

A teoria do ensino desenvolvimental segundo Libâneo e Freitas (2015) foi concretizada por Davydov por meio da estruturação da atividade dos alunos, o que leva a formarem um pensamento teórico e um caminho investigativo, onde o professor tem o papel de passar aos alunos a solução de tarefas para chegar à conclusão de problemas, objetivando a busca científica tanto pelo movimento abstrato quanto concreto. Sendo necessário que o aluno identifique o núcleo do objeto no processo de aprendizagem, devendo ser capaz de deduzir relações particulares com este objeto, e cabe ao professor propiciar aos alunos as descobertas pertinentes às relações originárias do real objetivo do estudo. O professor não pode expor aos alunos o objeto final do estudo, mas sim fazer com que escale o seu próprio aprendizado, evoluindo e passando por todas as etapas do aprendizado até chegar ao núcleo da questão.

> A Teoria do Ensino Desenvolvimental coloca o professor numa posição de mediador entre os conceitos e os alunos. Além disso, o coloca também com uma grande responsabilidade no momento de estruturar as atividades de forma que todos os objetivos citados sejam alcançados de maneira significativa. Ou seja, fazer com que os alunos consigam internalizar os conceitos de tal forma que possam utilizá-los de forma ampla e com maior habilidade. Com o intuito de atingir as principais características da teoria utilizada, o papel do professor é fundamental, já que a fundamentação teórica depende unicamente do conhecimento deste para que as atividades atinjam o objetivo principal da teoria, que é fazer com que os alunos consigam agir de maneira autônoma no momento das resoluções das atividades e consigam, com isso, evoluir para um novo nível mental acerca do conteúdo proposto (BARROS; VAZ, 2016, p. 277).

Entre as várias atividades humanas, o estudo é a principal atividade de crianças em idade escolar, além dela, o trabalho, o jogo e várias outras. A função do estudo é a de propiciar aos alunos assimilação de uma consciência social mais desenvolvida, pelas matérias aplicadas que são na verdade a base do ensino desenvolvimental, meio pelo qual se organiza o aprendizado, familiarizando os fatos aos objetivos. A atividade do estudo tem o objetivo de formar uma postura teórica em relação à realidade, colocando um problema de estudo ao aluno que terá que captar um método teórico geral, onde deverá ter uma orientação substancial para a solução do problema (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Estabelecendo os termos da atividade de estudo e aprendizagem, Davydov ressalta que se tratando do primeiro item trata-se de uma atividade investigativa o objeto fim. A atividade de estudo é um processo de apropriação da realidade, onde o ser humano visa transformar o material em produto mental e, por fim, em novo conhecimento. É uma forma de apropriar-se de conhecimentos diversos, fazendo com que o aluno se relacione com o objeto de estudo, onde o professor tem o papel de ajudar o aluno a percorrer o caminho do conhecimento, formando nele, a necessidade da atividade de estudo, contribuindo para a formação de sua personalidade (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Nesse sentido, a aprendizagem tem o objetivo de mudar o modo de agir do próprio aluno, não é como adquirir conhecimento, mas é um processo de mudança interna, uma reorganização mental onde o aluno se envolve pessoalmente. A aprendizagem escolar está relacionada com a atividade de estudo, dependendo da organização deste processo, o qual é interno de apreensão teórica, implicando em formar um ambiente propício, organizado, de forma que o aluno seja orientado pelo professor, que dirige a atividade de estudo, a fim de que se alcance o desenvolvimento psicológico dos alunos. Desta forma, Davydov formulou as condições assertivas para organizar o processo de aprendizagem, tendo em vista os motivos pelos quais os alunos têm para apropriá-las, formulando as tarefas de estudos, analisando os conceitos específicos do conhecimento teórico (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

> As atividades de estudo devem estar relacionadas com a realidade social em que os alunos estão inseridos. Isto, para que o pensamento empírico seja utilizado no momento da realização das atividades com o intuito de proporcionar um melhor desenvolvimento do pensamento científico dos alunos. Este procedimento incorporado na atividade faz com que os alunos sintam a necessidade de adquirir conhecimentos teóricos correspondentes à sua realidade. Assim sendo, o professor deve, juntamente com os alunos, por meio de tarefas mais simples, proporcionar momentos que façam com que os alunos assimilem o real sentido dos conceitos estudados (BARROS; VAZ, 2016, p. 275).

Davydov descreveu a atividade de estudo como uma união do objetivo da atividade, por meio da concretização do caminho do pensamento do aluno. A tarefa proposta pelo professor deve permitir ao aluno dominar os procedimentos de reprodução de conceitos, assimilar os conteúdos, estimular a apropriação dos procedimentos, é preciso que os alunos façam análises mentais, abstrações e generalização do objetivo. Ao estudar um objeto, são necessárias ações de transformação dos dados da tarefa, o aluno precisa identificar a relação universal do objeto estudado, criar um modelo representativo da relação universal, deve transformar e reconstruir o modelo estudando suas propriedades, realizar várias tarefas envolvendo o objeto, controladas e monitoradas pelo professor, até que se ganhe mais autonomia (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Ressalta-se que, conforme Libâneo e Freitas (2015), o ensino desenvolvimental base de sustentação do ensino experimental nas escolas russas, possibilitou estudos para extrair princípios e orientações didáticas. Permitiu que Davydov avaliasse o ensino das escolas públicas de sua época, e verificasse que precisavam da formação e assimilação cultural e científica, considerou que as demandas não estavam todas sendo atendidas pelos métodos de ensino vigentes, assim propôs oferecer uma abordagem para a estruturação das disciplinas escolares. A proposta didática de Davydov partiu de três premissas básicas de Vygotsky.

> A primeira consiste em que as funções psíquicas superiores estão enraizadas nas formas histórico-sociais da existência humana, ou seja, nos instrumentos culturais já desenvolvidos pela humanidade, acumulados social e historicamente. A segunda é de que a constituição do indivíduo como ser humano requer que ele se aproprie desses instrumentos culturais, internalizando-os, ou seja, fazendo com que se tornem meios de sua própria atividade. A terceira é de que essa apropriação implica uma complexa atividade da consciência humana que é a generalização e a formação de conceitos, de modo a ultrapassar os limites da experiência sensorial imediata (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 357).

Nas escolas, a apropriação da experiência é feita por meio do processo de ensino-aprendizagem, diante da promoção e ampliação do pensamento teórico dos alunos para assim desenvolver a personalidade, com base no pensamento da atividade humana. O aluno apropria-se da experiência quando aprende a dominar os métodos de pensamentos e das análises sociais. A educação escolar foi defendida por Davydov, assim como o desenvolvimento humano para que sejam compreendidos em uma união indivisível, ressaltando a importância das matérias escolares (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

O conhecimento teórico leva a desenvolver a capacidade de pensar, agir com conceitos, formando pensamentos, procedimentos, como se lida com o mundo consigo e com os outros. Conhecimento vivo era a expressão usada por Davydov para indicar uma forma de conhecimento baseado na elaboração mental, assim esperava que a escola formasse pequenos teóricos, que aprendam a pensar teoricamente a respeito dos objetos de estudo, a fim de colocar sua abordagem em prática nas escolas, organizou o ensino em disciplinas que juntassem os tipos de análises lógico-disciplinar e lógico-psicológica em relação aos métodos de ensino. Com a função de organizar a atividade de estudo, os dois tipos de análises propiciam os elementos nas várias disciplinas escolares (LIBÂNEO; FREITAS, 2015).

Didaticamente, Libâneo e Freitas (2015) lecionam que a análise lógico-disciplinar, diz respeito aos conteúdos científicos na constituição da formação do pensamento teórico. Já a análise lógico-didática refere-se à atividade de estudo, com características individuais e socioculturais. Davydov dedicou sua vida pessoal, profissional e científica para criar bases teóricas de uma metodologia de ensino na escola, oferecendo aos estudiosos da didática disciplinares o suporte teórico, prático para um melhor ensino escolar, que foi definida em sua investigação inicial como fundamentação lógico-psicológica da estrutura das disciplinas escolares.

3 TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

Nas duas últimas décadas os avanços das tecnologias da informação e comunicação (TIC) transformaram as atividades de diversos setores, entre estes, a agricultura, pecuária, construção civil, medicina, a cultura e o laser. No mundo do trabalho e econômico, “praticamente todas as ocupações se transformaram, algumas desapareceram, enquanto outras tantas surgiram que, até então, eram completamente desconhecidas” (SANCHO, 2006, p. 17).

Na educação, as tecnologias da informação e comunicação passaram a ser consideradas, por muitos, como a solução para resolver os problemas de ensino-aprendizagem. Contudo, Sancho (2006, p. 15) afirma que “o avanço tecnológico não significa de imediato o avanço e a melhoria da educação”. Ainda segundo a autora para que as TIC se tornem recursos que possam contribuir com a melhoria da educação, é fundamental que a administração, os gestores, os coordenadores e os professores, antes de planejar, revisem suas próprias concepções de ensino, de aprendizagem, de currículo, de avaliação, de espaços educacionais, pois somente a partir dessas revisões, será possível colocar em prática “projetos educativos que atualmente respondam às necessidades formativas dos alunos” (SANCHO, 2006, p. 16).

Acreditar que o acesso às TIC poderá melhorar o ensino e motivar os alunos, sem repensar concepções educacionais e currículos, é um erro. Assim como acreditar que o acesso às inúmeras informações proporcionadas pelas tecnologias da informação e comunicação, é garantia de habilidades e saberes para converter essas informações em conhecimentos. Para que as tecnologias da informação e comunicação se tornem meios eficazes de ensino, é preciso também rever “convicções sobre como propiciar os melhores processos de ensino e aprendizagem” (SANCHO, 2006, p. 28).

Para Sancho (2006, p. 22), “um dos principais obstáculos para desenvolver o potencial educativo das TIC são a organização e a cultura tradicionais da escola”, já que a maioria programas institucionais destinados à inserção de TIC na educação, centra-se em equipar as escolas com computadores, que muitas vezes são insuficientes para a quantidade de alunos e oferecer cursos de formação, com a finalidade de capacitar os professores para manusear equipamentos e utilizar *softwares* educacionais, sem se preocupar com as limitações da escola e dos currículos. “Isto significa que a introdução das TIC na escola não promove formas alternativas de ensinar e aprender, pelo contrário, costuma reforçar as estruturas preexistentes do conteúdo do currículo e as relações de poder” (SANCHO, 2006, p. 23).

> Diferentes organismos internacionais (UNESCO, OCDE, Comissão Europeia, etc.) advertem sobre a importância de educar os alunos para a Sociedade do Conhecimento, para que possam pensar de forma crítica e autônoma, saibam resolver problemas, comunicar-se com facilidade, reconhecer e respeitar os demais, trabalhar em colaboração e utilizar, intensiva e extensivamente, as TIC. Uma educação orientada a formar este tipo de indivíduos requereria professores convenientemente formados, com grande autonomia e critério profissional. Mas também escolas com bons equipamentos, currículos atualizados, flexíveis e capazes de se ligar às necessidades dos alunos. Além de sistemas de avaliação autênticos que possam mostrar o que os alunos tenham realmente aprendido (SANCHO, 2006, p. 20).

A utilização das tecnologias da informação e comunicação como meio de educar os alunos para a sociedade do conhecimento, como supracitado, requer uma série de mudanças na educação. Escolas com laboratórios de informática equipados com computadores suficientes para todos os alunos, capacitação de professores, novas metodologias de ensino e métodos de avaliação. A respeito das contribuições do emprego tecnologias como recurso didático, Vaz (2012, p. 43) pondera que o uso da informática

> representa para o professor possibilidades importante de ensino, além do mais, amplia a noção de metodologias e estratégias de ensino colocando o professor numa situação que exige um movimento na direção de novos saberes exigindo que ele saia da situação de acomodação, fazendo com que amplie e renove seu conhecimento matemático, provocando um avanço no seu estilo de ensinar e na sua cognição. Para o aluno representa possibilidade de aprendizagem, se adaptando a nova realidade que se estabelece nas sociedades modernas.

Considerando a possibilidade das tecnologias em contribuírem com o ensino-aprendizagem dos conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo, integrou-se a realização do experimento didático-formativo o uso do Geogebra como recurso didático. O *software* foi escolhido por possuir uma variedade de ferramentas que possibilitam o estudo dinâmico de conteúdos matemáticos. Portanto, ao integrar e articular o Geogebra ao estudo considerou-se a possibilidade de contribuir com o ensino-aprendizagem dos conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo, pois é “um *software* educativo interativo que tem como objetivo trabalhar conceitos matemáticos e facilitar a compreensão desses conceitos por alunos e professores de todos os níveis de ensino” (MOTA et al., 2013, p. 11).

> Outro fator importante é a possibilidade de trabalhar com o aluno, permitindo que o saber seja obtido através da interação realizada em atividades planejadas. Assim, podemos articular o processo de ensino-aprendizagem, passando de um modelo baseado na informação para um modelo fundamentado na construção do saber (VAZ, 2012, p. 40).

Com mediação adequada o uso do Geogebra pode contribuir com a motivação, concentração e interesse dos estudantes, pois possibilita uma maior interação com os conteúdos de matemática. Outra característica considerada no s*ite* Oficial do Geogebra é que o *software* permite ao professor planejar aulas onde conteúdos complexos poderão ser estudados de forma dinâmica, possibilitando um melhor entendimento ao aprender.

> O Geogebra é um software que permite trabalhar quase todos os conteúdos abordados no ensino fundamental, médio e superior. Suas principais características: livre acesso, possui imensas possibilidades pedagógicas, permitindo uma boa interatividade entre professor, aluno e conhecimento matemático, possibilitando trabalhar teoremas, construção de conceitos, testar hipóteses, fazer releituras importantes de conteúdos matemáticos, além de fácil manuseio. Pela facilidade de adaptação, podemos com seu uso, trabalhar o processo de ensino-aprendizagem, passando de um modelo baseado na informação para um modelo fundamentado na construção do saber (VAZ; JESUS, 2014, p. 62).

O projeto do Geogebra iniciou-se na Universitat Salzburg, em 2001, e foi desenvolvido como parte da formação universitária de Markus Hohenwarter, professor de matemática, que concentra sua pesquisa no uso da tecnologia na educação matemática. “Markus Hohenwarter criou o Geogebra com o objetivo de melhorar o desempenho dos alunos em todos os níveis da educação matemática” (VAZ; JESUS, 2014, p. 62).

> O programa Geogebra tem sido aceito e difundido rapidamente, por sua facilidade de uso e variedade de ferramentas que permitem manipular construções geométricas, expressões numéricas, algébricas ou tabulares, descobrir relações e propriedades matemáticas, o que gera motivação para investigar e aprofundar as suas aplicações (ABAR; COTIC, 2014, p. 06).

O Geogebra é um programa gratuito, com versões para diferentes plataformas, entre elas, *Windows* e *Linux*, o que facilita a instalação em computadores de escolas públicas (MOTA et al., 2013). Logo, ao propor a organização do ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo integrando o uso do Geogebra, consideraram-se as potencialidades da utilização deste *software* educacional.

4 O DELINEAMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA

4.1 A metodologia da pesquisa

Metodologicamente, esta pesquisa realizou um experimento didático-formativo fundamentado na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov. Conforme Libâneo e Freitas (2015, p. 340), o experimento didático-formativo elaborado por Davydov visava "investigar os processos de surgimento de novas formações mentais nos alunos durante a atividade de estudo".

> Para que um experimento sirva como meio efetivo para estudar 'o curso de desenvolvimento de um processo' ele deve oferecer o máximo de oportunidades para que o sujeito experimental se engaje nas mais variadas atividades que possam ser observadas e não apenas rigidamente controladas. Uma técnica efetivamente usada por Vigotski, com esse propósito, foi a de introduzir obstáculos ou dificuldades na tarefa a fim de quebrar os métodos rotineiros de solução de problemas (VYGOTSKY, 2007, p. 33).

Os procedimentos, ações e tarefas foram propostas, durante a realização do experimento didático-formativo desta pesquisa, com o intuito de superar os métodos habituais[1] de estudo de trigonometria no triângulo retângulo. Quanto aos procedimentos de um experimento didático-formativo, Oliveira (2010, p. 67) pontua que "em termos da pesquisa educacional contemporânea, podemos fazer uma ligação desses procedimentos com a pesquisa-ação, pesquisa-intervenção ou pesquisa-participante".

Pesquisa-ação segundo Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 112) "é um tipo especial de pesquisa participante, em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas, sobretudo para mudá-lo". Ainda segundo os autores, na pesquisa-ação o pesquisador buscar melhorar as práticas, promovendo a autonomia dos participantes no processo de aprendizagem, pode-se afirmar que é um tipo de pesquisa que se apresenta como transformadora.

Baldissera (2001) examinando os termos que compõem a pesquisa-ação relata que,

---

[1] Constata-se ainda que a metodologia de ensino do professor, na maioria dos casos, é quase sempre informativa. Tal atitude tem sido foco de críticas por partes de renomados pesquisadores. Caracterizada pela ansiedade do professor em ministrar novos conteúdos concebendo o aluno como receptor (VAZ, 2012, p. 42).

> **Pesquisa ou investigação:** é um procedimento reflexivo, sistemático, controlado e crítico que tem por finalidade estudar algum aspecto da realidade com o objetivo de ação prática; **Ação**: significa ou indica que a forma de realizar o estudo já é um modo de intervenção e que o propósito da pesquisa está orientado para a ação, sendo esta por sua vez fonte de conhecimento; **Participação**: é uma atividade em cujo processo estão envolvidos os pesquisadores como os destinatários do projeto, que não são considerados objetos de pesquisa, mas sujeitos ativos que contribuem no conhecer e no transformar a realidade em que estão inseridos (BALDISSERA, 2001, p. 07, grifo do autor).

Vygotsky (2007, p. 36) também afirma que “os resultados experimentais podem ser tanto quantitativos, como qualitativos”. Apesar do desenvolvimento dos sujeitos terem sido analisados qualitativamente, este trabalho também apresenta resultados quantitativos. Segundo Triviños (1987) à pesquisa qualitativa teve sua origem na antropologia, em práticas desenvolvidas pelos antropólogos na interpretação de informações sobre a vida dos povos; depois passou a ser empregada em estudos desenvolvidos pela sociologia e em seguida começou a ser aplicada em investigações educacionais, devido a seu caráter dinâmico e exploratório.

No desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa as etapas não seguem uma ordem rígida como em uma pesquisa quantitativa. Segundo Trivinõs (1987)

> a coleta e a análise dos dados não são divisões estanques. As informações que se recolhem, geralmente, são interpretadas e isto pode originar a exigência de novas buscas de dados. Esta circunstância apresenta-se porque o pesquisador não inicia seu trabalho orientado por hipóteses levantadas a priori cuidando de todas as alternativas possíveis, que precisam ser verificadas empiricamente, depois de seguir passo a passo o trabalho que, como as metas, têm sido previamente estabelecidos. As hipóteses colocadas podem ser deixadas de lado e surgir outras, no achado de novas informações, que solicitam encontrar outros caminhos (TRIVINÕS, 1987, p. 131).

Gerhardt e Silveira (2009) afirmam que o pesquisador no desenvolvimento da pesquisa qualitativa considera a subjetividade dos sujeitos da pesquisa, não se preocupando em atribuir valores quantitativos à investigação. Como os dados da pesquisa qualitativa não são mensuráveis, os dados da investigação podem ser relatados levando em consideração a interação dos sujeitos da pesquisa e o objeto de estudo.

Conforme Trivinos (1987, p. 138) “o pesquisador qualitativo, que considera a participação do sujeito como um dos elementos de seu fazer científico, apoia-se em técnicas e métodos que reúnem características *sui generis*, que ressaltam sua implicação e da pessoa que fornece as informações”.

Referente à coleta de dados, Trivinos (1987, p. 137) afirma que "todos os meios que se usam na investigação quantitativa podem ser empregados também no enfoque qualitativo". No entanto o autor, conforme o "denominado 'relatório final' da pesquisa quantitativa naturalmente que existe na pesquisa qualitativa, mas ele se vai constituindo por meio do desenvolvimento de todo o estudo e não é exclusivamente resultado de uma análise última dos dados" (TRIVIÑOS, 1987, p. 131). Os meios empregados para coleta e análise de dados, nesta pesquisa, foram observações, registro em diário pessoal, filmagens, questionário, história de vidas, avaliações, e tarefas de estudo.

O diário pessoal foi utilizado em vários momentos da pesquisa, segundo Yin (2016), o diário pessoal é um tipo de diário em que o pesquisador relata seus sentimentos e reflexões em relação ao desenvolvimento da pesquisa.

Apesar de revelar tendências metodológicas ou pessoais, o diário pessoal é uma fonte importante de informações, pois o relatório final de uma pesquisa qualitativa deve conter as reflexões do pesquisador. Nesta pesquisa, o registro em diário pessoal, das reflexões investigações, conjecturas, dificuldades, facilidades e dúvidas dos sujeitos da pesquisa foi uma fonte importante de dados para o planejamento das atividades de estudo e análise dos resultados da realização do experimento didático formativo (YIN, 2016).

> Descrições detalhadas, baseadas em observações cuidadosas, constituem uma parte importante dos achados experimentais. Para alguns, esses achados poderiam parecer meramente anedóticos; para Vygotsky, no entanto, tais observações, se realizadas objetivamente e com rigor cientifico, adquirem *status* de fato confirmado (VYGOTSKY, 2007, p. 36).

Com o intuito de obter dados que possibilitassem analisar o perfil sociocultural dos alunos e almejando conhecer a trajetória estudantil dos sujeitos da pesquisa, foi proposto que que os mesmos respondessem um questionário e escrevessem suas histórias de vida. Antes de iniciar o experimento, a professora aplicou uma avaliação prelimitar de conhecimentos, com o objetivo de diagnosticar o nível de desenvolvimento real, dos sujeitos da pesquisa, "que se costuma determinar através da solução independente de problemas" (VYGOTSKY, 2007, p. 97).

De acordo com Luckesi (2011, p. 55), "o objetivo primeiro da aferição do aproveitamento escolar não será a aprovação ou reprovação do educando, mas o direcionamento da aprendizagem e seu consequente desenvolvimento". Os resultados da aplicação da avaliação diagnóstica serviram de base para o planejamento das atividades de estudo de trigonometria no triângulo retângulo. Os dados das tarefas de estudo propostas durante o experimento didático-formativo foram analisados, considerando o nível de desenvolvimento potencial dos alunos, "determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes" (VYGOTSKY, 2007, p. 97).

A partir da organização do experimento didático-formativo foi elaborado como produto educacional, um caderno de atividades de trigonometria no triângulo retângulo (Apêndice G) destinado a pesquisadores e profissionais da educação. Esta pesquisa e o produto educacional podem ser acessados por meio do endereço disponibilizado no portal do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática - PPGECM, no link das dissertações e produtos do mestrado.

O produto educacional foi elaborado conforme as orientações da portaria normativa n. 17, de 28 de dezembro de 2009, que dispõe sobre os mestrados profissionais no âmbito da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

A produção intelectual e técnica pertinente à área profissional consistem em parâmetro para o acompanhamento e avaliação dos cursos desta modalidade de mestrado (BRASIL, 2009). De acordo com o disposto no § 1º do art. 10 da portaria normativa n. 17, a produção do mestrado profissional pode ser apresentada em diversos formatos:

> a) artigos originais, artigos de revisão da literatura e publicações tecnológicas; b) patentes e registros de propriedade intelectual e de softwares, inclusive depósito e software livre em repositório reconhecido ou obtenção de licenças alternativas ou flexíveis para produção intelectual, desde que demonstrado o uso pela comunidade acadêmica ou pelo setor produtivo; c) desenvolvimento de aplicativos e materiais didáticos e instrucionais e de produtos, processos e técnicas; d) produção de programas de mídia; e) editoria; f) composições e concertos; g) relatórios conclusivos de pesquisa aplicada; h) manuais de operação técnica, protocolo experimental ou de aplicação ou adequação tecnológica; i) protótipos para desenvolvimento de equipamentos e produtos específicos; j) projetos de inovação tecnológica; k) produção artística; I) outros formatos, de acordo com a natureza da área e a finalidade do curso, a critério da CAPES (BRASIL, 2009, p. 05).

A produção intelectual e técnica produzida durante o curso de Mestrado Profissional em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Goiás – Câmpus Jataí consiste em dissertação e produto educacional, sendo pré-requisitos para a obtenção do título de mestre, devem apresentar relevância para a educação. Considera-se que o produto educacional produzido a partir desta pesquisa tem relevância educacional, pois o caderno de atividades de trigonometria no triângulo retângulo é destinado aos profissionais da educação que desejem conhecer, realizar ou adaptar o experimento didático-formativo proposto.

4.2 A instituição campo da pesquisa

A instituição campo desta pesquisa foi o Instituto Federal Goiano – Campus Rio Verde. Mas, antes de descrever os detalhes do Campus em questão, compete contar um pouco da história do Instituto Federal Goiano. Em 2005, o governo federal começou uma expansão da Rede Federal de Educação Profissional e Tecnológica no país, onde foram criados 37 Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia. No estado de Goiás, foram dois os Institutos Federais criados, o Instituto Federal de Goiás (IFG) e o Instituto Federal Goiano (IF Goiano), criado pela Lei n. 11.892, de 29 de dezembro de 2008. Estes Institutos Federais se originam de escolas de aprendizes fundadas em 1909, pelo então presidente Nilo Peçanha (GOIÁS, 2018).

Historicamente, estas escolas eram subordinadas ao Ministério dos Negócios da Agricultura Indústria e Comércio, posteriormente subordinadas ao Ministério da Educação e Saúde Pública, transformada em Liceus Industriais, e depois em Escolas Industriais e Técnicas e somente em 1959, configuradas como autarquias com nome de Escolas Técnicas Federais. Ao longo deste processo foi uma rede de escolas voltadas a agricultura, Escolas Agrotécnicas, quando o Brasil se empenhava em desenvolver os agronegócios e a indústria, necessitando de mão de obra especializada como valor estratégico nesta fase (GOIÁS, 2018).

O Instituto Federal Goiano tem sua reitoria instalada na Capital do Estado, e integrou as antigas escolas agrícolas e técnicas de Rio Verde, Urutaí, Ceres e Morrinhos. Em 2010, ampliou com mais um campus em Iporá, 2014, mais novos três campus em Campos Belos, Posse e Trindade. Além de campus avançados nas cidades de Catalão, Cristalina, Ipameri e Hidrolândia, com o total de doze unidades em todo o estado goiano. Trata-se de uma autarquia federal com total autonomia em suas funções administrativas, financeiras, pedagógicas, equiparada às universidades federais. Onde são ofertados cursos de educação superior em Tecnologias, principalmente na área Agropecuária, bacharelado e licenciaturas. Educação profissional técnica de nível médio de forma concomitante, integrado e educação para Jovens e Adultos (PROEJA), cursos de pós-graduação, mestrados e doutorados em determinadas áreas. Recentemente o IF Goiano aderiu também a Escola Técnica Aberta do Brasil (e-Tec Brasil), ofertando cursos técnicos na modalidade semipresencial utilizando o

Ensino à Distância (EaD) em mais de sessenta municípios, atendendo um público de quase 7.000 alunos no ano de 2016 (GOIÁS, 2018).

O Instituto Federal Goiano – Campus Rio Verde teve início a partir do Ginásio Agrícola da cidade original de 1967, que passou por uma série de processos e alterações em sua estrutura e disciplinas aplicadas e somente em 2008 se consolidou como Instituto Federal Goiano. O campus oferece os cursos técnicos em Administração, Agropecuária, Biotecnologia, Química, Segurança do Trabalho, Contabilidade, Informática, Alimentos e o PROEJA em Administração, Alimentos, Edificações com ensino médio integrado ao técnico. Além disso, oferece ensino na modalidade à distância com cursos técnicos em Açúcar e Álcool, Administração, Logística, Meio Ambiente, Secretariado, Segurança do Trabalho e Serviços Públicos (GOIÁS, 2018).

O município cede do Campus não foi escolhido por acaso, é o mais desenvolvido da Microrregião do Sudoeste de Goiás, situado a 220 km da capital do estado, com altitudes entre 550 a 910 m, com uma população de mais de 207 mil habitantes estimados no ano de 2015. É uma cidade que se destacou nos últimos anos no recente crescimento do agronegócio brasileiro, segundo a Agência Goiana de Assistência Técnica, Extensão Rural, e Pesquisa Agropecuária (EMATER). Importante produtor de vários produtos como as embalagens, além de sua grande produção bovina, avícola e suína. A cidade se consolidou por todos os pontos citados, o que se fez justificar a criação do IF Goiano em sua localidade, para então intensificar a ampliação de mão de obra competente para que estes objetivos fossem alcançados e superados ao passar dos anos. Os cursos ofertados pelo Instituto tende a colaborar para todas as funções chaves deste plano de desenvolvimento regional, abrangendo todas as áreas específicas (GOIÁS, 2018).

4.3 Os sujeitos da pesquisa

Os sujeitos da pesquisa foram alunos dos cursos técnicos integrados a educação de jovens e adultos do Instituto Federal Goiano – Campus de Rio Verde, especificamente dezesseis alunos, sendo dez do Curso Técnico em Administração e seis do Curso Técnico em Edificações. Compete informar que no decorrer do primeiro semestre de 2018 os alunos dos cursos supracitados cursaram a disciplina de Matemática IV na mesma turma, essa integração ocorreu devido à baixa quantidade de alunos por turma.

O Programa Nacional de Integração da Educação Profissional à Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA) trata-se de um projeto ousado que busca agregar aos alunos a formação acadêmica e a preparação profissional. Contribuindo para a inserção dos jovens e adultos no mercado de trabalho, diminuindo a exclusão social, ofertando disciplinas na modalidade à distância, atualizando os procedimentos e outras técnicas para atender estes alunos que têm características específicas. Necessitando de mais tempo para manter a vida profissional e acadêmica conciliadas, procedimentos específicos, uma relação mais aproximada entre os alunos e professores com troca de experiências e vivências para formar cidadãos éticos e conhecedores da realidade social em que estão inseridos, incluindo a isto os aspectos gerais da economia, política, cultura e do mundo corporativo em que almejam trabalhar, destinados a mudar para melhor esta realidade de sua classe de trabalho (GOIÁS, 2018).

O IF Goiano tem como função social promover a formação humana de um cidadão profissional, crítico e reflexivo, articulando ciências, trabalho, tecnologia, cultura, técnica e ética, transformando a realidade em igualdade social. A Educação Profissional Técnica de Nível Médio é normatizada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) n. 9.934/96 e foram atualizadas pela Lei n. 11.741/08 do Conselho Nacional de Educação da Câmara de Educação Básica. Em resumo, trata-se de um curso técnico integrado ao Ensino Médio, onde ao se formar o aluno recebe o certificado técnico em administração e Ensino Médio na modalidade PROEJA (GOIÁS, 2018).

Estes cursos são oferecidos semestralmente, em turnos noturnos, com turmas com cinquenta alunos. São aceitos alunos por meio de processos seletivos, reingressos, transferências externas, transferências internas, transferências *ex-officio*, portadores de disciplinas e convênio ou intercâmbio ou acordo cultural. Estas disposições são relativas ao Campus de Rio Verde. A organização curricular está estruturada em regime semestral com período de três anos letivos e meio, dividida em sete semestres, com aulas de cinquenta minutos cada, totalizando a matriz curricular em 2.445 horas, onde 20% destas horas podem ser aplicadas em disciplinas no formato de Educação a Distância (EAD), utilizando a plataforma *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment* (Moodle), onde são disponibilizadas salas de aulas virtuais e acompanhamento das atividades e avaliações de desempenhos, além de recursos de mensagens e fóruns. Somam-se a este total de horas aulas, 40 horas de atividades extracurriculares e 200 horas de estágio obrigatório, conforme regulamento específico, aos quais o cumprimento não impede a conclusão do curso (GOIÁS, 2018).

Referente ao curso Técnico em Edificações, este “tem por objetivo habilitar profissionais nas funções de técnicas de planejamento, coordenação, execução, controle e avaliação da prestação e manutenção de serviços técnicos da área da construção civil" (GOIÁS, 2015, p. 7).

> A organização curricular do Curso Técnico em Edificações Integrado ao Ensino Médio na modalidade de EJA segue as determinações legais presentes nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Profissional de nível Técnico, resolução CNE/CEB nº 04/99, na Resolução nº 06, de 20 de setembro de 2012, que Define Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio, na Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional - Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, bem como nas diretrizes definidas no Projeto Pedagógico do IF Goiano (GOIÁS, 2015, p. 9).

Devido à baixa procura o Curso Técnico em Edificações Integrado ao Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA) não ofertou vagas para o primeiro período no processo seletivo de 2018/1, oferecendo vagas somente para o 3º, 4º, 5º e 6º período. Já o Curso Técnico em Administração na seleção 2018/1, houve mais de 50 alunos no primeiro período matriculados. O Projeto Pedagógico de Curso (PPC) do Curso Técnico em Administração Integrado ao Ensino Médio na modalidade de Educação de Jovens e Adultos, do Instituto Federal Goiano em questão, aponta que

> o curso consolida-se em uma proposta curricular baseada nos fundamentos filosóficos da prática educativa emancipatória e transformadora, nas bases legais da educação profissional e tecnológica brasileira, explicitadas na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 9.934/96, atualizada pela Lei nº 11.741/08, e resoluções do Conselho Nacional de Educação e Câmara de Educação Básica que normatizam a Educação Profissional Técnica de Nível médio e demais normatizações legais (GOIÁS, 2018, p. 6).

Ainda segundo dados deste PPC a preferência pelos cursos de educação de jovens e adultos do Instituto Federal Goiano se deve a qualidade da oferta da modalidade comparada às demais escolas públicas da região. Um diferencial da qualidade do curso pode ser observado no quadro 1 que apresenta a quantidade de laboratórios e computadores disponíveis no A pesquisa foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – Campus Rio Verde. Esta disponibilidade de laboratórios e computadores possibilitou a realização do experimento didático-formativo no decorrer das aulas da disciplina de Matemática IV.

Quadro 1 – Disponibilidade de laboratórios de informática e computadores

Especificações	Status
Informática: 10 (dez) laboratórios contando com 205 (duzentos e cinco) computadores e ainda mais 30 (trinta) computadores em diversos laboratórios de pesquisa para o uso dos alunos e pesquisadores, já para o uso dos docentes existem 60 computadores nos diferentes ambientes de escritórios docentes e mais 110 computadores de uso dos servidores da área administrativa.	Implantado

Fonte: Goiás (2018, p. 55).

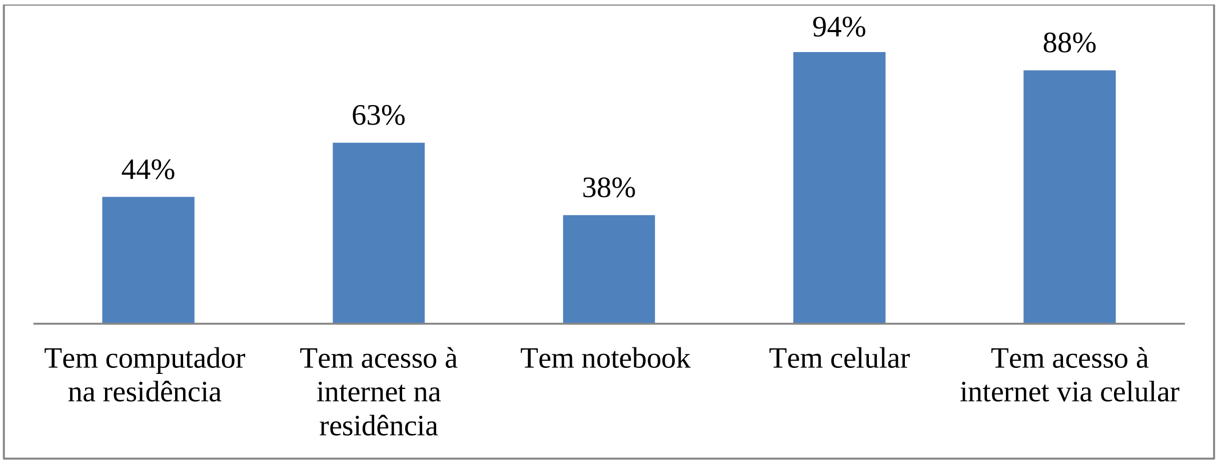
Os cursos técnicos integrados ao Programa de Educação de Jovens e Adultos do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – Campus Rio Verde, têm como público, sujeitos com trajetória escolar irregular, com idade média de 30 anos. Dos dezesseis alunos que participaram do experimento didático-formativo, doze eram mulheres e quatro homens, identificados nesta pesquisa como alunos ou sujeitos da pesquisa, e nomeados com letras maiúsculas do alfabeto, preservando assim suas identidades. Compete ainda informar que os textos apresentados neste trabalho que se referem a relatos orais ou escritos pelos alunos passaram por correção gramatical e ortográfica básicas, mantendo-se a essência dos relatos nas descrições.

A partir de um questionário (Apêndice B) aplicado no dia 22 de fevereiro de 2018, no decorrer da 1ª aula da disciplina de Matemática IV, foi possível identificar o perfil desses sujeitos. A idade média dos alunos era de trinta e quatro anos, seis alunos tinham entre vinte e trinta anos, e dez entre trinta e sessenta anos. Todos os alunos eram egressos de escola pública, três cursaram o Ensino Fundamental I (1º ao 5º ano) na modalidade de educação de jovens e adultos, seis cursaram o Ensino Fundamental II regular (6º ao 9º ano), seis alunos informaram que iniciaram estudos no Ensino Médio regular, mais desistiram. Em média os alunos ficaram onze anos sem estudar antes de ingressar no PROEJA.

Dos dezesseis alunos, dez declaram que além de estudar também trabalhavam, destes, um era soldador, um técnico em telecomunicações, dois auxiliares de serviços gerais, um auxiliar de limpeza, uma doméstica, uma copeira, dois estagiários em administração, e um era trabalhador autônomo na área da construção civil. A maioria dos alunos informou que trabalhava de segunda a sexta-feira, nos turnos matutino e vespertino. Quatro alunos informaram que eram apenas estudantes, uma aluna informou que era aposentada e uma que estava desempregada. A renda média familiar dos alunos era de um salário mínimo. Todos residiam na zona urbana, sendo que 50% em domicílio alugado. Em média, a quantidade de moradores por residência era de três pessoas e o número de trabalhadores dois.

Quanto ao acesso às tecnologias, sete alunos responderam ter computador na residência, dez informaram ter acesso à internet banda larga, seis tinham *notebook*, quinze possuíam celular, sendo que catorze com acesso à internet. O Gráfico 01 apresenta o percentual de acesso à tecnologia.

Gráfico 1 – Percentual de alunos com acesso à tecnologia



Fonte: Elaboração da autora (2018).

Quanto ao uso de computadores os alunos foram questionados: Você utiliza computador com que frequência? Nove alunos assinalaram a resposta: sempre utilizo. Cinco: raramente utilizo e dois: nunca utilizo. Sete responderam que utilizam computador na residência, dois na escola, quatro na *LAN House* e dois no trabalho. Em relação ao uso de tecnologias, dos dezesseis alunos, treze responderam que sempre utilizam tecnologias para estudar. Seis alunos informaram que sempre utilizam tecnologias para estudar matemática, sete declaram que raramente utilizam e dois informaram que nunca utilizam.

Quando questionados em relação aos motivos que levaram a cursar a educação de jovens e adultos, os alunos responderam[2]:

Aluno C: *Facilidade no horário e por fazer dois 2 em 1*.

Aluno O: *Parei de estudar para trabalhar*.

Aluno H: *Ter um futuro e recomeçar*.

---

[2] As respostas foram transcritas dos questionários dos alunos apenas com algumas correções ortográficas básicas.

Aluno Q: *Por me sentir menos inferior, na área que trabalho, e por eu ser pedreiro eu aperfeiçoar bem mais meu serviço, além de estar atualizado sobre técnicas novas*.

Aluno F: *Aprendizado, melhores oportunidades na vida profissional*.

Aluno N: *Precisão*.

Aluno J: *Além de terminar o estudo eu faço o curso*.

Aluno L: *Por causa do técnico e ensino médio*.

Aluno E: *Pra concluir o ensino médio*.

Aluno A: *Forma rápida de terminar*.

Aluno D: *Terminar o estudo porque é a única coisa que temos de importante*.

Aluno P: *Me qualificar para o mercado de trabalho*.

Aluno B: *Decisão minha com o incentivo do meu filho caçula*.

Aluno G: *Para ter um bom estudo. Para dar um bom exemplo a toda minha família, e dar um orgulho para minha querida mãezinha que está no céu. Para ter uma boa formação, e dar uma vida melhor a minha família*.

Aluno M: *Bom em primeiro lugar demorou muito para tomar essa decisão, depois de longos anos sem vir há uma sala de aula com apoio de minha família decidi terminar o que deixei sem terminar. E estou muito mais feliz por está estudando.*

Aluno I: *Cursar profissionalizante e ter novas oportunidades*.

Foi perguntado aos alunos se gostavam de estudar matemática, treze responderam que sim, e justificaram:

Aluno P: *Porque é uma das matérias que mais gosto.*

Aluno D: *Pois gosto de fazer contas.*

Aluno A: *Gosto de cálculos, mas tenho dificuldades.*

Aluno E: *Gosto de cálculos.*

Aluno J: *Matemática é uma matéria que usamos todos os dias.*

Aluno F: *Não tenho justificativa exata, mais gosto, pois sei que é muito importante para nosso dia-a-dia.*

Aluno C: *Já gostei mais, a dificuldades tem atrapalhado um pouco.*

Aluno H: *Sou fascinada por formulas e números.*

Aluno Q: *Sim, eu me lembro que no ensino fundamental eu era sempre bom, mas hoje tenho dificuldades pois fiquei muito tempo sem estar na sala de aula.*

Aluno I: *Matemática está em tudo que fazemos e nos ajuda a planejar melhor nossa vida.*

Aluno M: *Porque com a matemática você se capacita suas contas kkk fica apta a gerenciar empresa. Pensa você vir estuda depois de 20 anos e fala não gosto de estudar não tem sentido sair de minha casa e chegar à sala de aula e não gosta da matéria, amo tudo que faço.*

Dois alunos responderam que não gostam de estudar matemática e justificaram:

Aluno N: *Sou muito cabeça dura tenho muita dificuldade com números.*

Aluno L: *Porque é muito difícil.*

Em relação ao estudo de conteúdos de matemáticos, Weschenfelder (2003, p. 98) ressalta que alunos da educação de jovens e adultos "revelam traumas, medos que estiveram presentes durante o processo ensino-aprendizagem, principalmente por ser uma matemática descontextualizada, instrumental sem nenhuma relação com a prática social concreta dos envolvidos".

Ademais, também se verifica uma falta de interesse por parte da maioria dos alunos em relação ao que está sendo estudado, isso possivelmente ocorra, pois não conseguem associar o que está sendo ensinado com a realidade, não sabem como aplicar os conteúdos estudados a vida cotidiana.

Kooro e Lopes (2013, p. 2) afirmam que,

> Os educadores matemáticos, ao atuarem na formação de pessoas jovens e adultas, devem perceber a Matemática como uma ciência sócio-historicamente construída e socializar essa concepção com os alunos. Vislumbrar essa Educação Matemática que considere e valorize as experiências pessoais e culturais do professor e dos alunos como fatores extremamente importantes, a fim de tornar o ensino dessa disciplina mais relevante e significativo para ambos.

Demonstrar onde pode ser empregado o que está sendo ensinado, pode motivar a aprendizagem na educação de jovens e adultos, visto que nesta modalidade de educação, o aluno tenta relacionar o que está estudando as necessidades de seu cotidiano, quando consegue visualizar onde os conteúdos podem ser aplicados o estudo passa a ter mais sentido.

Nesse sentido, Kooro e Lopes (2013, p. 02),

> ao considerar as dimensões curriculares para uma formação matemática na educação de jovens e adultos, não se pode pensar em um processo de ensino

> e aprendizagem da Matemática fora do contexto cultural, declarando-a como absoluta, abstrata e universal, pois essa visão seria a principal razão para a alienação e os fracassos da grande maioria dos estudantes nesta disciplina.

Concordando com Kooro e Lopes (2013), houve a proposta que os sujeitos da pesquisa relatassem por escrito suas trajetórias estudantis. Inicialmente, alguns alunos não concordaram com a proposta, pois julgaram não ter sentido escrever um texto para disciplina de matemática, mas após presenciarem o entusiasmo de colegas em relação à tarefa, aderiram à proposta.

A seguir são apresentados trechos de relatos escritos pelos alunos[3].

Aluno N: *Quando eu já tinha oito anos mudamos para a cidade eu comecei a estudar [...] estudei até a segunda serie e parei para voltar para a fazenda aos doze anos eu voltei a estuda [...] estudei até os catorze anos e não terminei o quarto ano quando estava quase terminando eu comecei a namorar e logo engravidei do meu primeiro filho dai por diante não teve mais como pois trabalhava o dia todo e cuidava das crianças a noite...*

Aluno G: *Comecei a estudar com 7 ano ai não ficava muito tempo teria que sair para muda para uma fazenda, de repente estávamos de volta para cidade ai começava tudo de novo escola de novo ai sempre atrasando nos estudos dessa ultima vez que voltamos ai eu estudei até a 4ª série com 14 anos eu gostei de uma pessoa que é o pai de meus 3 filhos ai fomos envolvendo até que fiquei gravida com 15 anos...*

Aluno H: *Aos sete anos iniciei minha vida estudantil [...] Era assim na medida que uns ia adiantando para os outros começarem, porque se não o meu pai não conseguia, pois ganhava pouco. Mesmo assim fazia de tudo pra manter nos na escola, muitas vezes os que estudavam de manhã passa os livros e lápis e até a camisa de uniforme pros que estudavam a tarde e assim seguia. [...] Aos 13 anos não me deixou estudar mais, chorei propôs trabalhar e manter meus estudos, mas ele não deixou...*

Aluno J: *Comecei a estudar não sei com quantos anos. Por que meus pais nunca ficavam na cidade sempre trabalhavam em fazendas; por isso quando começava a estudar ou quando estava no meio do ano sempre me tirava para ir com eles. Comecei mesmo a estudar quando tinha oito anos mais ou menos. Foi quando meu pai adoeceu e não dava mas conta de ir pra roca trabalhar. Mas mesmo assim conseguir estudar até a sétima série. E só retornei depois de ter meus três filhos já quase criados.*

---

[3] Os relatos foram transcritos, literalmente, dos textos escritos pelos alunos, omitindo-se apenas alguns trechos para preservar a intimidade dos discentes.

Neste trabalho, houve a necessidade de restringir trechos dos relatos escritos pelos sujeitos da pesquisa, a fim de preservar a intimidade dos alunos. A leitura da trajetória estudantil dos alunos, ou, mas do que isso, da história de vida desses alunos, permitiu identificar os motivos que prejudicaram o curso dos estudos. Conhecer a história e sociocultural dos estudantes participantes foi importante, porque possibilitou compreender os motivos de déficits de aprendizagem no que tange aos conteúdos básicos de matemática.

Deve-se ressaltar que esta pesquisa contribuiu para atuação de forma efetiva como docente e instrutiva ao aluno do PROEJA, pois em muitos momentos durante a realização do experimento didático-formativo, despertaram reflexões antes de julgar os motivos da apresentação de dificuldades de aprendizagem durante a realização das atividades e também em relação aos problemas de relacionamento interpessoais apresentados durante as aulas, como o fato de alguns alunos se recusarem a participar de atividades em grupo ou mediados por colegas de classe, conforme será abordado no próximo capítulo.

5 O DESENVOLVIMENTO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO-FORMATIVO

Conforme informado em capítulos anteriores, o experimento didático-formativo foi realizado no primeiro semestre de 2018, no decorrer das aulas de Matemática da quarta turma dos Cursos Técnicos em Administração e Edificações na modalidade PROEJA. Compete informar que os alunos assinaram um termo de consentimento de participação como sujeito desta pesquisa (Apêndice E).

No decorrer das primeiras aulas, a professora propôs aos alunos que realizassem uma pesquisa a respeito da história da Trigonometria, especificamente, em relação às contribuições dos matemáticos Hiparco, Pitágoras, Ptolomeu e Tales.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam que “a História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática” (BRASIL, 1997, p. 34). Logo, abordar a história da matemática durante as aulas pode despertar o interesse dos alunos ao estudar conteúdos matemáticos, pois possibilita conhecer como teorias e aplicações matemáticas foram criadas, e como contribuíram para o desenvolvimento das civilizações.

A escolha da Trigonometria como objeto de estudo partiu da análise de parâmetros curriculares que indicam “apesar de sua importância, tradicionalmente a **trigonometria** é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes” (BRASIL, 2002, p. 121, grifo do autor).

> Tradicionalmente, a prática mais frequente no ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstrações de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem. Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos (BRASIL, 1997, p. 37).

A trigonometria surgiu a partir de necessidades práticas de resolver problemas de medição e orientação. Seu desenvolvimento “recebeu contribuições importantes de matemáticos de várias culturas: hindus, muçulmanos e europeus” (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 173). O estudo de Trigonometria é relevante por ser um ramo da Matemática que "trata da obtenção de medidas de ângulos e lados de triângulos e tem inúmeras aplicações, além de permitir que se calculem distâncias inacessíveis com muita praticidade" (MOTA et al. 2013, p. 75).

> Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo (BRASIL, 2002, p. 122).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997) apontam que o conhecimento em trigonometria é requisito básico para uma formação efetiva. Contudo, apesar da trigonometria ser uma área importante da Matemática, essas diretrizes indicam que ao final do Ensino Médio, os alunos apresentaram déficit de aprendizagem em relação aos conteúdos.

Considerando o estudo de Matemática, a prática de ensino dos conteúdos desta disciplina tem sido a reprodução de fórmulas e técnicas que são ensinadas pelo professor e reproduzidas pelos alunos, o que torna o ensino ineficaz e dificulta a aprendizagem (BRASIL, 1997). Deste modo, a aprendizagem "é confundida com memorização de um conjunto de conteúdos desarticulados, conseguida através da repetição de exercícios sistemáticos de fixação e cópia" (REGO, 2014, p. 90).

A qualidade da educação básica do Brasil é avaliada pelo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) [4], que é obtido pelas notas do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e pela taxa média de aprovação percentual. Analisando o ensino-aprendizagem no âmbito da educação escolar dados do Ideb, atualizados em 30 de agosto de 2018, mostram que o Ensino Médio não atingiu as metas projetadas para 2017, como pode ser observado na Figura 1.

---

[4] O Ideb "é um indicador de desempenho da educação brasileira divulgado a cada dois anos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), autarquia do Ministério da Educação (MEC)" (BRASIL, 2017, p. 01).

Figura 1 – IDEB Observado e Metas Ensino Médio

Ensino Médio

	IDEB Observado							Metas							
	2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2021
Total	3.4	3.5	3.6	3.7	3.7	3.7	3.8	3.4	3.5	3.7	3.9	4.3	4.7	5.0	5.2
Dependência Administrativa															
Estadual	3.0	3.2	3.4	3.4	3.4	3.5	3.5	3.1	3.2	3.3	3.6	3.9	4.4	4.6	4.9
Privada	5.6	5.6	5.6	5.7	5.4	5.3	5.8	5.6	5.7	5.8	6.0	6.3	6.7	6.8	7.0
Pública	3.1	3.2	3.4	3.4	3.4	3.5	3.5	3.1	3.2	3.4	3.6	4.0	4.4	4.7	4.9

Os resultados marcados em verde referem-se ao Ideb que atingiu a meta.
Fonte: Saeb e Censo Escolar.

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP (2018).

Os resultados apresentados pelo Ministério da Educação (MEC) e pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), divulgados em 2018 mostram que nenhum estado brasileiro atingiu a meta de 4,4 do Ideb 2017 no Ensino Médio, a nota total do ensino médio (Rede Estadual, Pública e Privada) foi de 3,8. Os resultados assinalam que o país está distante da meta de 5,2 projetada para o Ideb de 2021 e apontam preocupações que precisarão ser discutidas no âmbito das escolas, com apoio e colaboração de secretarias municipais, estaduais, e do Ministério da Educação (BRASIL, 2018). Este cenário reforça a necessidade de se repensar a qualidade do ensino-aprendizagem dos conteúdos das disciplinas do Ensino Médio.

Referindo-se as metodologias de ensino-aprendizagem nas escolas, Fonseca (2010, p. 63) questiona, "será que devemos continuar ensinando Trigonometria com quadro, giz, apagador, réguas e esquadros para quadros? Até que ponto esse ensino de Trigonometria está dando resultado?". Ainda, segundo Fonseca (2010), não se pode pensar o ensino da Trigonometria sem considerar sua história, materiais didáticos, experimentos, *softwares*, avanços tecnológicos, sem relacioná-la com o cotidiano, sem incentivar a criatividade.

Buscando organizar a pesquisa referente à história da Trigonometria, os alunos foram divididos em grupos, desde modo, realizaram investigações referente a matemáticos que contribuíram com o desenvolvimento da trigonometria, especificamente Hiparco, Ptolomeu, Pitágoras e Tales, confeccionaram cartazes e apresentaram os resultados no decorrer da 14ª e 15ª aula da disciplina de Matemática IV.

Nesse passo, a partir das apresentações, foi possível verificar por meio das falas e cartazes que a maioria dos alunos haviam se dedicado à pesquisa proposta. Apesar de terem sido divididos em grupos, foi solicitado que cada aluno confeccionasse seu próprio cartaz.

Foram organizados quatro grupos, o primeiro grupo ficou responsável por pesquisar sobre Hiparco, o segundo sobre Ptolomeu, o quarto sobre Pitágoras e o quinto grupo sobre Tales. A proposta foi distribuir o tema entre os cartazes do grupo, dos dezesseis alunos, somente um aluno não confeccionou o cartaz.

Durante as apresentações, foi possível verificar que cada grupo tinha um líder, mas todos os alunos apresentaram seus cartazes. Pode-se afirmar que a proposta de pesquisa e apresentação de seminários contribuíram com a motivação dos alunos, alguns alunos fizeram questão de elogiar seu próprio cartaz, mostrando-se orgulhoso pelo trabalho realizado.

5.1 Avaliação diagnóstica: análise preliminar de conhecimentos

Com o intuito de analisar o nível de conhecimento dos alunos, ou seja, o desenvolvimento real dos alunos sujeitos da pesquisa em relação à capacidade de resolver problemas de forma autônoma envolvendo conteúdos que seriam estudados durante a realização do experimento didático-formativo, na segunda e terceira aula, aplicou-se uma avaliação diagnóstica, conforme planejamento apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 – Planejamento da avaliação diagnóstica

Avaliação diagnóstica	
Data:	23/02/2018
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Trigonometria no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras. Razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º.
Objeto Geral	Reconhecer o nível de desenvolvimento real dos alunos em relação aos conteúdos abordados na avaliação.
Recursos	Calculadora e avaliação diagnóstica.
Procedimentos	Os alunos deverão ilustrar e resolver as situações problemas de forma individual.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: Plano de Ensino (2018) (Apêndice A).

O nível de desenvolvimento real é a capacidade do sujeito de realizar algo de forma independente (VYGOTSKY, 2007). Portanto, nesta etapa da pesquisa foi medida a capacidade dos alunos resolverem os problemas apresentados, sem o auxílio dos colegas ou da professora. A avaliação foi composta por seis questões que abordaram situações problema, envolvendo o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º. A aplicação ocorreu no decorrer da 2ª e 3ª aula da disciplina de Matemática IV. Dos dezesseis sujeitos participantes da pesquisa, quinze alunos realizaram a avaliação diagnóstica, pois um aluno não compareceu as aulas.

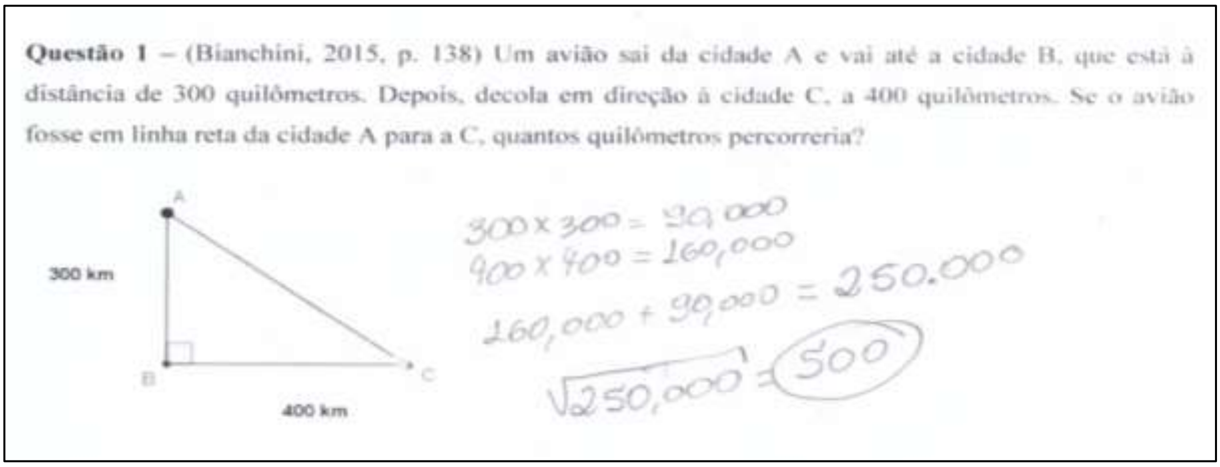
Cabe relembrar que para preservar a identidade dos alunos, nesta pesquisa, foram utilizadas letras maiúsculas do alfabeto para nomeá-los. Em relação à avaliação diagnóstica, os alunos não foram informados quais conteúdos eram abordados nas questões, visto que, um dos objetivos era verificar o nível de conhecimento dos alunos em relação aos conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo abordados na avaliação. Em todas as aulas da disciplina foi autorizada a utilização de calculadora, o que permitiu aos alunos realizar cálculos que envolviam razões trigonométricas.

Como informado à avaliação era composta de seis questões, a primeira questão abordava o problema de um avião que saia da cidade A em direção à cidade B, que ficava à distância de 300 quilômetros, e depois, decolava em direção à cidade C, a 400 quilômetros. Supondo que o avião fosse da cidade A para a C em linha reta, foi questionado: quantos quilômetros o avião percorreria.

Além do problema, a questão apresentou uma ilustração da situação abordada. Dos quinze alunos, seis não responderam à questão. Um aluno aplicou o teorema de Pitágoras e conseguiu resolver o problema corretamente. Analisando os cálculos anotados pelo aluno, foi possível verificar que se tratava do teorema de Pitágoras, mas o aluno não disse que havia aplicado o teorema.

A Figura 2 apresenta a resolução feita pelo aluno.

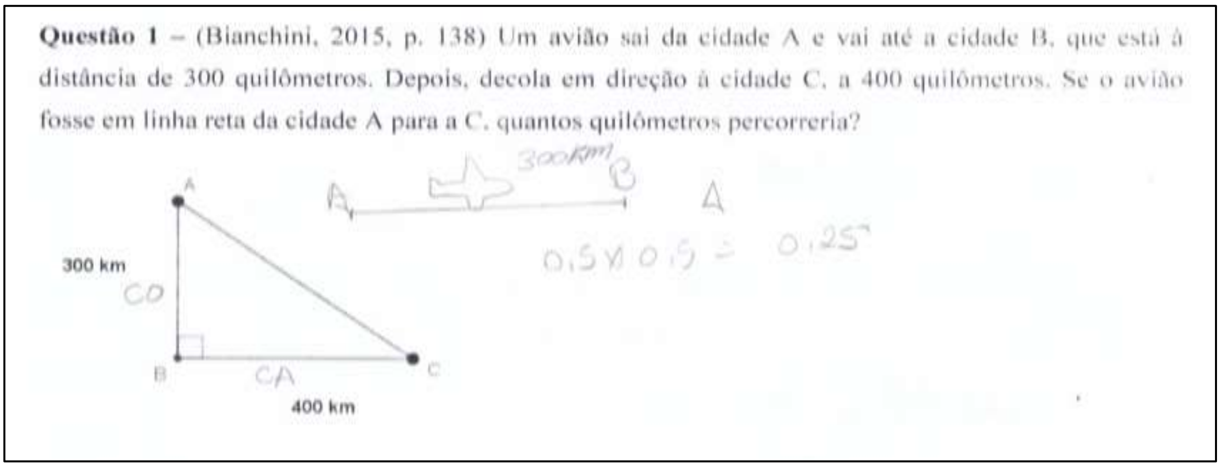
Figura 2 – Resposta do aluno P referente à primeira questão


Questão 1 – (Bianchini, 2015, p. 138) Um avião sai da cidade A e vai até a cidade B, que está à distância de 300 quilômetros. Depois, decola em direção à cidade C, a 400 quilômetros. Se o avião fosse em linha reta da cidade A para a C, quantos quilômetros percorreria?

Fonte: avaliação diagnóstica aluno P.

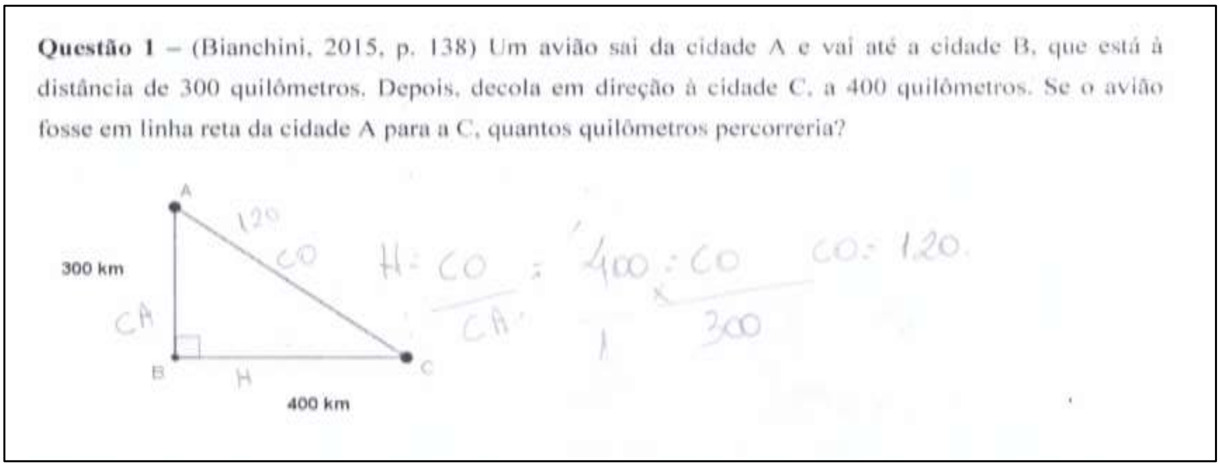
Dois alunos fizeram anotações referentes ao cateto oposto e adjacente, na tentativa de resolver o problema, porém, não conseguiram chegar ao resultado correto, conforme apresentado nas Figuras 3 e 4.

Figura 3 – Resposta do aluno Q referente à primeira questão


Questão 1 – (Bianchini, 2015, p. 138) Um avião sai da cidade A e vai até a cidade B, que está à distância de 300 quilômetros. Depois, decola em direção à cidade C, a 400 quilômetros. Se o avião fosse em linha reta da cidade A para a C, quantos quilômetros percorreria?

Fonte: avaliação diagnóstica aluno Q.

Figura 4 – Resposta do aluno H referente à primeira questão

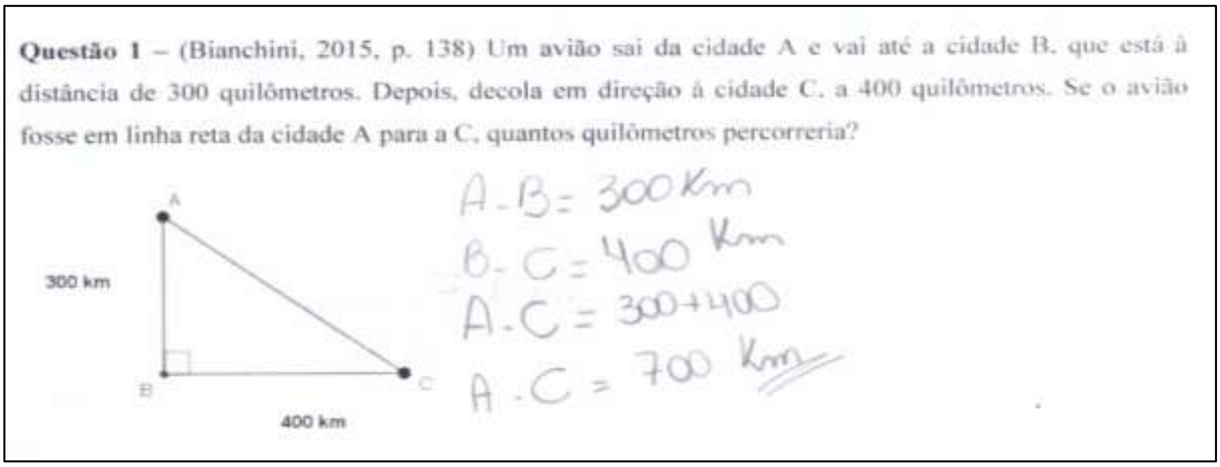


Questão 1 – (Bianchini, 2015, p. 138) Um avião sai da cidade A e vai até a cidade B, que está à distância de 300 quilômetros. Depois, decola em direção à cidade C, a 400 quilômetros. Se o avião fosse em linha reta da cidade A para a C, quantos quilômetros percorreria?

Fonte: avaliação diagnóstica aluno H.

Seis alunos aplicaram operações de soma, no entanto, não conseguiram calcular quantos quilômetros o avião percorreu da cidade A até a cidade C, voando em linha reta. A Figura 5 apresenta a resolução de um desses alunos.

Figura 5 – Resposta do aluno F referente à primeira questão



Questão 1 – (Bianchini, 2015, p. 138) Um avião sai da cidade A e vai até a cidade B, que está à distância de 300 quilômetros. Depois, decola em direção à cidade C, a 400 quilômetros. Se o avião fosse em linha reta da cidade A para a C, quantos quilômetros percorreria?

Fonte: avaliação diagnóstica aluno F.

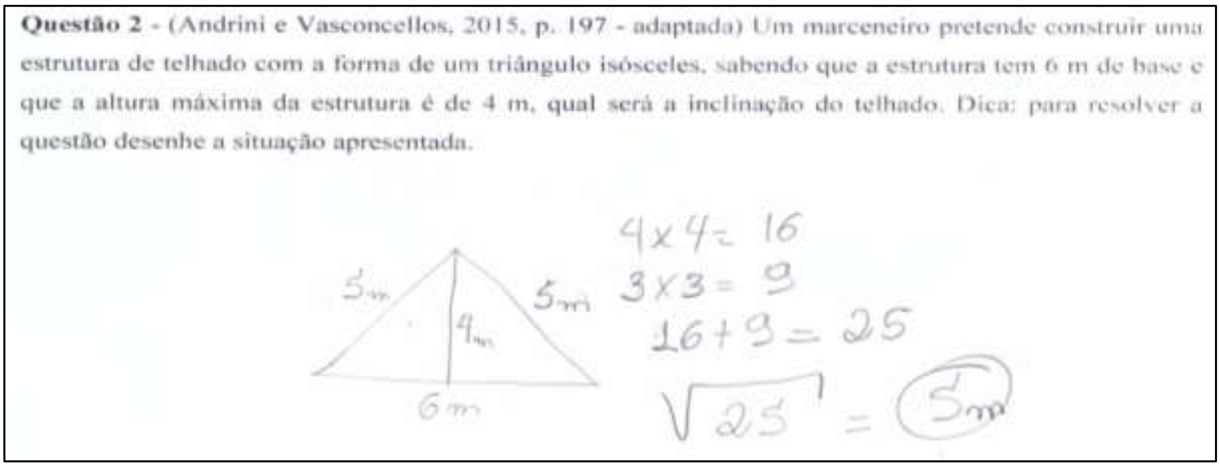
A segunda questão apresentou a situação de um marceneiro que pretendia construir uma estrutura de telhado, no formato de um triângulo isósceles.

Questionou-se qual seria a inclinação do telhado, sabendo que a estrutura tinha 6 m de base e que a altura máxima da estrutura era de 4 m. Como dica à questão sugeriu que a situação apresentada fosse ilustrada.

A inclinação refere-se aos lados do telhado que ficam inclinados, e não a medida em ângulo que determinou a inclinação (condição informada aos alunos durante a realização da avaliação, pois ao adaptar a questão o enunciado ficou errado).

Nesse sentido, quinze alunos tentaram desenhar a situação proposta, mas somente um ilustrou e respondeu corretamente, note-se, a resolução na Figura 6.

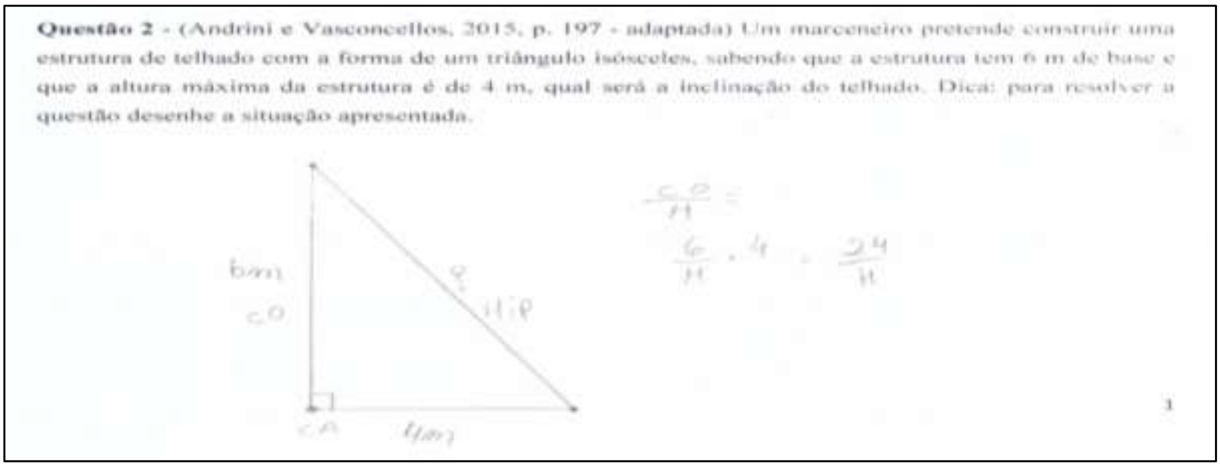
Figura 6 – Resolução do aluno P referente à segunda questão


Questão 2 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 197 - adaptada) Um marceneiro pretende construir uma estrutura de telhado com a forma de um triângulo isósceles, sabendo que a estrutura tem 6 m de base e que a altura máxima da estrutura é de 4 m, qual será a inclinação do telhado. Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

Fonte: avaliação diagnóstica aluno P.

Oito alunos tentaram relacionar por meio de figuras, mas somente o aluno P relacionou corretamente a medida da base e da altura da estrutura do telhado, conforme ilustrado na Figura 6. Dois alunos tentaram resolver o problema, aplicando os elementos: hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente, todavia, não chegaram ao resultado correto. A Figura 7 ilustra uma dessas resoluções.

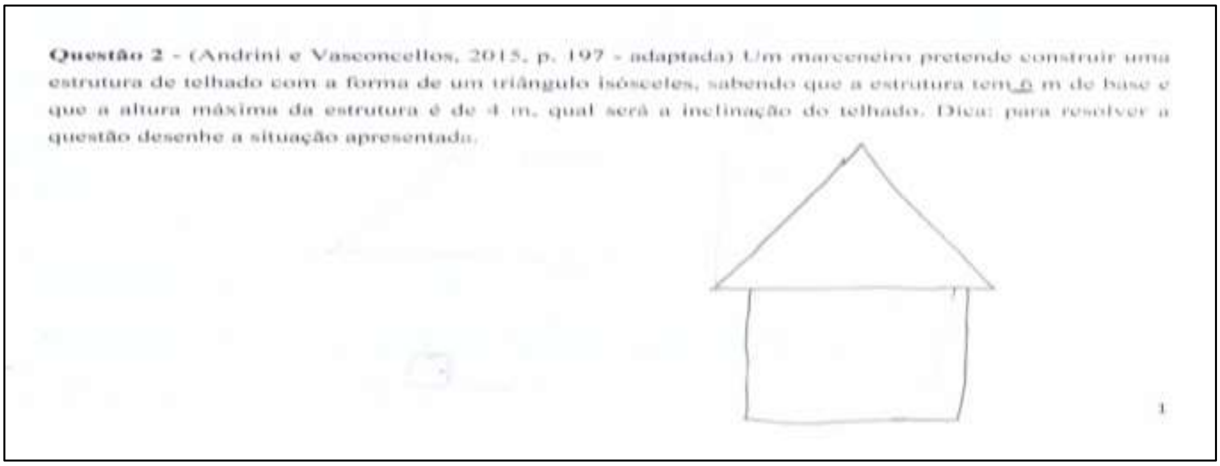
Figura 7 – Resolução da segunda questão realizada pelo aluno Q


Questão 2 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 197 - adaptada) Um marceneiro pretende construir uma estrutura de telhado com a forma de um triângulo isósceles, sabendo que a estrutura tem 6 m de base e que a altura máxima da estrutura é de 4 m, qual será a inclinação do telhado. Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

Fonte: avaliação diagnóstica aluno Q.

A Figura 8 apresenta a ilustração feita pelo aluno G, verificou-se que ao tentar ilustrar as situações problemas da avaliação diagnóstica, este aluno baseou-se nos conhecimentos empíricos.

Figura 8 – Ilustração da segunda questão feita pelo aluno G



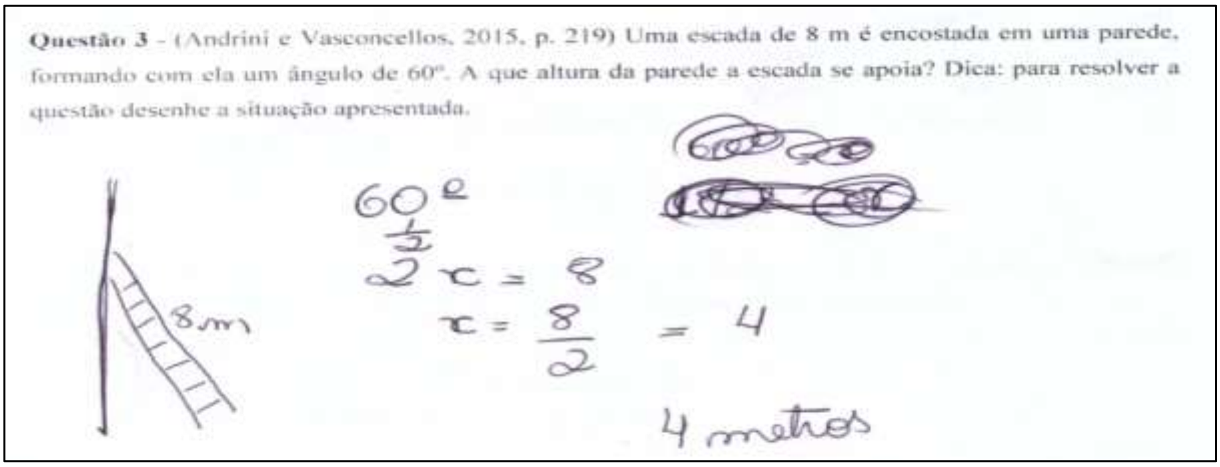
Fonte: avaliação diagnóstica aluno G.

> O conhecimento empírico tem a ver com diferenças e semelhanças entre os fenômenos; surge por meio da observação e comparação de fenômenos; pode ser ordenado hierarquicamente com base em características formais; e a palavra ou um termo limitado é o meio pelo qual ele é comunicado. Por meio do procedimento epistemológico empírico, o objeto individual é captado quando é isolado de sua conexão espacial e cronológica, de modo a poder ser observado, comparado, categorizado e relembrado. As imagens e a linguagem são os meios usados para tal fim. Na exposição empírica, o objeto individual funciona como uma realidade independente (DANIELS, 2002, p. 205).

A terceira questão propôs a resolução do problema de uma escada de 8 m encostada em uma parede, formando um ângulo de 60º.

Nesse passo, a questão era determinar a que altura da parede a escada se apoiava, foi indicado que se ilustrasse a situação apresentada. Dois alunos não ilustraram a situação e não tentaram resolver o problema. Treze alunos ilustraram a situação, quatro de forma correta, destes, três relacionaram corretamente o ângulo de 60º e três a medida de 8 m. Somente dois alunos conseguiram anotar corretamente ambas as medidas. Quatro tentaram calcular a que altura da parede a escada estava apoiada, sendo que destes, apenas o aluno A respondeu corretamente à questão. Analisando os cálculos efetuados pelo aluno A, notou-se que aplicou a razão trigonométrica do cosseno de 60º na resolução da situação problema, como pode ser observado na Figura 9.

Figura 9 – Resolução correta da terceira questão feita pelo aluno A


Questão 3 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 219) Uma escada de 8 m é encostada em uma parede, formando com ela um ângulo de 60°. A que altura da parede a escada se apoia? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

8m

60º

$\frac{1}{2}$

2x = 8

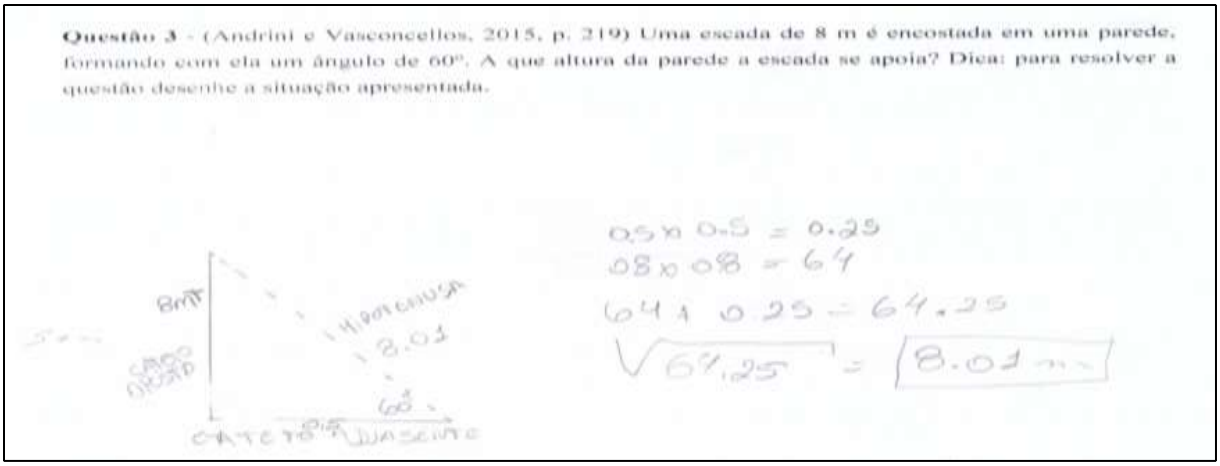
x = $\frac{8}{2}$ = 4

4 metros

Fonte: avaliação diagnóstica aluno A.

Ao analisar as avaliações diagnósticas, observou-se que dos quatro alunos que tentaram resolver a situação proposta, dois efetuaram cálculos similares, por estarem próximos na sala de aula. Acredita-se que as Figuras 10 e 11 apresentam os cálculos efetuados por esses alunos.

Figura 10 – Resolução da segunda questão efetuada pelo aluno Q


Questão 3 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 219) Uma escada de 8 m é encostada em uma parede, formando com ela um ângulo de 60°. A que altura da parede a escada se apoia? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

8m

cateto oposto

hipotenusa

8.01

60º

cateto adjacente

0,5 x 0.5 = 0.25

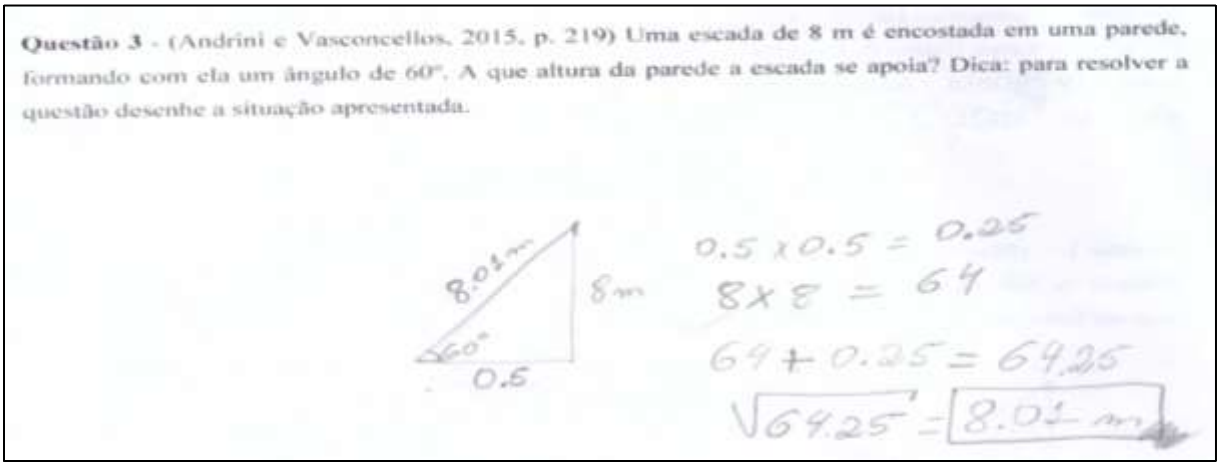
08 x 08 = 64

64 + 0.25 = 64.25

$\sqrt{64,25}$ = $\boxed{8.01\ m}$

Fonte: avaliação diagnóstica aluno Q.

Figura11 – Resolução da segunda questão efetuada pelo aluno P



Fonte: avaliação diagnóstica aluno P.

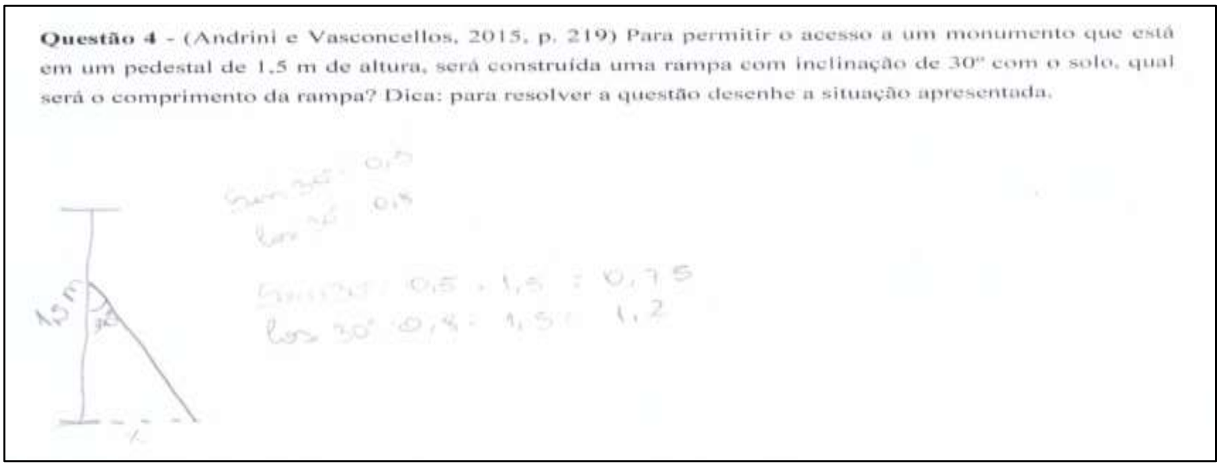
A quarta questão propôs a seguinte situação: “Para permitir o acesso a um monumento que está em um pedestal de 1,5 m de altura, será construída uma rampa com inclinação de 30º com o solo, qual será o comprimento da rampa?” (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015, p. 219).

Nesse sentido, trouxe uma dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada. Nesta questão, dois alunos não ilustraram a situação.

Dos treze alunos que tentaram ilustrar o problema, quatro fizeram corretamente. Somente dois relacionaram a altura de 1,5 m e o ângulo de 30º corretamente. Quatro alunos tentaram calcular o comprimento da rampa, dois relacionaram a medida de 30º ao seno e cosseno, destes, um tentou resolver o problema aplicando o teorema de Pitágoras. O mesmo cálculo foi observado na resolução efetuada por outro aluno, mas este não fez anotações sobre seno e cosseno. Contudo, nenhum dos alunos que tentou resolver a situação apresentada conseguiu calcular o comprimento correto da rampa.

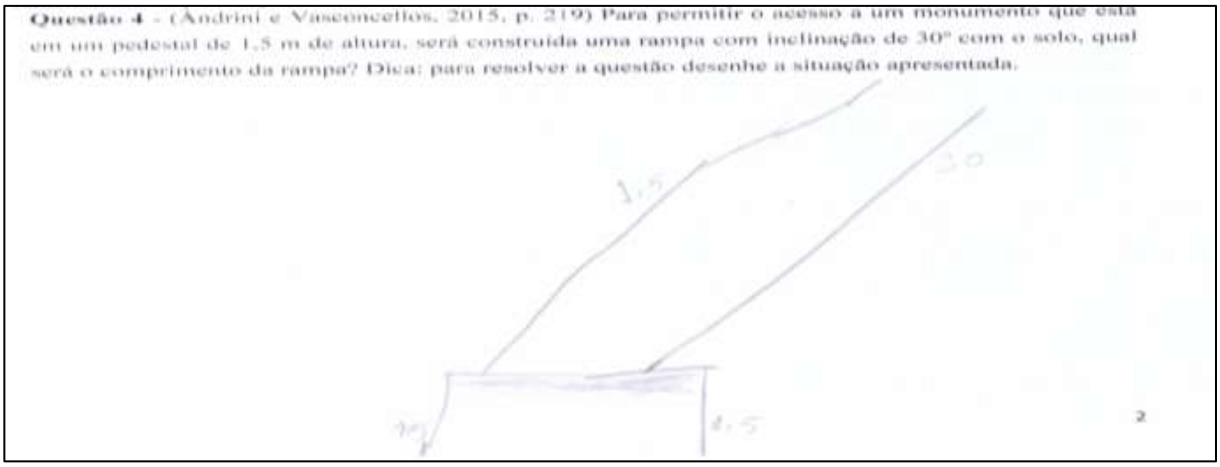
As Figuras 12, 13, 14 e 15 apresentam as tentativas de ilustração e/ou resolução de alguns alunos.

Figura 12 – Tentativa de resolução da quarta questão efetuada pelo aluno H


Questão 4 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 219) Para permitir o acesso a um monumento que está em um pedestal de 1,5 m de altura, será construída uma rampa com inclinação de 30° com o solo, qual será o comprimento da rampa? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

Fonte: avaliação diagnóstica aluno H.

Figura 13 – Ilustração da quarta questão efetuada pelo aluno J


Questão 4 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 219) Para permitir o acesso a um monumento que está em um pedestal de 1,5 m de altura, será construída uma rampa com inclinação de 30° com o solo, qual será o comprimento da rampa? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

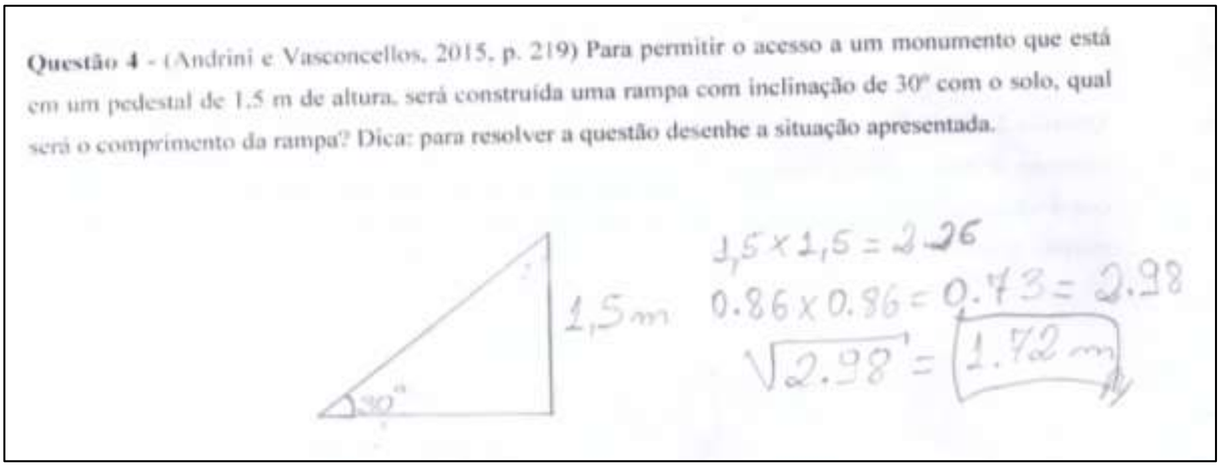
Fonte: avaliação diagnóstica aluno J.

Figura 14 – Ilustração da quarta questão efetuada pelo aluno G


Questão 4 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 219) Para permitir o acesso a um monumento que está em um pedestal de 1,5 m de altura, será construída uma rampa com inclinação de 30° com o solo, qual será o comprimento da rampa? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

Fonte: avaliação diagnóstica aluno G.

Figura 15 – Tentativa de resolução da quarta questão efetuada pelo aluno P



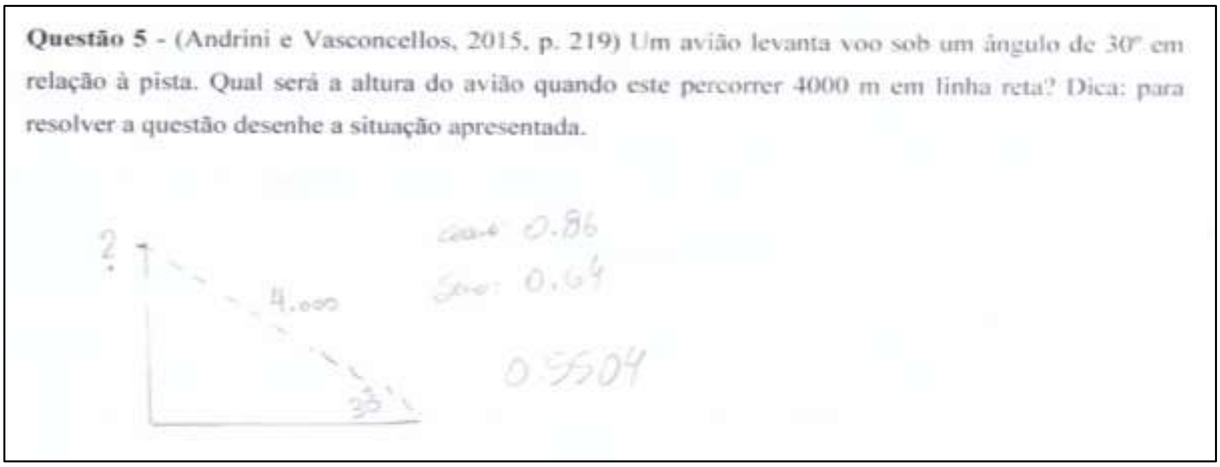
Questão 4 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 219) Para permitir o acesso a um monumento que está em um pedestal de 1,5 m de altura, será construída uma rampa com inclinação de 30º com o solo, qual será o comprimento da rampa? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

Fonte: avaliação diagnóstica aluno G.

A quinta questão apresentou o problema de um avião que levantou voo sob um ângulo de 30º em relação a uma pista. Pede-se a altura do avião quando este percorreu 4000 m em linha reta.

Assim como nas demais questões, foi sugerido fazer uma ilustração da situação proposta. Dois alunos deixaram a questão em branco. Treze alunos ilustraram a situação, três relacionaram triângulo retângulo à ilustração, seis apresentaram medidas às demonstrações. Dois alunos conseguiram relacionar corretamente o ângulo de 30º e a medida de 4000 m (Figuras 16 e 17). Três alunos tentaram resolver o problema, dois aplicando seno e cosseno aos cálculos, mas nenhum conseguiu calcular a altura correta do avião após percorrer 4000 m.

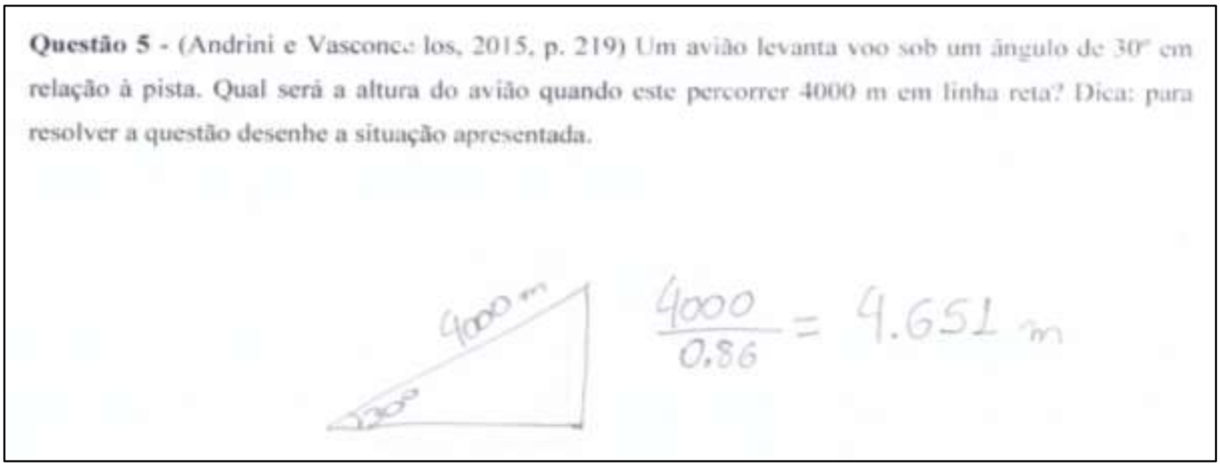
Figura 16 – Demonstração correta do ângulo de 30º e da medida de 4000 m feita pelo aluno Q



Questão 5 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 219) Um avião levanta voo sob um ângulo de 30º em relação à pista. Qual será a altura do avião quando este percorrer 4000 m em linha reta? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

Fonte: avaliação diagnóstica aluno Q.

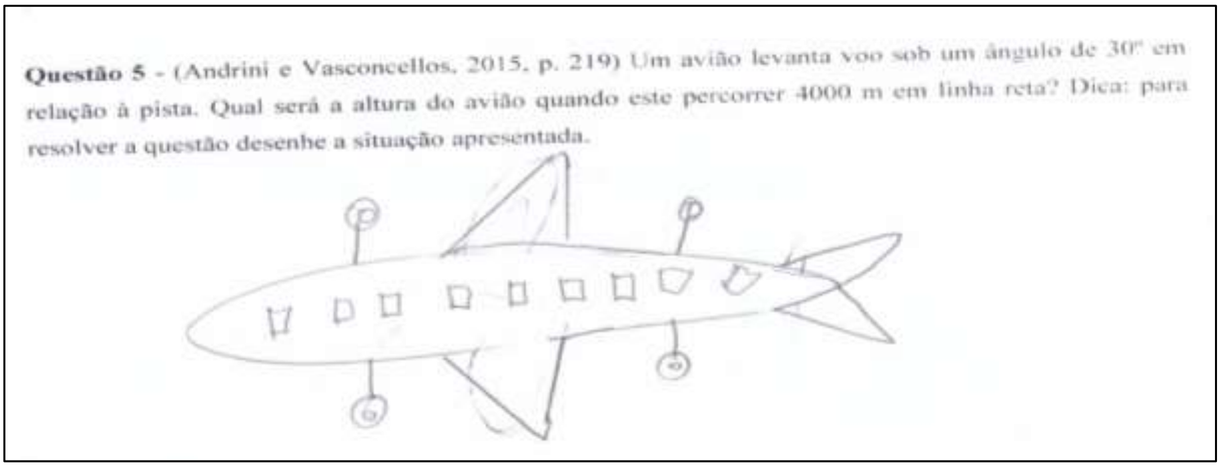
Figura 17 – Demonstração correta do ângulo de 30º e da medida de 4000 m feita pelo aluno P



Fonte: avaliação diagnóstica aluno P.

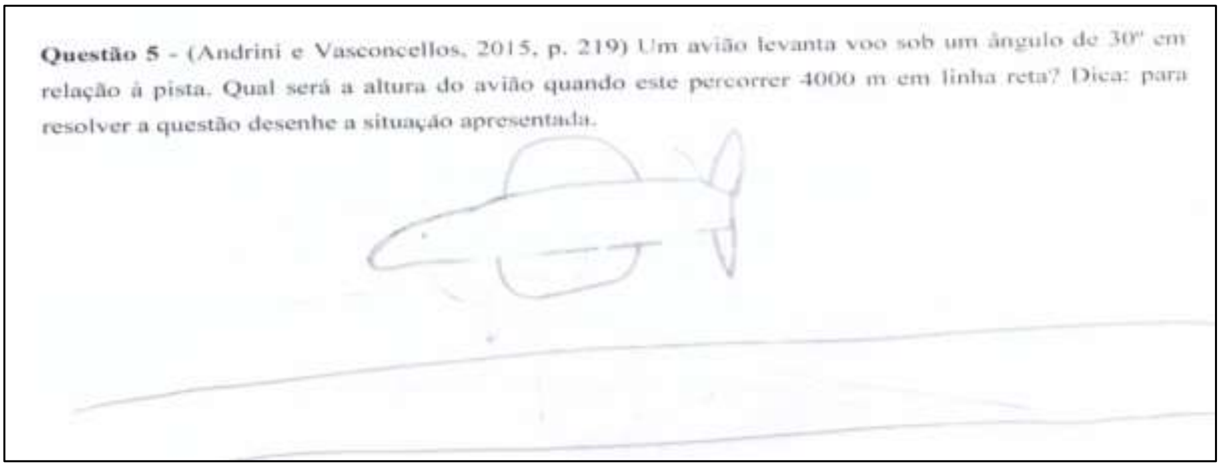
As Figuras 18 e 19 descrevem as ilustrações da quinta questão feitas pelos alunos B e J. Observe-se que esses alunos representaram a situação problema a partir de conhecimentos empíricos, ou seja, baseados apenas em experiências empíricas (sem caráter científico) anteriores.

Figura 18 – Ilustração da quinta questão feita pelo aluno B



Fonte: avaliação diagnóstica aluno B.

Figura 19 – Ilustração da quinta questão feita pelo aluno J

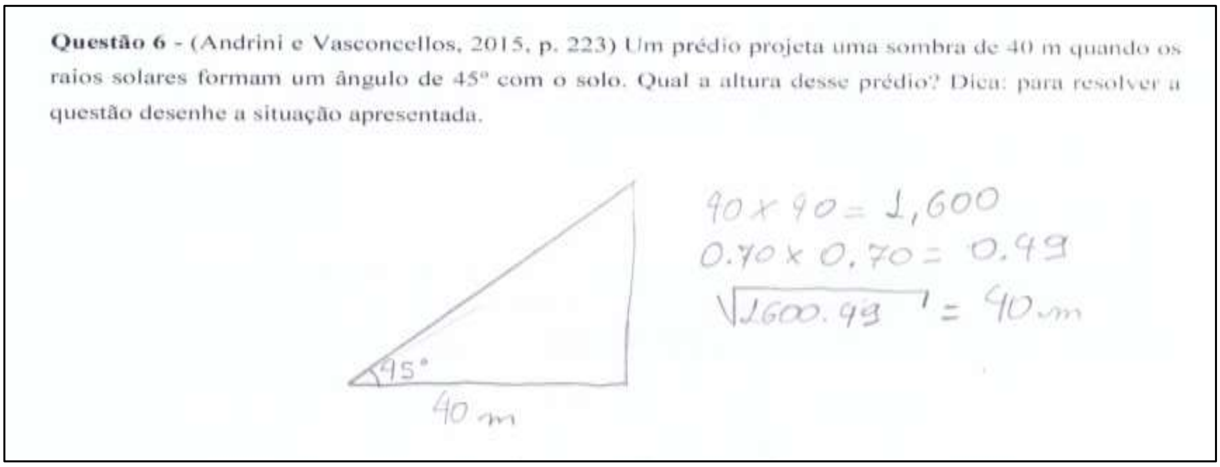


Fonte: avaliação diagnóstica aluno J.

A sexta questão também sugeriu a ilustração da situação proposta, que abordou o seguinte problema: “Um prédio projeta uma sombra de 40 m quando os raios solares formam um ângulo de 45º com o solo. Qual a altura desse prédio?” (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015, p. 223).

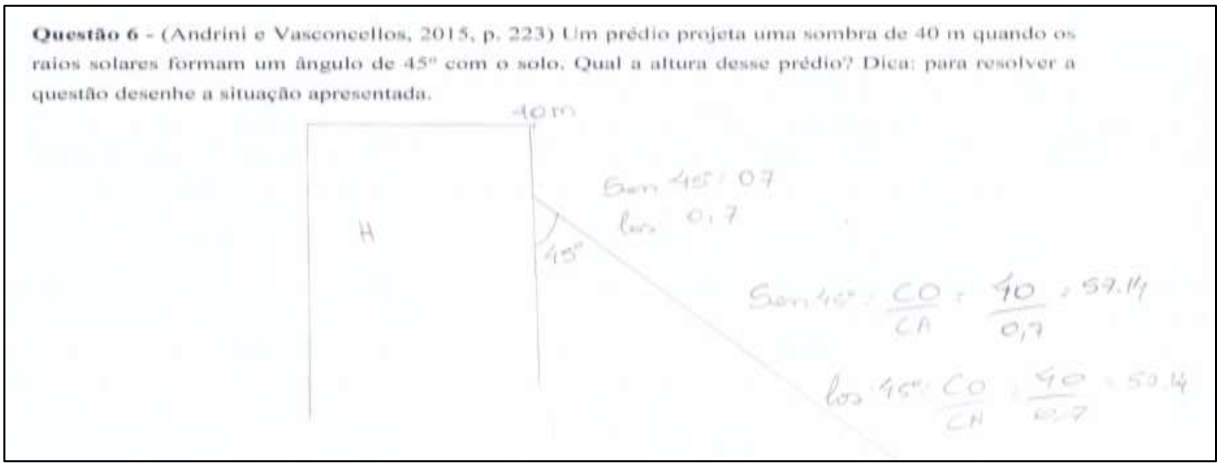
Nesse passo, doze alunos ilustraram a questão, três relacionaram triângulo retângulo à figura e conseguiram demonstrar corretamente a situação. Quatro construíram o ângulo de 45º, mas somente dois relacionaram de forma correta. Apenas um demonstrou corretamente a medida de 40 m, referente à sombra projetada pelo prédio. Dois alunos tentaram calcular a altura do prédio, destes um aplicou o teorema de Pitágoras e outro as razões trigonométricas seno e cosseno, porém, não conseguiram calcular corretamente a altura do prédio. As Figuras 20 e 21 apresentam as resoluções feitas por esses alunos.

Figura 20 – Resolução da sexta questão feita pelo aluno H



Fonte: avaliação diagnóstica aluno H.

Figura 21 – Resolução da sexta questão feita pelo aluno P



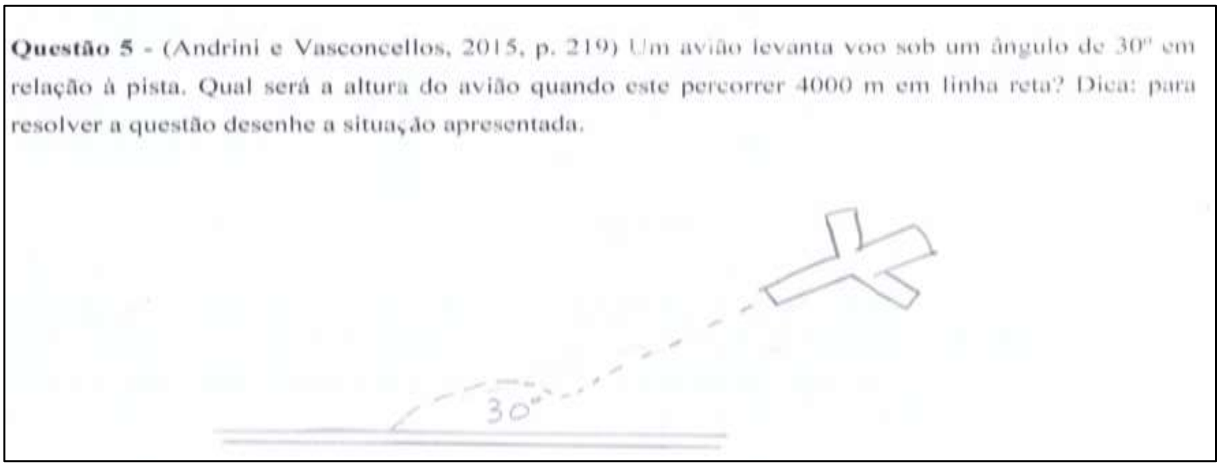
Fonte: avaliação diagnóstica aluno P.

O aluno C, apesar de ter apenas ilustrado as situações problemas, apresentou conhecimentos básicos em relação a ângulos, como pode ser observado nas Figuras 22, 23 e 24.

Figura 22 – Ilustração da terceira questão feita pelo aluno C

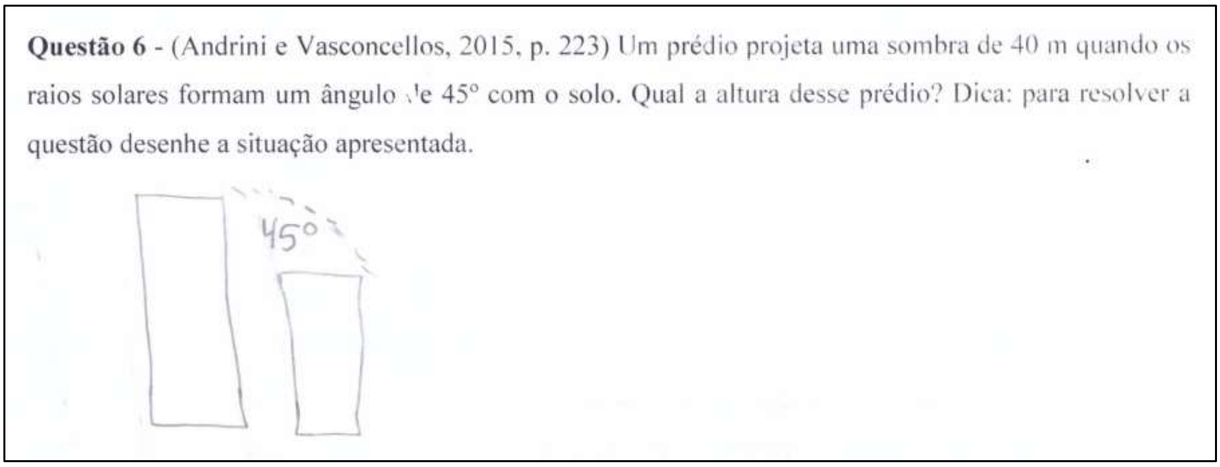
Fonte: avaliação diagnóstica aluno C.

Figura 23 – Ilustração da quinta questão feita pelo aluno C



Fonte: avaliação diagnóstica aluno C.

Figura 24 – Ilustração da sexta questão feita pelo aluno C



Fonte: avaliação diagnóstica aluno C.

Foram consideradas corretas as questões que apresentaram corretamente a ilustração da situação-problema e a resolução dos cálculos. Foi analisada a quantidade de alunos que tentaram ilustrar a situação apresentada, a quantidade de alunos que ilustraram a situação corretamente, a quantidade de alunos que tentaram resolver a situação-problema e a quantidade de alunos que resolveram a situação-problema corretamente.

A Tabela 1 apresenta de forma sintetizada os resultados da aplicação da avaliação diagnóstica.

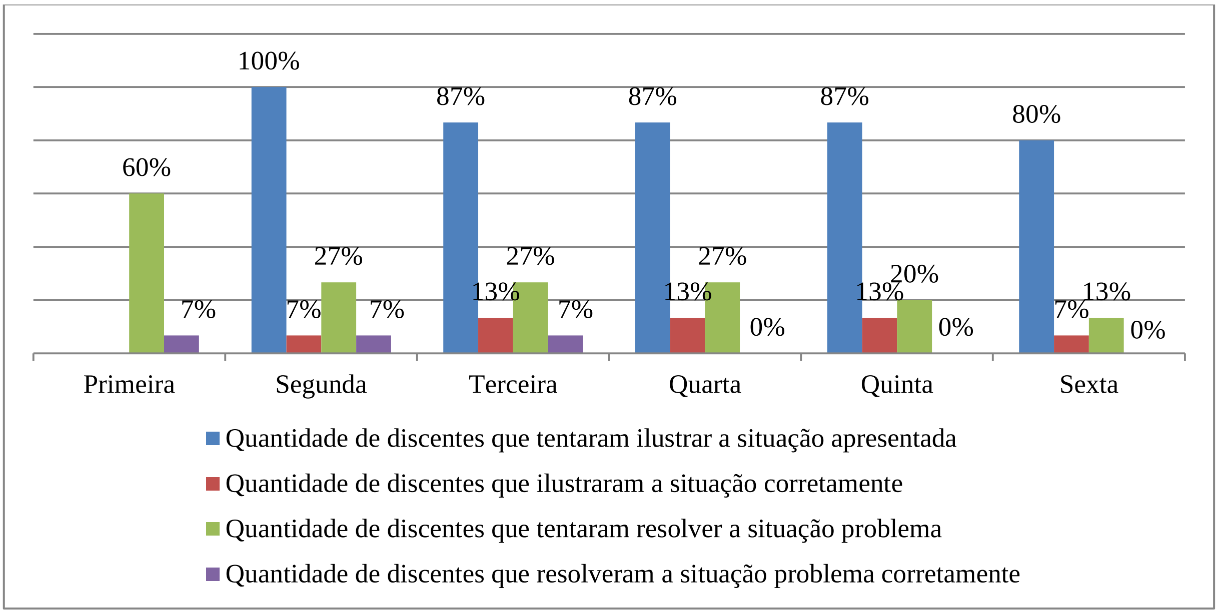
Tabela 1 – Resultados da aplicação da avaliação diagnóstica

Questões	**Quantidade de alunos que tentaram ilustrar a situação apresentada**	**Quantidade de alunos que ilustraram a situação corretamente**	**Quantidade de alunos que tentaram resolver a situação-problema**	**Quantidade de alunos que resolveram a situação-problema corretamente**
Primeira	Questão ilustrada	Questão ilustrada	09	01
Segunda	15	01	04	01
Terceira	13	02	04	01
Quarta	13	02	04	0
Quinta	13	02	03	0
Sexta	12	01	02	0

Fonte: elaboração da autora (2018).

O Gráfico 2 ilustra o percentual dos resultados da aplicação da avaliação diagnóstica.

Gráfico 2 – Percentual de resultados da avaliação diagnóstica



Fonte: elaboração da autora (2018).

Analisando os resultados da aplicação da avaliação diagnóstica verificou-se que, quinze alunos ilustraram pelo menos uma das questões, 14 fizeram pelo menos uma anotação de medidas, nove tentaram resolver pelo menos um dos problemas apresentados. Dois alunos deixaram quatro das seis questões em branco, portanto não tentaram ilustrar as situações e resolver os problemas. Quatro avaliações apresentaram ilustrações similares na terceira, quarta, quinta e sexta questão, acredita-se que um mesmo aluno tenha ilustrado essas questões.

A partir dessa análise, os alunos foram orientados em relação à importância da realização das tarefas, procurando evitar que a situação se repetisse.

Os resultados da aplicação da avaliação diagnóstica possibilitaram avaliar o nível de conhecimento dos alunos em relação aos conteúdos exigidos para resolução dos problemas propostos nas questões. Embora os resultados parecerem insatisfatórios, a aplicação da avaliação permitiu identificar que alguns alunos conseguiram aplicar conceitos científicos básicos dos conteúdos abordados nas questões.

Contudo, os resultados indicaram que a maioria dos alunos não conseguiu compreender as situações propostas, como não tinham representações geométricas dos problemas, muitos operaram no nível empírico de conhecimento, e apresentaram déficit de conhecimento dos conceitos exigidos para resolução dos problemas. Isso, possivelmente, devido a uma formação insuficiente, em relação aos conteúdos de trigonometria estudados no Ensino Fundamental.

Outro motivo provável para o baixo percentual de acertos consiste na irregularidade do processo de estudos dos sujeitos da pesquisa. Conforme resultados da aplicação de questionário preliminar, dos quinze alunos que responderam a avalição, onze se ausentaram da escola em determinado período da vida.

Considerando a Matemática, os conteúdos, sobretudo, em instituições escolares públicas, estão longe do ideal para formação dos sujeitos. Nesse sentido, Vaz (2012, p. 42) aponta que

> não é difícil encontrar dados estatísticos mostrando o baixo rendimento escolar em Educação Matemática em nosso país corroborando com a nossa própria experiência profissional como educador matemático. Os diversos relatos que obtemos pelas pesquisas governamentais, seja em testes internacionais ou nacionais, revelam um cenário ainda desolador com relação ao ensino em geral e particularmente na Matemática esses índices são mais alarmantes. Existem diversos problemas associados ao baixo rendimento escolar do aluno na disciplina de Matemática: formação inadequada, baixos salários, problemas sociais, falta de uma política pública adequada, principalmente nas esferas estaduais e municipais, entre tantos. Constata-se ainda que a metodologia de ensino do professor, na maioria dos casos, é quase sempre informativa.

Os problemas citados por Vaz (2012) foram evidenciados no decorrer desta pesquisa, todavia, o que mais interferiu no andamento das investigações foi à questão das políticas públicas inadequadas. Nas esferas estaduais e municipais da cidade campo da pesquisa, laboratório de informática nas escolas públicas é raridade. Na tentativa de suprir a rede com vagas suficientes para atender a demanda estudantil, a esfera municipal desativou os laboratórios de computação e transformou em salas de aula. Na esfera estadual, são poucas as escolas que oferecem aulas com recurso da informática, quando a instituição escolar tem laboratório de computação, não tem computadores suficientes para atender a quantidade de alunos de cada turma.

Durante as visitas realizadas em doze escolas públicas do município, haviam apenas três instituições que tinham laboratório de informática, duas estaduais e uma municipal. Na escola municipal, a coordenação não conseguiu passar informações sobre a quantidade de computadores, pois o laboratório não era utilizado pelos professores e não foi possível encontrar a chave do cadeado para abrir a sala.

Nesse passo, em uma das escolas estaduais, o laboratório dispunha de catorze computadores, seis estavam desativados, devido aos problemas de funcionamento. A coordenação justificou que os professores não utilizavam a informática para ensinar, porque a quantidade de computadores era insuficiente. Esta escola disponibilizou o laboratório de informática e seis alunos para o desenvolvimento do estudo de trigonometria, contudo, o tempo de realização e quantidade de participantes, não possibilitou a coleta de dados suficientes para análise do experimento didático-formativo.

Somente em uma escola estadual foi informado que o laboratório de informática era utilizado, mas o diretor não autorizou a realização da pesquisa, justificando que os professores de matemática tinham uma ementa extensa de conteúdos a cumprir. Apesar de todos os problemas relatados, a oportunidade de realização do estudo de trigonometria no triângulo retângulo surgiu quando a pesquisadora assumiu as aulas da disciplina de Matemática IV, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – Campus Rio Verde. A disponibilidade de laboratórios de informática da instituição, a quantidade de alunos e de horas-aula, possibilitou a realização do estudo de trigonometria com o *software* Geogebra.

5.2 Tarefa: retas, ângulos e triângulos

Como mencionado, anteriormente, na primeira aula, foi aplicado um questionário que possibilitou identificar o perfil dos sujeitos da pesquisa. Na segunda e terceira aulas, os alunos responderam uma avaliação diagnóstica que permitiu verificar o nível de desenvolvimento real dos alunos em relação ao conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo. A partir da quarta aula, enquanto era aguardada a liberação do laboratório de informática para disciplina de Matemática IV, foi proposta a tarefa “Retas, ângulos e triângulos” (Apêndice D), objetivando analisar o nível de conhecimento dos alunos quando apresentadas figuras geométricas e suas respectivas denominações. A atividade foi planejada, conforme apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 – Planejamento da tarefa: retas, ângulos e triângulos

Tarefa: retas, ângulos e triângulos	
Data:	01/03/2018
Carga horária	6 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Retas, ângulos e triângulos.
Objeto Geral	Analisar o nível de conhecimento dos alunos em relação às figuras geométricas apresentadas na tarefa.
Recursos	Tarefa de estudo.
Procedimentos	Relacionar figuras geométricas a suas respectivas nomeações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: Plano de ensino (2018) (Apêndice A).

Inicialmente, os alunos relacionaram as respectivas denominações às imagens das figuras geométricas apresentadas na tarefa. Nesta etapa, foi realizada de forma individual.

Observou-se que os alunos não conseguiam relacionar as figuras, estavam desmotivados e não entendiam porque deveriam realizar aquela atividade se ainda não tinham estudado aqueles conteúdos nas aulas de Matemática IV.

Ao final da quarta aula, a tarefa foi recolhida para análise e informado aos alunos que na próxima aula a mesma seria retomada.

Assim, na quinta aula, à tarefa foi retomada, mas de forma diferente do proposto anteriormente. Os alunos tentaram relacionar as figuras às suas denominações com a mediação da professora. As figuras geométricas apresentadas na atividade foram desenhadas no quadro e foi perguntado para a turma: “qual figura representa uma reta?”, os alunos responderam de acordo com suas conjecturas. A maioria dos alunos não conseguiu relacionar corretamente às figuras as respectivas denominações, sendo assim, a cada figura analisada suas propriedades eram explicadas, e os conceitos anotados pelos alunos.

A atividade foi concluída na nona aula, contribuindo para análise do nível de conhecimento dos alunos em relação às figuras geométricas analisadas. Pode-se afirmar que ao concluir a atividade, alguns alunos ainda apresentavam dificuldades em reconhecer e relacionar as figuras geométricas as suas nomeações. Foi perguntado aos alunos se já tinham estudado as propriedades das figuras apresentadas na atividade em séries anteriores. Apesar de se tratarem de conteúdos do Ensino Fundamental, a maioria dos alunos afirmou que não tinham estudado as propriedades daquelas figuras, alguns informaram que apesar de terem estudado, não se recordavam dos conceitos.

Acredito que as propriedades das figuras geométricas apresentadas na atividade tenham sido estudadas, no entanto, os alunos não conseguiam se recordar de suas características. A partir de minha experiência como professora, posso afirmar que este é um fato comum e preocupante referente à disciplina de Matemática.

Em geral, a abordagem de um novo conteúdo matemático, depende do conhecimento de conteúdos matemáticos estudados anteriormente, mas os alunos não se recordam dos conteúdos matemáticos estudados em séries anteriores. Diante dessa realidade, acredito que cabe ao professor propor tarefas que possibilitem revisar conteúdos estudados em séries anteriores, que são condição para o estudo a ser proposto.

Nesta pesquisa, foram propostas tarefas que contribuíram para revisão de conteúdos importantes para a realização do experimento didático-formativo, o que poderá ser verificado no decorrer deste trabalho.

Referente ao método de avaliação aplicado no decorrer das aulas da disciplina de Matemática IV compete informar que apesar da análise do desenvolvimento dos sujeitos desta pesquisa ter sido de caráter qualitativo, eles foram avaliados por meio de notas.

Sendo assim, foram determinados valores para as tarefas propostas no decorrer do experimento didático-formativo, porém, ao avaliar, não foram considerados os erros ou os acertos, mas a participação dos alunos no decorrer da realização das tarefas propostas.

Desse modo, pode-se afirmar que avaliar os alunos de forma qualitativa, inicialmente, gerou atitudes negativas, pois alguns alunos copiavam as atividades dos colegas para garantir a nota.

Na tentativa de evitar essa situação, quando constatada a cópia da tarefa, as notas eram divididas de maneira proporcional, por exemplo, se uma tarefa fosse emprestada para que outro colega copiasse, a nota era dividida de forma proporcional entre o aluno que emprestou a tarefa e os que copiaram. Mas isso somente era possível quando constatada a situação de cópia após as observações durante as aulas e análise das tarefas, porque os alunos que tinham essa atitude, em geral, copiavam os erros da tarefa do colega.

Contudo, os diálogos constantes com alunos reforçaram a cada aula, a importância da realização das tarefas, mas, sobretudo, o que evitou esse tipo de atitude foi à mediação realizada durante o desenvolvimento das atividades propostas no decorrer do experimento didático-formativo. Portanto, a partir das mediações da professora e/ou de colegas mais capazes, os alunos conseguiam realizar as atividades propostas, deixando assim de copiar as tarefas prontas de outros alunos.

5.3 Tutorial do *software* Geogebra: apropriação de ferramentas e conceitos

Disponibilizado laboratório de informática para a disciplina de Matemática IV, a partir da décima aula, deu-se início a utilização do Geogebra. O *software* foi apresentado aos alunos, inicialmente, que construíram com a mediação da professora e/ou colegas, algumas das figuras geométricas apresentadas na atividade “Retas, ângulos e triângulos”. Esse primeiro contato com o Geogebra foi proposto para que a professora pudesse analisar o desempenho dos alunos ao manipular as ferramentas do *software*. Verificou-se que os alunos não conheciam o Geogebra. Também foi possível identificar os alunos que apresentavam dificuldades ao manusear o *mouse* e o teclado, visto que era preciso saber manusear esses *hardwares* para realização das tarefas que seriam propostas durante o experimento didático-formativo.

Apesar da maioria dos alunos ter apresentado facilidade ao utilizar o *mouse* e o teclado, alguns alunos ficaram apreensivos e chegaram a dizer que não conseguiriam estudar matemática utilizando o Geogebra. Uma aluna disse que precisava muito aprender matemática, pois queria prestar o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja[5]), demonstrando não acreditar que poderia aprender conteúdos matemáticos, utilizando o *software*. Todavia, é possível afirmar que a aula também contribuiu

[5] O Encceja é um exame realizado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), que tem entre seus objetivos pleitear certificação de Ensino Fundamental e Ensino Médio para jovens e adultos residentes no Brasil e no exterior, inclusive às pessoas privadas de liberdade, que não tiveram oportunidade de concluir seus estudos na idade apropriada (BRASIL, 2018).

para compreensão inicial dos alunos quanto à utilização do Geogebra para construção de figuras geométricas.

A partir da décima primeira aula, os alunos construíram figuras geométricas seguindo as orientações do tutorial do Geogebra, que foi proposto para o reconhecimento das ferramentas do *software* e apropriação de conceitos importantes referentes a retas, ângulos e triângulos.

Compete informar que as orientações para construção de figuras geométricas apresentadas, neste trabalho, foram adaptadas das caixas de mensagens do *software* Geogebra Classic 5, que podem ser visualizadas, posicionando o ponteiro do *mouse* sobre a ferramenta desejada.

A aplicação do tutorial foi planejada, conforme apresentado no Quadro 4.

Quadro 4 – Planejamento da aplicação do Tutorial do *software* Geogebra

Tutorial do *software* Geogebra	
Data:	16/03/2018
Carga horária	6 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Ponto, reta, semirreta, segmento de reta, retas perpendiculares, retas paralelas, retas coincidentes, retas concorrentes, classificação de ângulos e triângulos.
Objeto Geral	Reconhecer as ferramentas do *software* Geogebra. Apropriação de conceitos de reta, ângulos e triângulos.
Recursos	Computadores, *Software* Geogebra e Tutorial.
Procedimentos	Construir retas, ângulos e triângulos utilizando ferramentas do Geogebra e investigar as propriedades das figuras geométricas construídas.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: Plano de ensino, 2018 (Apêndice A).

Cabe informar que configurações realizadas nas atividades após a aplicação das tarefas e tarefas planejadas e não propostas no decorrer do experimento didático-formativo, podem ser visualizadas no Caderno de Atividades: trigonometria no triângulo retângulo com o *software* Geogebra (Apêndice F).

As atividades propostas, nessa tarefa, foram realizadas no decorrer das aulas 11, 12, 13, 16, 17 e 18. Foi solicitado aos alunos que investigassem as propriedades das figuras geométricas construídas, objetivando que os conceitos fossem apropriados. Inicialmente, o tutorial apresentou o seguinte texto:

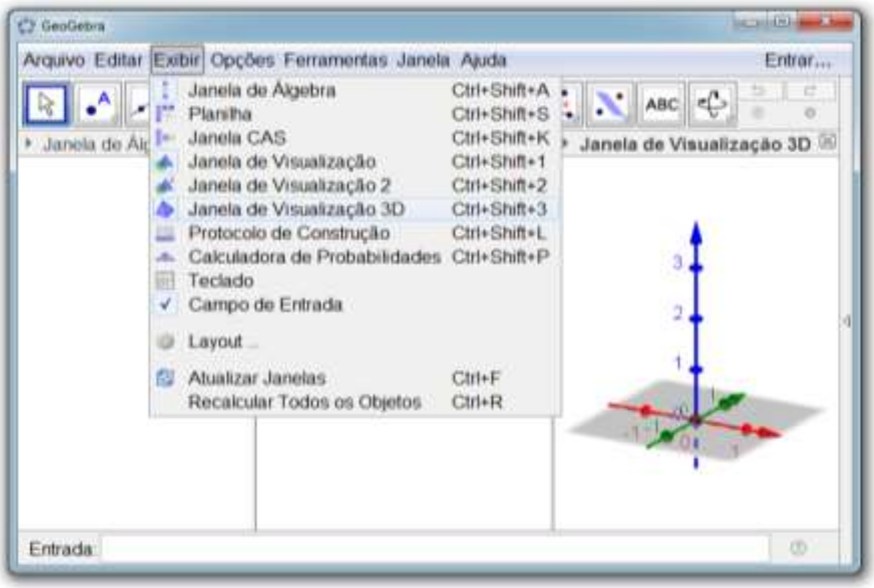
O Geogebra é um *software* de matemática que possibilita a construção de demonstrações que envolvam álgebra e geometria. O programa possui ferramentas, as quais permitem a movimentação e alteração das construções. O sucesso na construção de demonstrações exige conhecimento do conteúdo estudado e correta manipulação das ferramentas disponibilizadas pelo programa (ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010).

Nesse diapasão, o Geogebra apresenta caixas de mensagens com instruções de uso quando uma ferramenta básica é selecionada, contudo, a construção de ângulos de um triângulo, por exemplo, depende de manipulações que não são informadas pelo *software* (ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010). Com o objetivo de proporcionar conhecimentos básicos necessários para o estudo proposto, este tutorial apresenta o passo a passo para a construção de algumas figuras geométricas.

Janelas do Geogebra: O *software* apresenta duas janelas básicas: à esquerda a Janela de Álgebra e à direita a Janela de Visualização.

Exibindo ou ocultando janelas: acesse o menu Exibir e selecione Janela de Visualização, Janela de Visualização 2 ou Janela de Visualização 3D.

Figura 25 – Exibindo e ocultando janelas

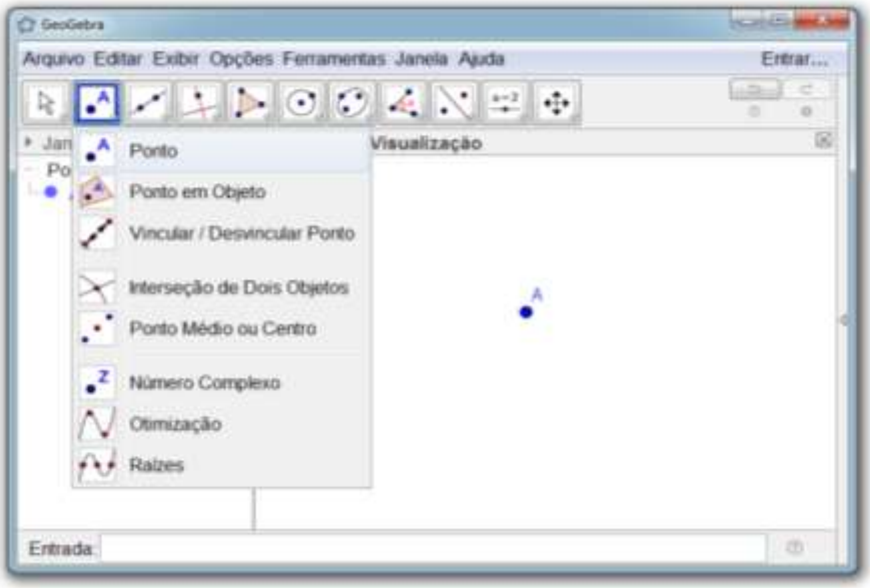


Fonte: elaboração da autora (2018).

Ponto: é uma noção primitiva que determina uma posição no espaço.

Inserindo um ponto: acesse a ferramenta Ponto, selecione uma posição, reta, função ou curva.

Figura 26 – Inserindo um ponto

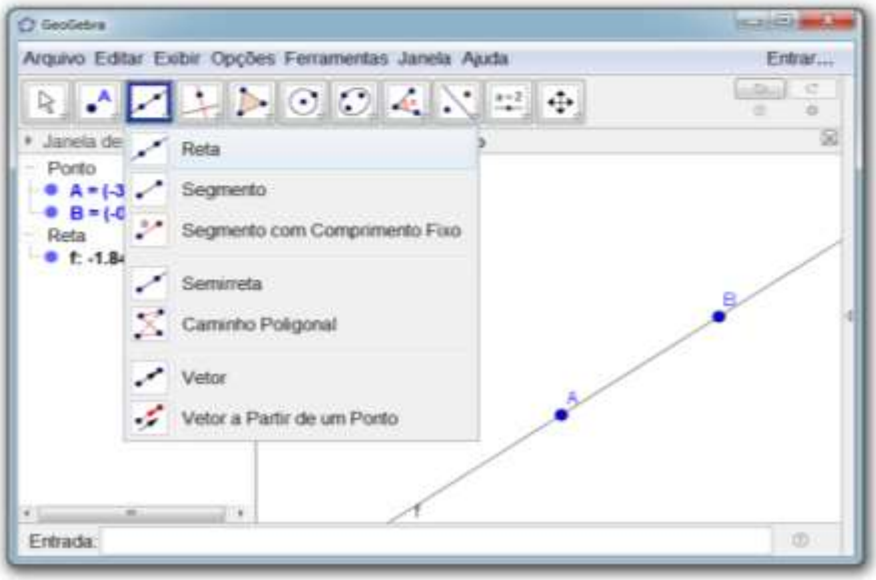


Fonte: elaboração da autora (2018).

Reta: é um conjunto de pontos que não têm extremidades. Por um ponto podem passar infinitas retas. Dados dois pontos existe uma única reta que os contém.

Inserindo uma reta: acesse a ferramenta Reta, e clique em dois locais da Janela de Visualização.

Figura 27 – Inserindo uma reta

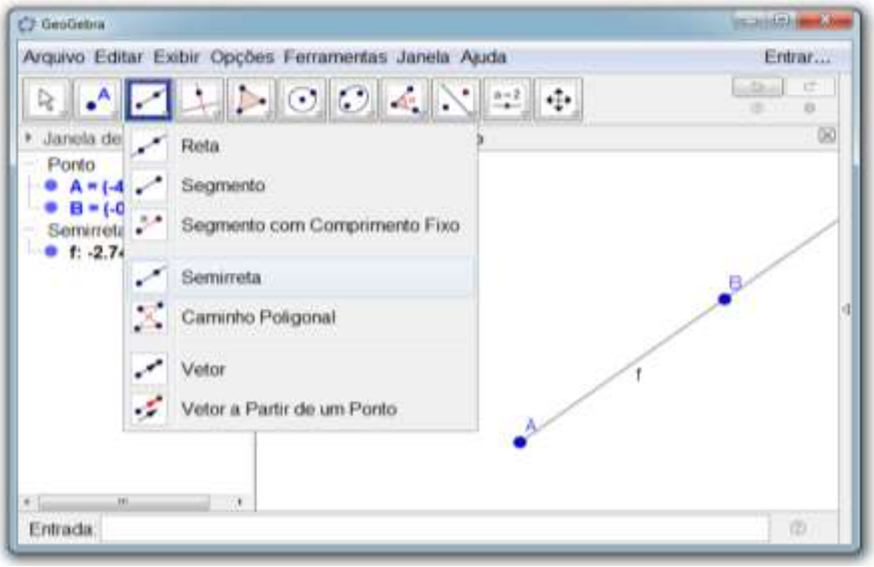


Fonte: elaboração da autora (2018).

Semirreta: é um conjunto de pontos que tem origem.

Inserindo uma semirreta: acesse a ferramenta Semirreta e clique em dois locais da janela de visualização.

Figura 28 – Inserindo uma semirreta

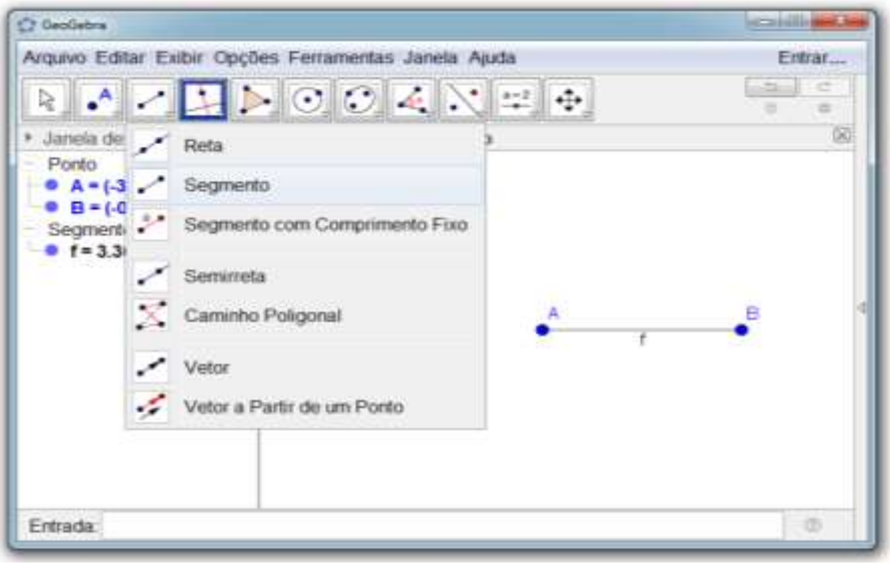


Fonte: elaboração da autora (2018).

Segmento de reta: é um conjunto de pontos que têm extremos, ou seja, tem início e fim.

Inserindo um segmento de reta: acesse a ferramenta Segmento e clique em dois locais da janela de visualização.

Figura 29 – Inserindo um segmento de reta

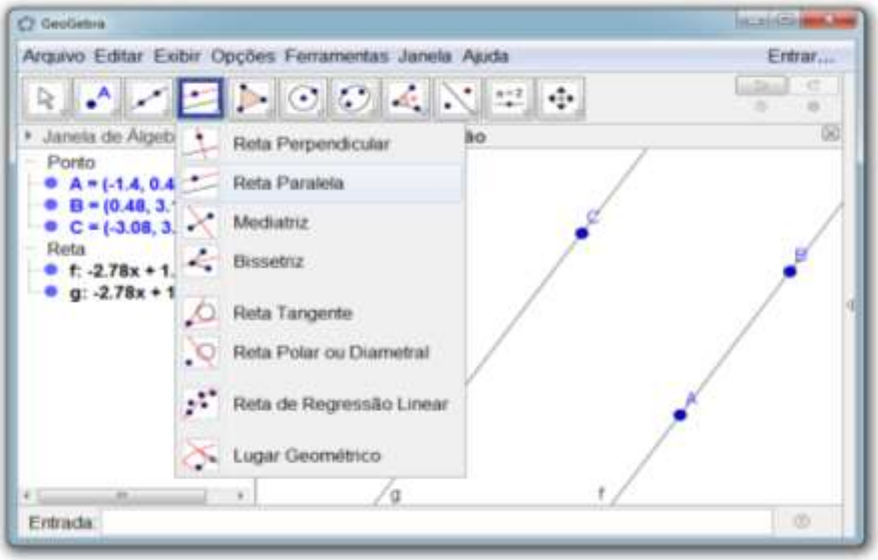


Fonte: elaboração da autora (2018).

Retas paralelas: são retas de um plano que não possuem ponto comum e apresentam a mesma distância em toda a extensão.

Inserindo uma reta paralela: acesse a ferramenta Reta e insira uma reta f, em seguida acesse a ferramenta Reta Paralela, insira primeiro o ponto C e, depois selecione a reta f.

Figura 30 – Inserindo uma reta paralela

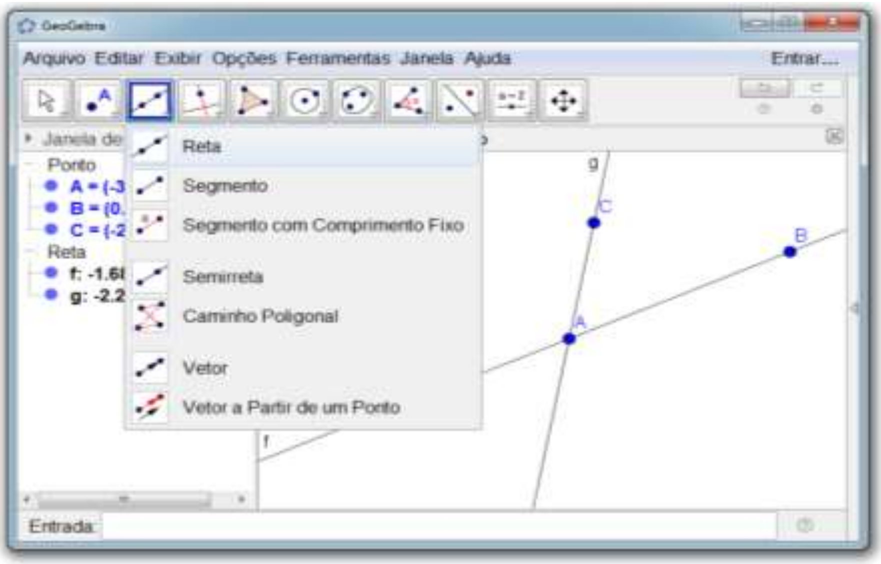


Fonte: elaboração da autora (2018).

Retas concorrentes possuem um ponto em comum.

Inserindo retas concorrentes: acesse a ferramenta Reta e insira uma reta f, selecione um ponto da reta f e insira uma reta g.

Figura 31 – Inserindo retas concorrentes

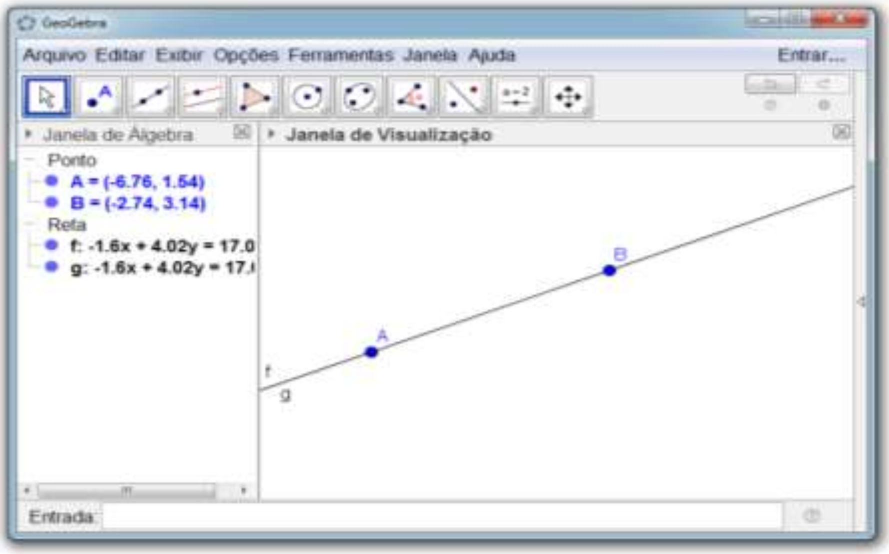


Fonte: elaboração da autora (2018).

Retas coincidentes são formadas pelos mesmos pontos.

Inserindo retas coincidentes: acesse a ferramenta Reta e insira uma reta f, selecione os pontos da reta f e insira uma reta g.

Figura 32 – Inserindo retas coincidentes

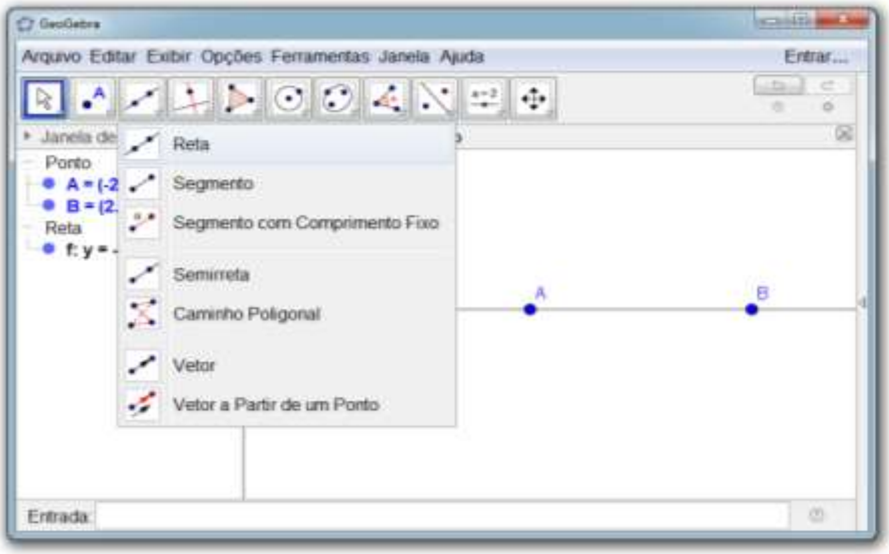


Fonte: elaboração da autora (2018).

Retas perpendiculares são retas concorrentes que formam um ângulo de 90º no ponto que concorrem.

Inserindo uma reta: acesse a ferramenta Reta e insira uma reta f**.**

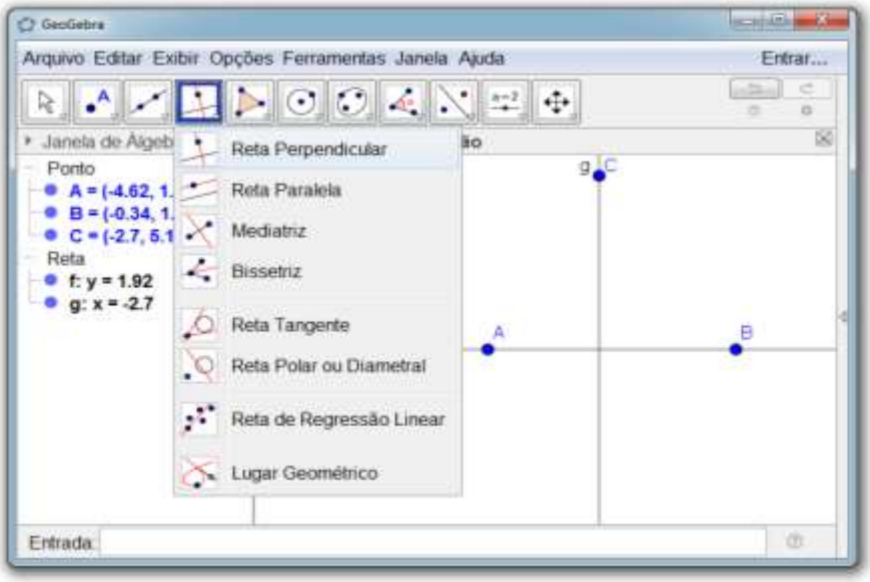
Figura 33 – Inserindo uma reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo uma reta perpendicular: acesse a ferramenta Reta Perpendicular, insira primeiro um ponto C e, depois selecione o segmento de reta AB.

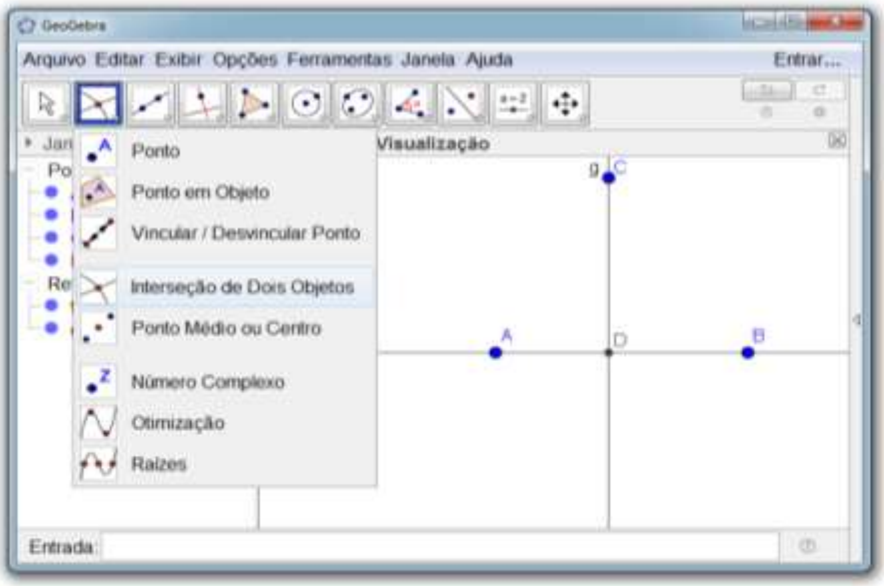
Figura 34 – Inserindo uma reta perpendicular



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um ponto na intersecção de duas retas: selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecione a reta f e g, respectivamente.

Figura 35 – Inserindo um ponto na intersecção de duas retas

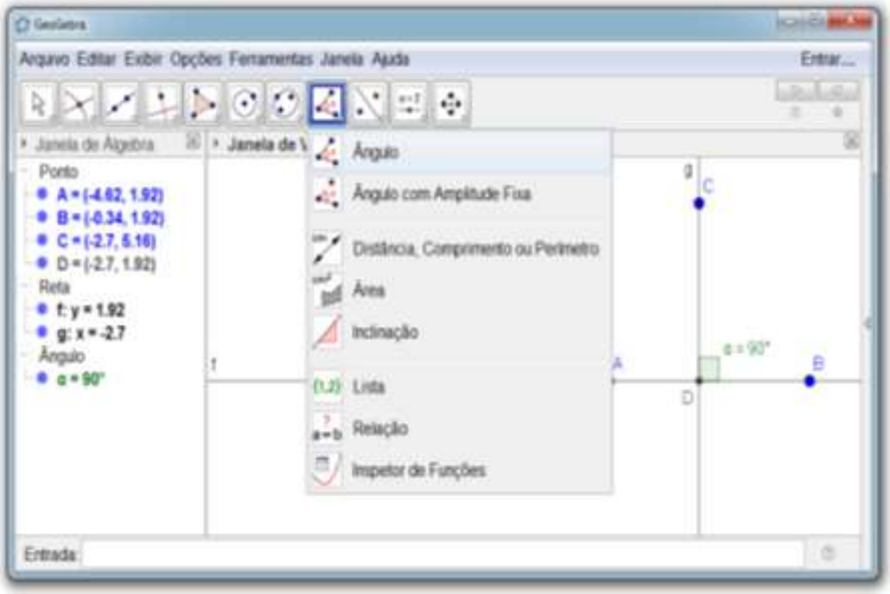


Fonte: elaboração da autora (2018).

Ângulos: Ângulo é a amplitude (medida) entre duas semirretas de mesma origem.

Determinando um ângulo: acesse a ferramenta Ângulo, selecione os pontos B, D e C, nessa ordem, ou selecione as retas f e g.

Figura 36 – Determinando um ângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

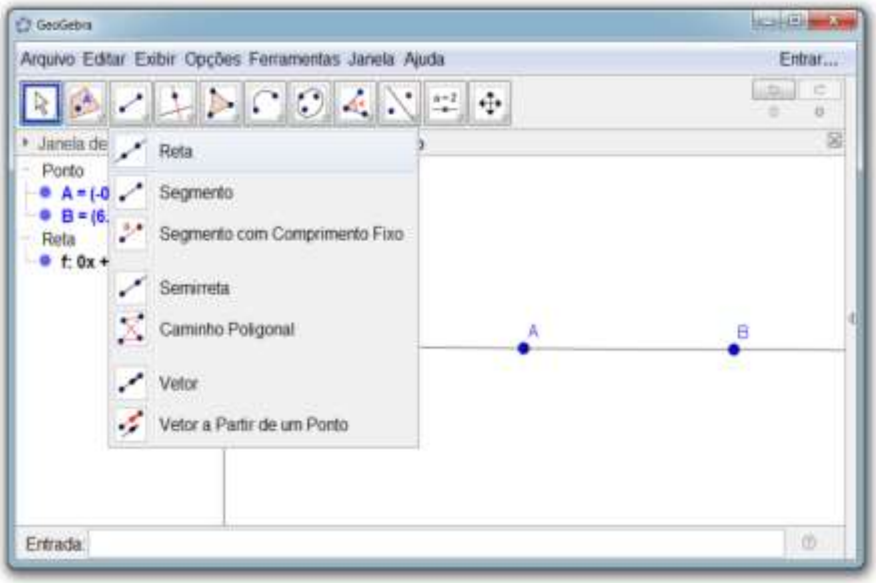
Concluídas as construções e investigações da reta, semirreta, segmento de reta, retas paralelas, retas concorrentes, retas coincidentes e retas perpendiculares, os alunos iniciaram investigações de ângulos. Antes das orientações para construção da figura geométrica proposta, o tutorial apresentou as seguintes informações:

Um ângulo com medida igual a 90º é chamado de ângulo reto. Um ângulo cuja medida está entre 0º e 90º é conhecido como ângulo agudo. Chama-se obtuso, o ângulo cuja medida está entre 90º e 180º. Um ângulo de 180º é chamado raso. Um ângulo nulo tem medida igual a 0º.

No que se refere a construção da figura geométrica as orientações são apresentadas a seguir.

Inserindo uma reta: selecione a ferramenta Reta e insira uma reta f.

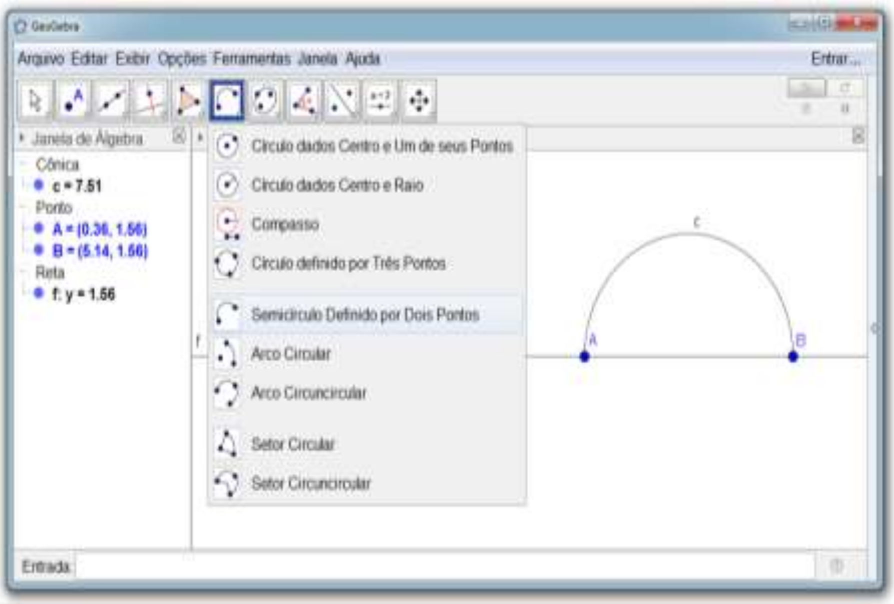
Figura 37 – Inserindo uma reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um semicírculo: acesse a ferramenta Semicírculo Definido por Dois Pontos, selecione os pontos A e B.

Figura 38 – Inserindo um semicírculo

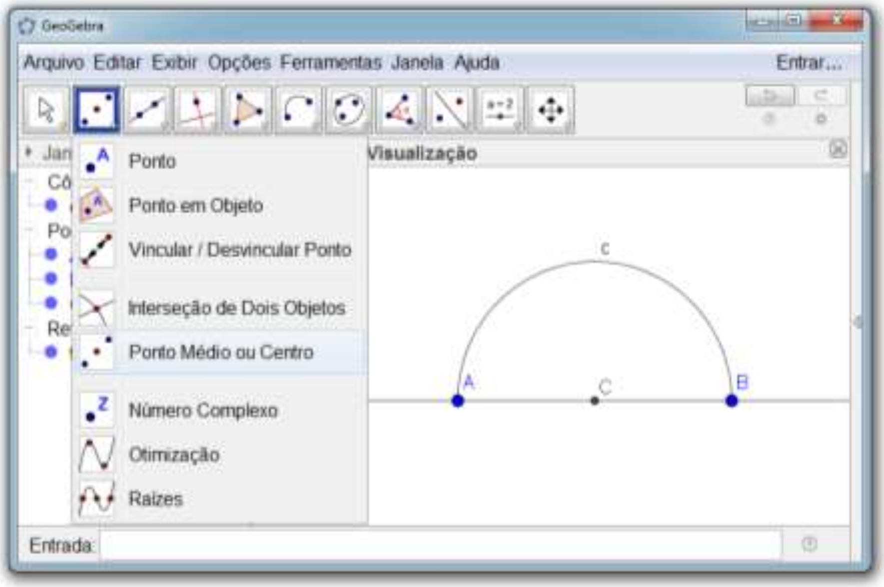


Fonte: elaboração da autora (2018).

Ponto médio: é um ponto que divide um segmento de reta em dois segmentos de mesma medida.

Inserindo um ponto médio: acesse a ferramenta Ponto Médio ou Centro, selecione os pontos A e B.

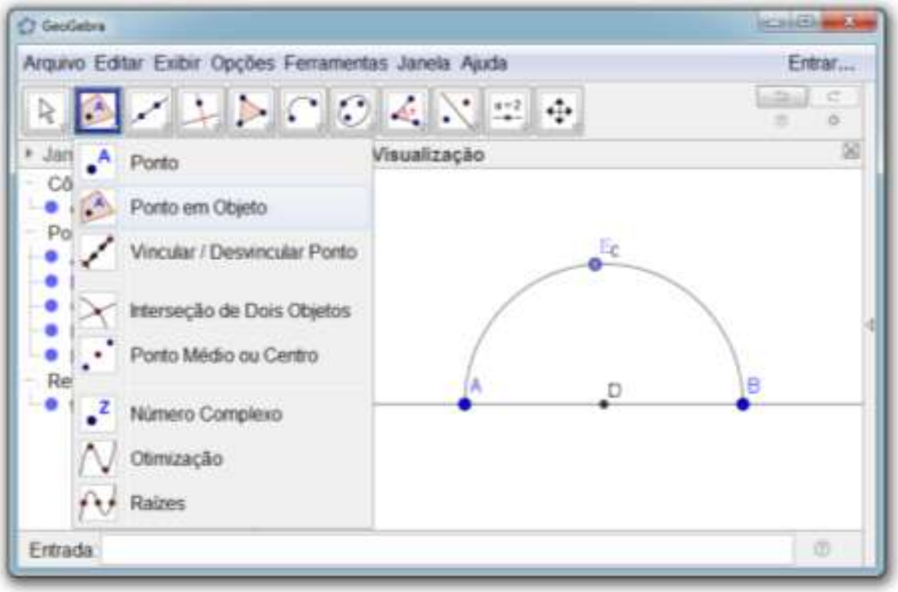
Figura 39 - Inserindo um ponto médio



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um ponto em objeto: acesse a ferramenta Ponto em Objeto e selecione o semicírculo.

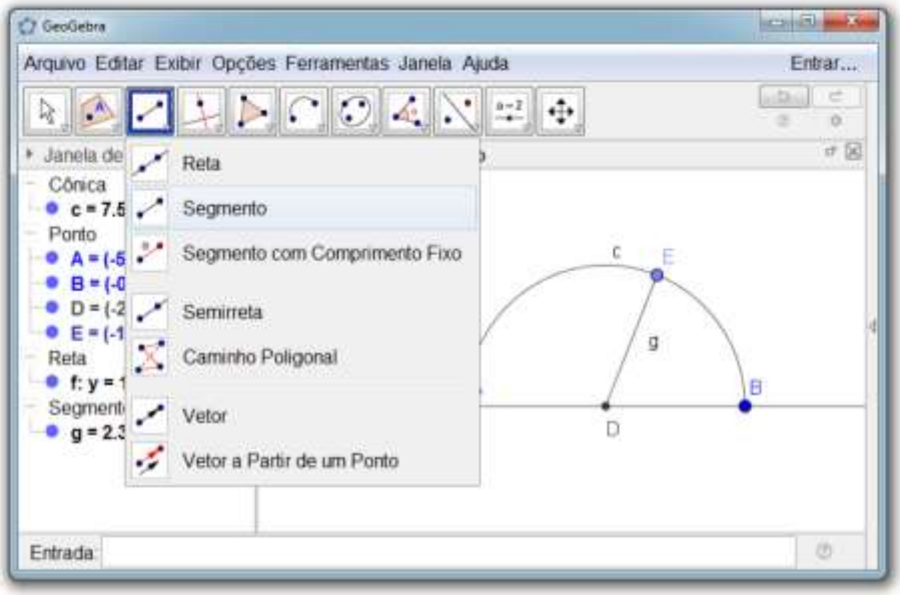
Figura 40 - Inserindo um ponto em objeto



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um segmento de reta: acesse a ferramenta Segmento, selecione o ponto D (ponto médio) e o ponto E (ponto do semicírculo).

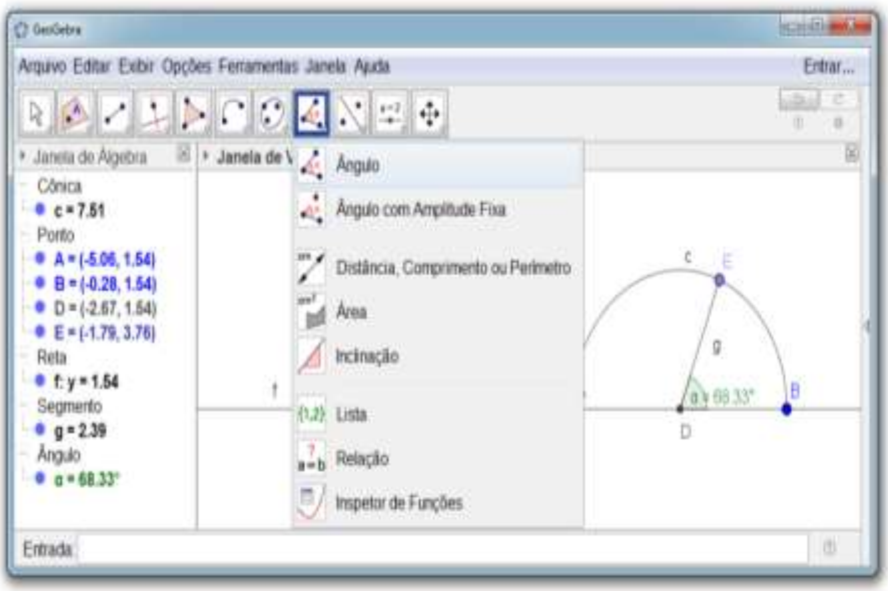
Figura 41 - Inserindo um segmento de reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando ângulos: selecione a ferramenta Ângulo, selecione os pontos B, D e E, em sentido horário.

Figura 42 - Determinando ângulos



Fonte: elaboração da autora (2018).

A maioria dos alunos apresentou facilidade ao construir a figura proposta. Já àqueles que apresentaram dificuldades foram mediados pela professora ou por colegas. A situação de mediação foi observada em vários momentos durante a realização desta atividade e de outras tarefas. Observou-se que os alunos que se dispunham a auxiliar os colegas que apresentavam dificuldades se mostravam motivados por construírem as próprias figuras e mediar às construções de outros alunos.

Pode-se afirmar que as situações de mediação contribuíram com o aprendizado dos alunos mediados, e com o desenvolvimento dos alunos mediadores. Do ponto de vista de Vygotsky (2007, p. 103) "aprendizado não é desenvolvimento; entretanto, o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer". Apesar do aprendizado não proporcionar de imediato o desenvolvimento, este resulta em zonas de desenvolvimento proximal que podem impulsionar o desenvolvimento (VYGOTSKY, 2007).

As atividades de estudo propostas durante a realização do experimento didático realizado tiveram o intuito de criar zonas de desenvolvimento proximal, ou seja, de despertar nos alunos capacidades de realizar tarefas com mediação.

Nesse prisma, no que tange à imitação, foi o método mais aplicado nas mediações, segundo Vygotsky (2007, p. 101), o sujeito ao imitar é capaz de realizar "ações que vão muito além dos limites de suas próprias capacidades". No decorrer do experimento didático-formativo de estudo de trigonometria no triângulo retângulo, o aluno mediador realizava ações que eram imitadas pelo aluno, o qual apresentava dificuldade, isso quando ambos utilizavam computadores próximos.

Entre os alunos, o aluno L foi o sujeito da pesquisa que mais ocupou o papel de mediador, além de auxiliar os alunos que ocupavam computadores próximos ao que estava usando. Esse aluno também se dirigia a colegas que se encontravam em outros locais do laboratório de informática, nesta situação de mediação, a imitação deu lugar à explicação.

De acordo com as observações realizadas, os alunos que conseguiam realizar a tarefa com a explicação do mediador apresentavam uma capacidade superior de aprendizagem em relação aos alunos que realizaram por meio da imitação.

Os níveis de capacidade de aprendizagem dos alunos eram distintos, assim para cada nível o tipo de mediação era diferente.

Assim, para alguns alunos, as orientações do tutorial eram suficientes para que conseguissem realizar a tarefa, para outros, a mediação da professora ou de outros alunos era necessária, pois precisavam de explicações mais detalhadas.

Nesse sentido, havia àqueles que só conseguiam realizar a tarefa por meio da imitação. Independe do nível de capacidade de aprendizagem dos alunos, ou do tipo de mediação, seja por meio da mediação das orientações das tarefas, da imitação ou das explicações do professor ou de colegas mais capazes.

Deve-se ressaltar, ademais, que o propósito da realização das atividades no decorrer do experimento didático-formativo era despertar zonas de desenvolvimento proximal que contribuíssem com o desenvolvimento de novas capacidades de aprendizagem nos sujeitos da pesquisa.

Conforme Vygotsky (2007, p. 98), a "zona de desenvolvimento proximal hoje será o nível de desenvolvimento real amanhã", portanto, um aluno que inicialmente consegue realizar uma ação com mediação poderá no futuro executar ações semelhantes de forma independente.

Desse modo, essa situação foi observada durante a realização do experimento didático-formativo. Os alunos, a princípio, conseguiam realizar ações somente com mediação, posteriormente, passaram a realizar ações semelhantes de forma autônoma.

Vygotsky (2007) leciona que o aprendizado e o desenvolvimento estão inter-relacionados, sendo assim, o aprendizado pode impulsionar o desenvolvimento, porém, "os processos de desenvolvimento não coincidem com os processos de aprendizado. Ou melhor, o processo de desenvolvimento progride de forma mais lenta e atrás do processo de aprendizado; desta sequenciação resulta, então, as zonas de desenvolvimento proximal". Então, no processo de aprendizagem, a capacidade de resolver tarefas com mediação pode ser considerada uma etapa do processo de desenvolvimento.

Segundo Vygotsky (2007, p. 103), "o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento e das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas", portando, "o aprendizado escolar produz algo fundamentalmente novo no desenvolvimento" (VYGOTSKY, 2007, p. 95).

No decorrer do experimento didático-formativo realizado, considerou-se o desenvolvimento do nível de capacidade de realizar as tarefas propostas, conforme apresentado no esquema[6] a seguir:

---

[6] Esquema elaborado pela autora (2018).

1º nível - O aluno não realiza a tarefa de forma independente

2º nível - O aluno realiza a tarefa com mediação
(mediação foi feita por imitação).
1ª Zona de desenvolvimento proximal
Processo de aprendizagem
Processo de desenvolvimento

3º nível - O aluno realiza a tarefa com mediação
(mediação foi feita por explicação).
2ª Zona de desenvolvimento proximal
Processo de aprendizagem
Processo de desenvolvimento

4º nível - O aluno realiza a tarefa com mediação
(mediação feita pelas orientações da tarefa).
3ª Zona de desenvolvimento proximal
Processo de aprendizagem
Processo de desenvolvimento

5º nível - O aluno realiza a tarefa de forma autônoma.
Zona de desenvolvimento real
Processo de aprendizagem
Processo de desenvolvimento

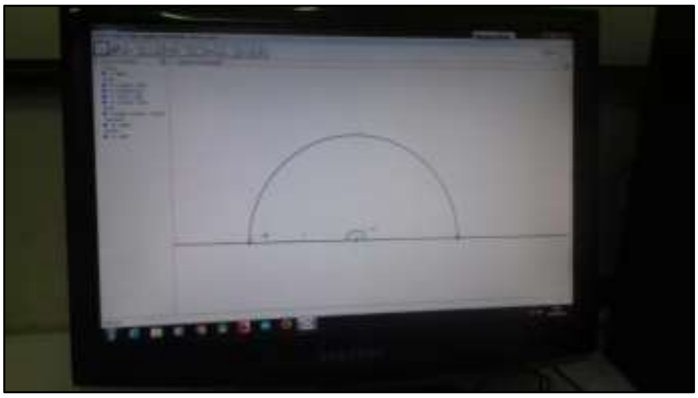
No esquema apresentado, considerou-se a realização de tarefas de construção de figuras geométricas, utilizando ferramentas do *software* Geogebra.

Na primeira etapa, apesar das orientações da tarefa, o aluno não consegue construir a figura. Já, na segunda etapa, constrói a figura com mediação, por meio da imitação. Na terceira etapa, não precisa mais imitar, pois constrói a figura, mediado pelas orientações do professor ou de outros alunos. A quarta etapa ressalta que o aluno consegue construir a figura, mediado pelas orientações da tarefa e, por fim, na 5ª etapa, constrói a figura de forma autônoma.

Essas etapas podem mudar dependendo do nível de desenvolvimento do aluno e do tipo de atividade a ser realizada, por exemplo, se um aluno consegue resolver de forma independente uma situação problema, seguindo as orientações de uma tarefa, pode-se considerar que ele está atuando no nível de desenvolvimento real, porque consegue realizar a tarefa sem a mediação do professor ou de outros alunos.

A Figura 43 exibe a construção feita pelo aluno P, seguindo as orientações do tutorial.

Figura 43 – Construção feita pelo aluno P



Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Concluída a construção da figura geométrica, os alunos investigaram e classificaram ângulos de diferentes medidas.

Dezesseis alunos realizaram a tarefa, destes três não classificaram corretamente todos os ângulos analisados. As anotações dos alunos foram analisadas e discutidas, posteriormente, assim os alunos puderam reclassificar os ângulos. No entanto, as tarefas apresentadas neste trabalho foram digitalizadas antes da reclassificação. As Figuras 44, 45 e 46 ilustram as anotações feitas pelos alunos D, L e F.

Figura 44 – Medidas e classificação de ângulos investigados pelo aluno D

10.8 Mova o ponto E, determine quatro ângulos de medidas diferentes, anote as medidas encontradas na tabela, e classifique os ângulos:

Ângulo	Medida do ângulo	Classificação do ângulo
01	59,56°	Agudo
02	85,81°	Agudo
03	14,04°	Agudo
04	173,99°	Obtuso

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Figura 45 – Medidas e classificação de ângulos investigados pelo aluno L

10.8 Mova o ponto E, determine quatro ângulos de medidas diferentes, anote as medidas encontradas na tabela, e classifique os ângulos:

Ângulo	Medida do ângulo	Classificação do ângulo
01	62,71°	agudo
02	128,23°	obtuso
03	180°	raso
04	90,6°	reto

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Figura 46 – Medidas e classificação de ângulos investigados pelo aluno F

10.8 Mova o ponto E, determine quatro ângulos de medidas diferentes, anote as medidas encontradas na tabela, e classifique os ângulos:

Ângulo	Medida do ângulo	Classificação do ângulo
01	68.57°	ângulo reto
02	159,48°	obtuso
03	132.23°	obtuso
04	90°	reto

Fonte: Dados da pesquisa (2018).

Em seguida, o tutorial apresentou o conceito de triângulos, classificando-os quanto aos lados e aos ângulos, conforme apresentado a seguir.

Triângulo é um polígono que possui três lados, três vértices e três ângulos. Os triângulos podem ser classificados de acordo com as medidas de seus lados ou de seus ângulos internos.

Classificação dos triângulos quanto aos lados: um triângulo em que os três lados são congruentes é chamado de triângulo equilátero. Isósceles é um triângulo que tem dois lados congruentes. Um triângulo escaleno tem os três lados com medidas diferentes.

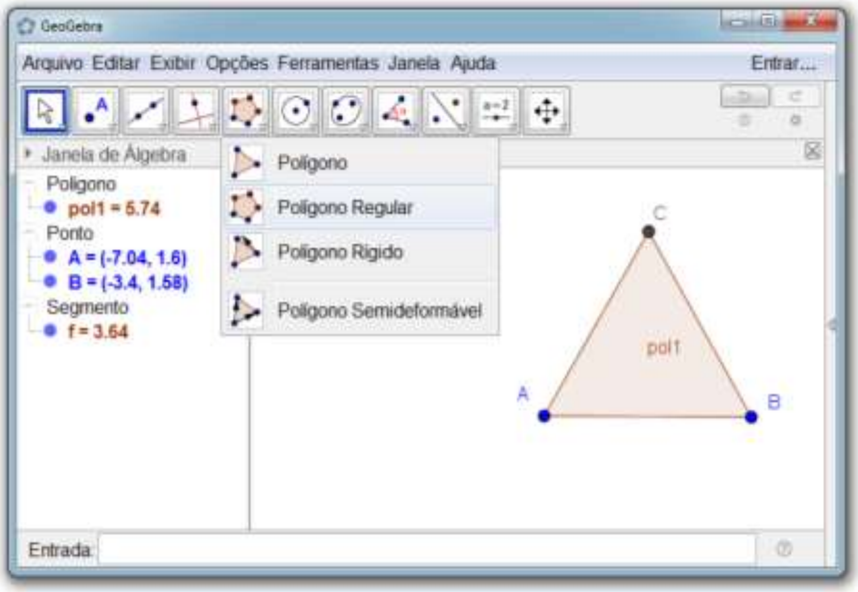
Classificação dos triângulos quanto aos ângulos: um triângulo que tem um ângulo interno reto é chamado retângulo. Um triângulo que tem os três ângulos internos agudos é chamado acutângulo. Obtusângulo é um triângulo que tem um ângulo interno obtuso.

Apresentadas as classificações dos triângulos, o tutorial propôs à construção e investigação de polígonos com três vértices, sendo um regular, outro com ângulo fixo e um terceiro com ângulo reto.

As Figuras 47, 48 e 49 apresentam as etapas de construção do primeiro triângulo.

Construindo um triângulo: acesse a ferramenta Polígono Regular, insira primeiro dois pontos, e depois, entre com o número de vértices.

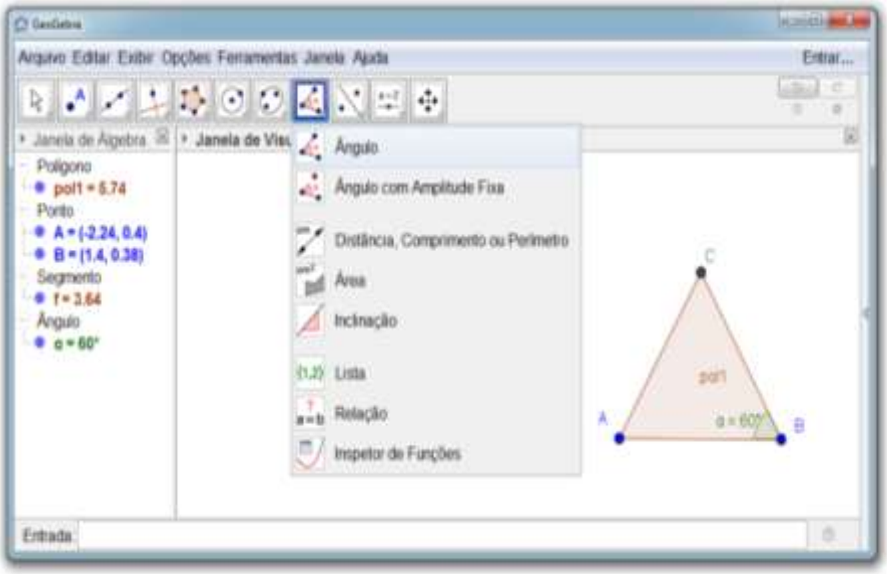
Figura 47 - Construindo um polígono regular com três vértices



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando os ângulos internos do triângulo: acesse a ferramenta Ângulo, selecione três pontos em sentido horário ou dois segmentos de reta. Determine os ângulos internos do triângulo ABC.

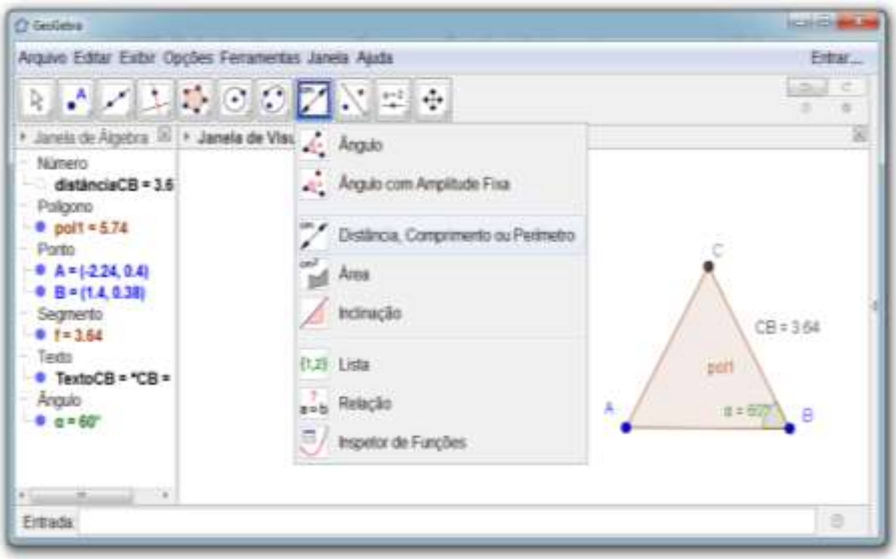
Figura 48 – Determinando os ângulos internos do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando a medida dos lados do triângulo: acesse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, selecione dois pontos ou um segmento de reta. Determine a medida de todos os lados do triângulo ABC.

Figura 49 – Determinando a medida dos lados do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

Após construir e determinar as medidas dos lados e ângulos internos do triângulo, os alunos investigaram e classificaram o triângulo construído. Nesta etapa, apenas dois alunos não classificaram corretamente o triângulo quanto aos ângulos. As Figuras 50 e 51 exibem as medidas, classificações e justificativas feitas pelos alunos B e O.

Figura 50 – Medidas, classificações e justificativas feitas pelo aluno B

11.1.3 Preencha a tabela com as medidas dos lados e ângulos do triângulo ABC.

Ângulo	Medida	Lado	Medida
$A\hat{B}C$	60°	AB	4,47
$B\hat{C}A$	60°	BC	4,47
$C\hat{A}B$	60°	AC	4,47

11.1.4 Classifique o triângulo ABC.

Triangulo ABC	Quanto aos lados	Quanto aos ângulos
Classificação	equilatero	acutângulo
Justifique a classificação	três lados são congruentes	três ângulos internos agudos.

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 51 – Medidas, classificações e justificativas feitas pelo aluno O

11.1.3 Preencha a tabela com as medidas dos lados e ângulos do triângulo ABC.

Ângulo	Medida	Lado	Medida
$A\hat{B}C$	60°	AB	5,51
$B\hat{C}A$	60°	BC	5,51
$C\hat{A}B$	60°	AC	5,51

11.1.4 Classifique o triângulo ABC.

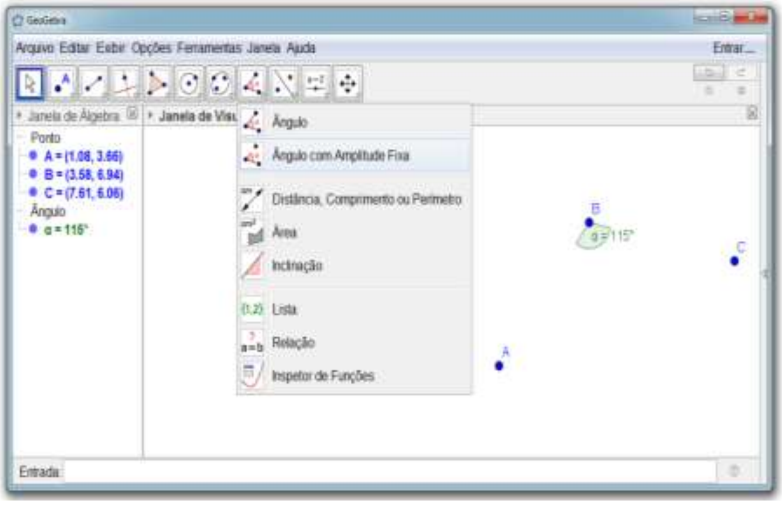
Triangulo ABC	Quanto aos lados	Quanto aos ângulos
Classificação	Equilatero	acutângulo
Justifique a classificação	os três lados são congruente	os três ângulo são agudos

Fonte: dados da pesquisa (2018).

As Figuras 52 e 53 mostram as instruções para construção de um triângulo com ângulo fixo. Nesta etapa da tarefa, os alunos apresentaram mais dificuldades, comparando com a construção do triângulo anterior, contudo com a mediação da professora e de colegas todos conseguiram construir o triângulo.

Construindo um triângulo com ângulo fixo: acesse a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa, selecione um ponto, um vértice e uma amplitude para o ângulo.

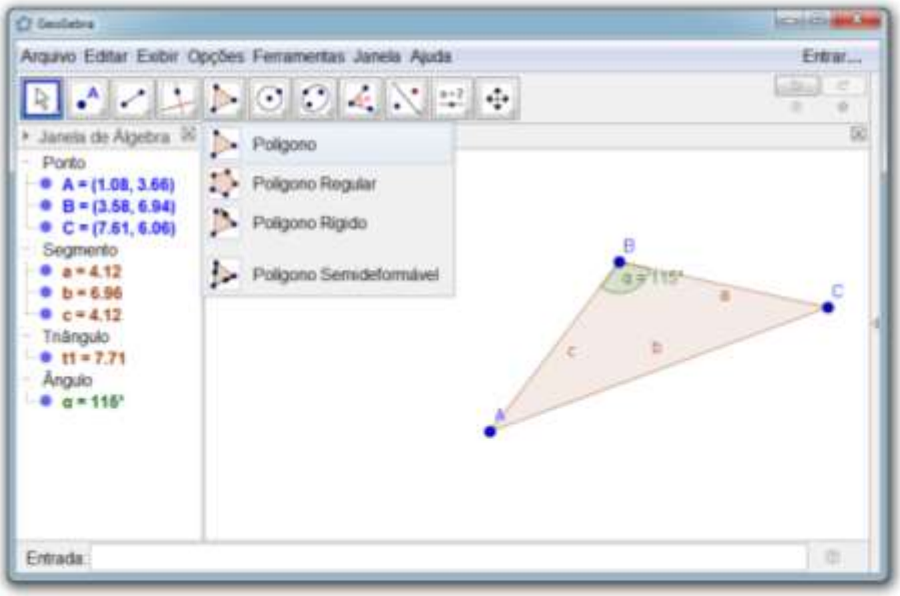
Figura 52 – Construindo um triângulo com ângulo fixo – 1ª etapa



Fonte: elaboração da autora (2018)

Acesse a ferramenta Polígono, selecione os vértices A, B e C, então, o vértice A novamente.

Figura 53 – Construindo um triângulo com ângulo fixo – 2ª etapa

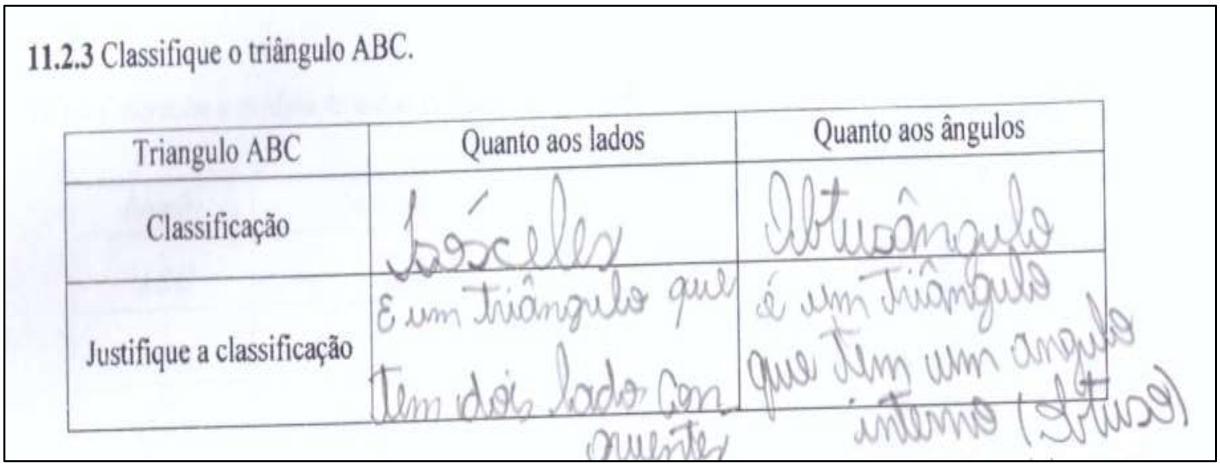


Fonte: elaboração da autora (2018).

Concluídas as construções e medições, os alunos iniciaram investigações na tentativa de classificar o triângulo quanto aos lados e ângulos. Três alunos classificaram o triângulo como escaleno. O aluno Q não classificou o triângulo quanto aos ângulos, mas justificou que era um triângulo obtusângulo, porque tinha um ângulo maior. Três alunos classificaram o triângulo como obtuso. Oito alunos qualificaram o triângulo como isósceles e obtusângulo, e justificaram corretamente as respostas.

As Figuras 54, 55 e 56 descrevem as classificações e justificativas dos alunos P, L e O.

Figura 54 – Classificações e justificativas feitas pelo aluno P

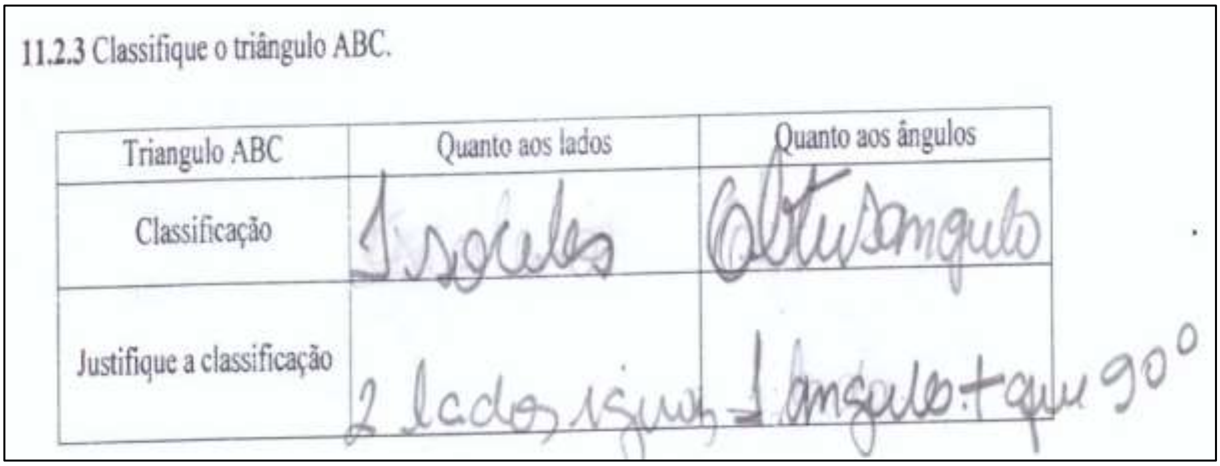


11.2.3 Classifique o triângulo ABC.

Triangulo ABC	Quanto aos lados	Quanto aos ângulos
Classificação	Isóscelis	Obtusângulo
Justifique a classificação	É um triângulo que tem dois lados congruentes	é um triângulo que tem um ângulo interno (obtuso)

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 55 – Classificações e justificativas feitas pelo aluno L



11.2.3 Classifique o triângulo ABC.

Triangulo ABC	Quanto aos lados	Quanto aos ângulos
Classificação	Isoceles	Obtusângulo
Justifique a classificação	2 lados iguais	1 ângulo + que 90°

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 56 – Classificações e justificativas feitas pelo aluno Q

11.2.3 Classifique o triângulo ABC.

Triangulo ABC	Quanto aos lados	Quanto aos ângulos
Classificação	Isoceles	obtusângulo
Justifique a classificação	Pq tem 2 lados iguais e um diferente	Pq Tem um ângulo obtuso

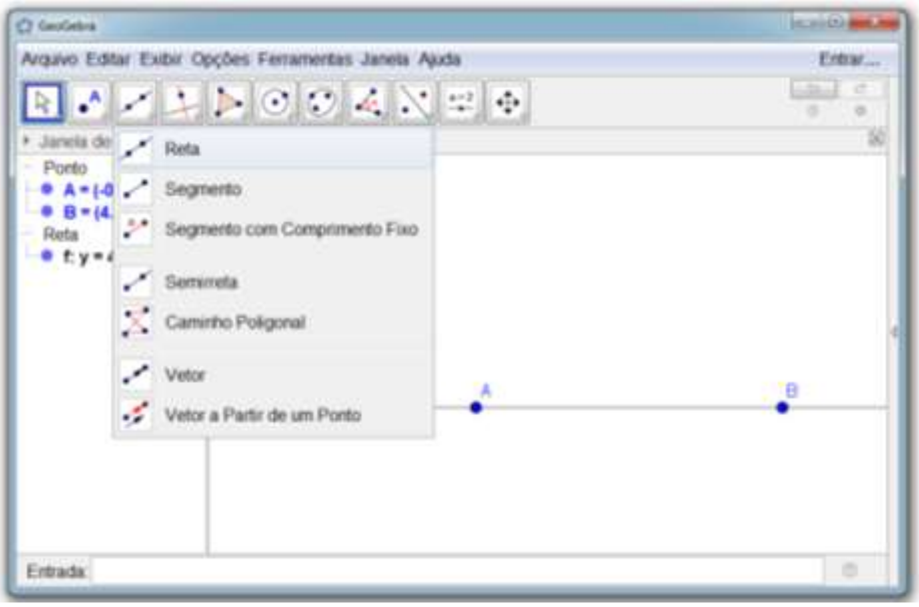
Fonte: dados da pesquisa (2018).

Concluídas as investigações do segundo triângulo, os alunos iniciaram a construção do terceiro triângulo, conforme instruções apresentadas nas Figuras 57, 58, 59, 60 e 61 a seguir.

Construindo um triângulo a partir de três pontos:

Inserindo uma reta: acesse a ferramenta Reta, e clique em dois locais da Janela de Visualização.

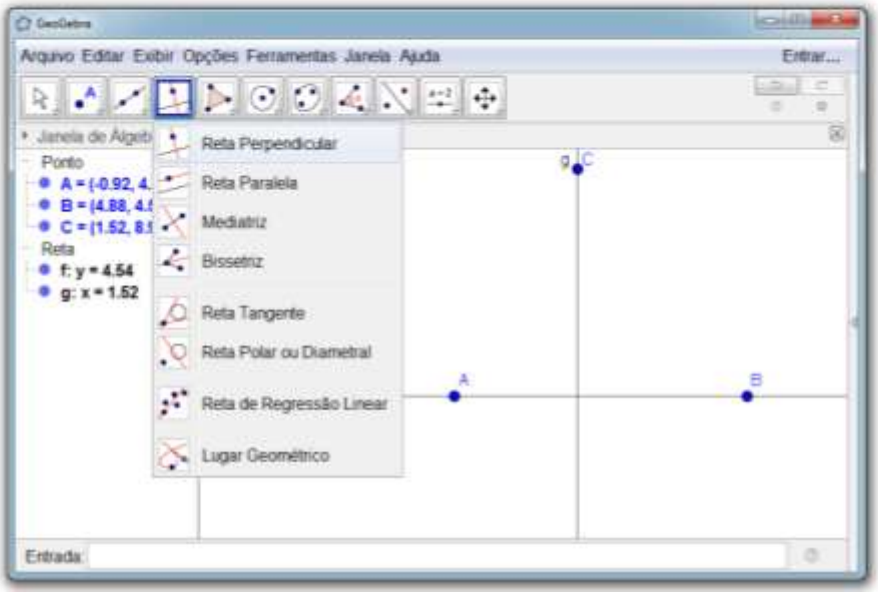
Figura 57 – Inserindo uma reta AB



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo uma reta perpendicular: acesse a ferramenta Reta Perpendicular, insira um ponto C e depois selecione o segmento de reta AB.

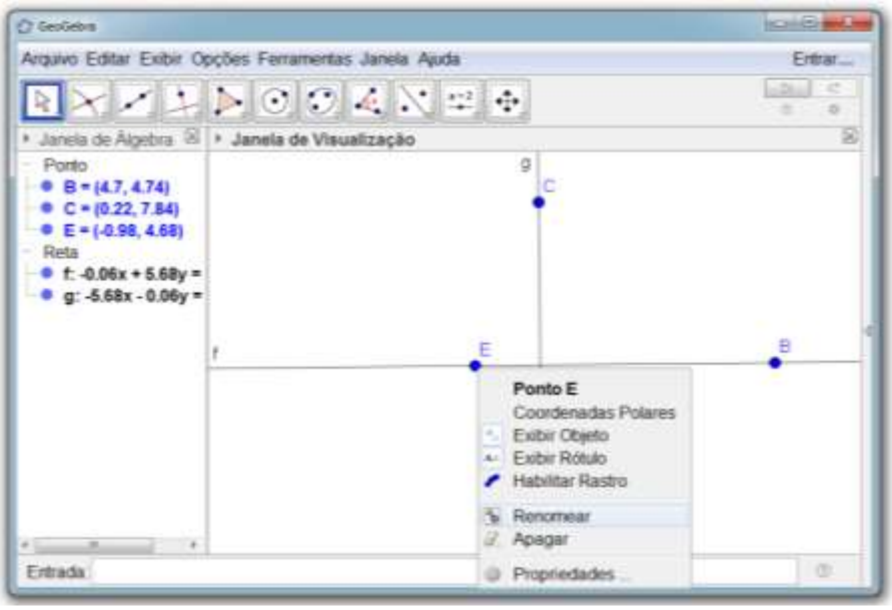
Figura 58 – Inserindo uma reta perpendicular



Fonte: elaboração da autora (2018).

Renomeando o ponto A: selecione o ponto A com o botão direito do mouse, acesse a ferramenta renomear e altere o rótulo para E.

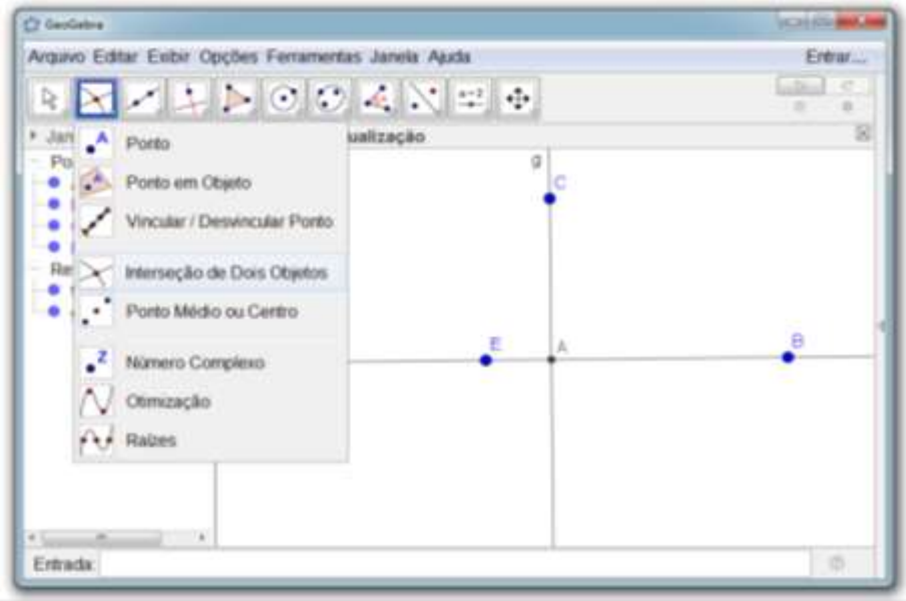
Figura 59 – Renomeando o ponto A



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserido um ponto de interseção: acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecione as retas f e g.

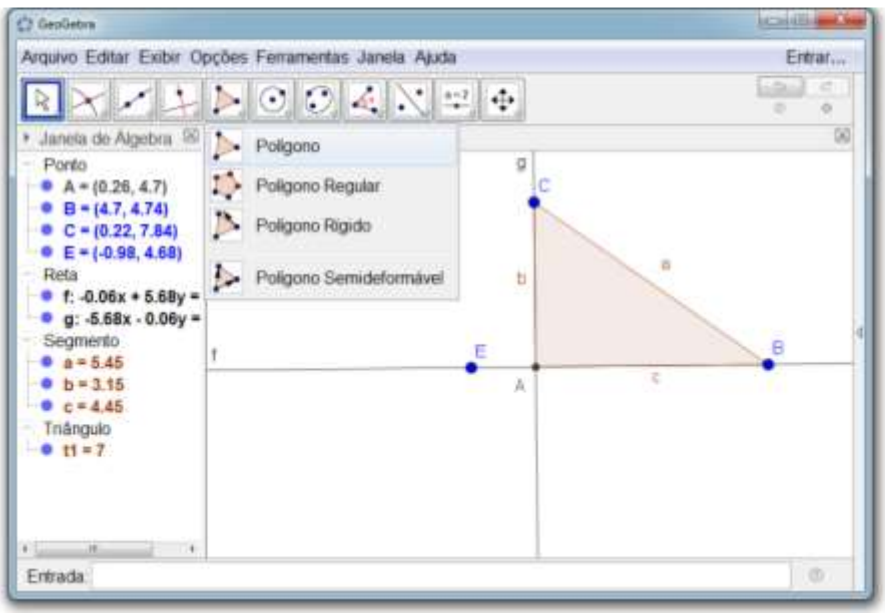
Figura 60 – Inserido um ponto de interseção



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um polígono: acesse a ferramenta Polígono, selecione os pontos A, B e C, e então, o ponto A novamente.

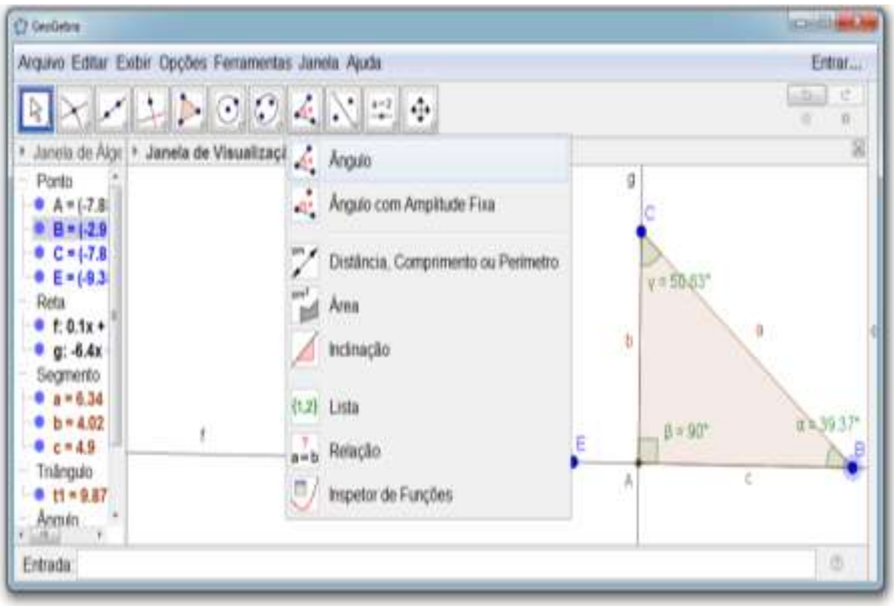
Figura 61 – Inserindo um polígono



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando a amplitude (medida) dos ângulos internos do triângulo: acesse a ferramenta Ângulo, selecione os pontos BAC, nessa ordem, em seguida repita o procedimento para os pontos ACB, e CBA.

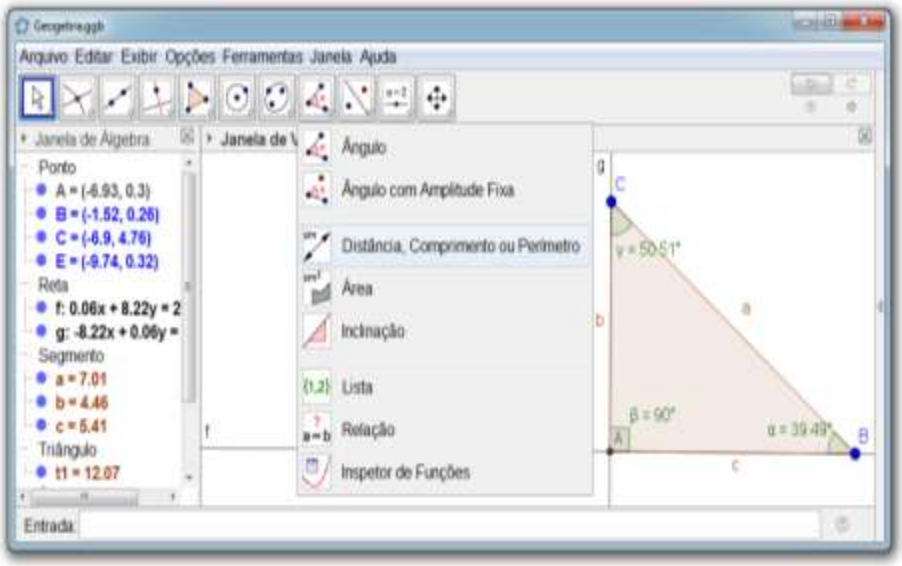
Figura 62 - Determinando a amplitude dos ângulos internos do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando a medida dos lados do triângulo: acesse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, selecione dois pontos ou um segmento de reta. Determine a medida de todos os lados do triângulo ABC.

Figura 63 - Determinando a medida dos lados do triângulo

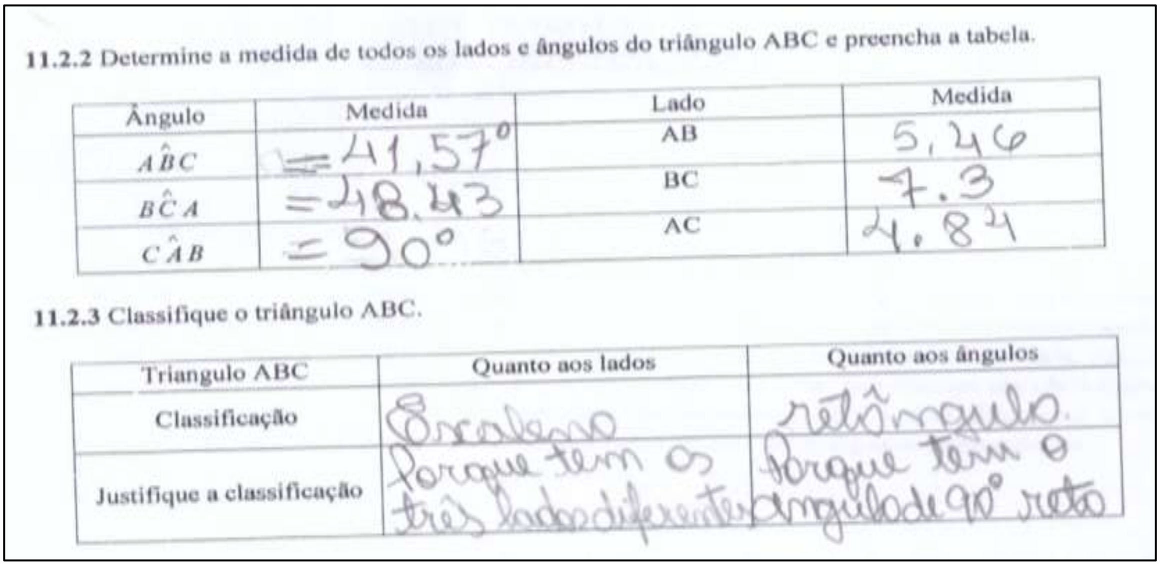


Fonte: elaboração da autora (2018).

Construído o triângulo e determinada a amplitude dos ângulos e às medidas dos lados, os alunos preencheram as tabelas como proposto na tarefa. Seis alunos classificaram e justificaram corretamente o triângulo quanto aos lados e ângulos. Três alunos informaram que quanto aos lados tratava-se de um triângulo isósceles, um classificou como equilátero. Quanto aos ângulos, dois alunos consideraram como acutângulo, e três informaram que o triângulo investigado era obtusângulo.

As Figuras 64, 65 e 66 descrevem os dados informados pelos alunos B, L e P.

Figura 64 – Medidas, classificações e justificativas feitas pelo aluno B



11.2.2 Determine a medida de todos os lados e ângulos do triângulo ABC e preencha a tabela.

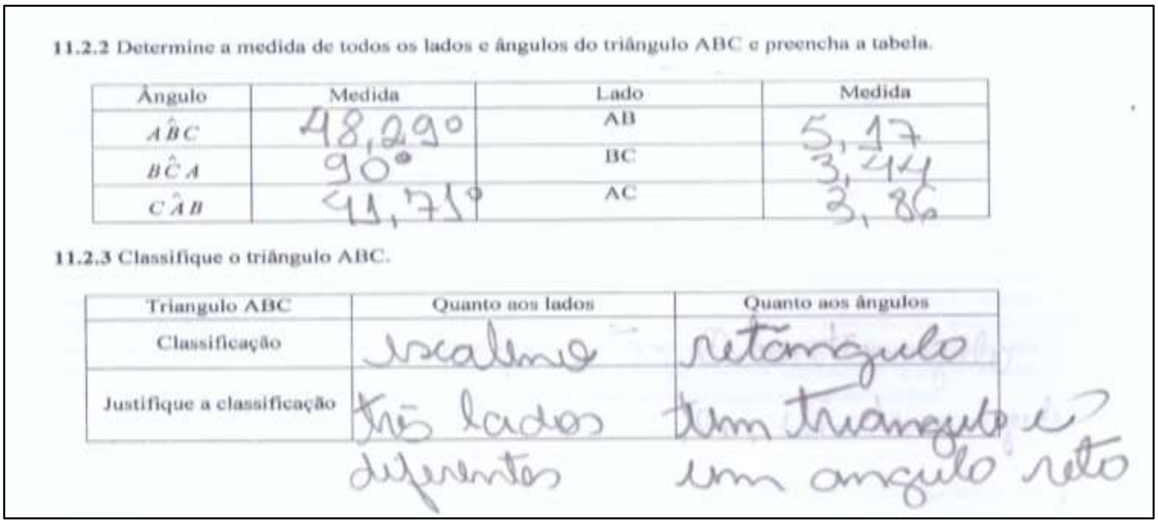
Ângulo	Medida	Lado	Medida
$A\hat{B}C$	=41,57°	AB	5,46
$B\hat{C}A$	=48.43	BC	7.3
$C\hat{A}B$	=90°	AC	4.84

11.2.3 Classifique o triângulo ABC.

Triangulo ABC	Quanto aos lados	Quanto aos ângulos
Classificação	Escaleno	retângulo
Justifique a classificação	Porque tem os três lados diferentes	Porque tem o angulo de 90° reto

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 65 – Medidas, classificações e justificativas feitas pelo aluno L



11.2.2 Determine a medida de todos os lados e ângulos do triângulo ABC e preencha a tabela.

Ângulo	Medida	Lado	Medida
$A\hat{B}C$	48,29°	AB	5,17
$B\hat{C}A$	90°	BC	3,44
$C\hat{A}B$	41,71°	AC	3,86

11.2.3 Classifique o triângulo ABC.

Triangulo ABC	Quanto aos lados	Quanto aos ângulos
Classificação	escaleno	retângulo
Justifique a classificação	três lados diferentes	tem triangulo e um angulo reto

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 66 – Medidas, classificações e justificativas feitas pelo aluno P

11.2.2 Determine a medida de todos os lados e ângulos do triângulo ABC e preencha a tabela.

Ângulo	Medida	Lado	Medida
$A\hat{B}C$	42.57°	AB	8.75
$B\hat{C}A$	47.43°	BC	11.88
$C\hat{A}B$	90°	AC	8.09

11.2.3 Classifique o triângulo ABC.

Triangulo ABC	Quanto aos lados	Quanto aos ângulos
Classificação	Escaleno	retângulo
Justifique a classificação	Porque tem três lados de medidas diferente	Porque tem um ângulo interno reto.

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Apesar das dificuldades apresentadas durante a construção das figuras e de alguns alunos não terem classificado corretamente ângulos e triângulos, pode-se afirmar que a realização das ações propostas no tutorial foram fundamentais para o reconhecimento das ferramentas do *software* Geogebra e apropriação dos conceitos de retas, ângulos e triângulos.

Concluídas as investigações e preenchidas as tabelas, na aula 18, foram exibidas construções das figuras no tutorial como realizados diálogos a respeito das atividades propostas. Deste modo, os alunos investigaram novamente os triângulos quanto aos lados e ângulos, o que possibilitou a correção das classificações.

5.4 Tarefa 1: investigando ângulos internos de um triângulo

A tarefa de investigação de ângulos internos de um triângulo foi proposta no decorrer das aulas 19, 20, 21 e 22, conforme planejamento apresentado no Quadro 5. Durante as aulas foram propostas investigações matemáticas com o intuito de experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar quando possível.

> Experimentar aqui significa que podemos usar o software, juntamente com o aluno para que ele mesmo faça suas experiências, movimente os objetos matemáticos, perceba as relações entre eles, compare álgebra e geometria, enfim, interaja com o objeto do saber. Conjecturar significa que depois de perceber as relações oriundas da experimentação é possível vislumbrar propriedades, relações, resultados gerais importantes para o bom desenvolvimento do ensino da Matemática. Uma vez feita à conjectura, o aluno pode enunciá-la como um resultado que pode ser verdadeiro ou falso.

> Formalizar seria então a demonstração propriamente dita, ou evidenciar uma contra-proposição da conjectura levantada com um argumento pedagógico compatível à série que se está trabalhando. Generalizar é o importante nível, pois após realizar os três níveis de construção de conhecimento é a hora de generalizar o resultado, ou seja, investigar outras situações e podendo até achar algumas situações particulares e por fim explorar o resultado obtido (VAZ; JESUS, 2014, p. 64).

Compete relembrar que as atividades realizadas no decorrer do experimento didático-formativo foram propostas com o intuito de despertar, nos sujeitos da pesquisa, zonas de desenvolvimento proximal, ou seja, capacidades de realizar tarefas sob a orientação da professora ou em colaboração com colegas de classe mais capazes.

Segundo Vygotsky (2007, p. 98), a "zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário". Portanto, ao considerar a zona de desenvolvimento proximal, o professor poderá visualizar o futuro imediato do desenvolvimento, pois aquilo que o aluno pode fazer com mediação hoje, ele será capaz de amanhã fazer sozinho.

Quadro 5 – Planejamento da primeira tarefa

Tarefa 01 – Investigando ângulos internos de um triângulo	
Data:	12/04/2018
Carga horária	4 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Ângulos internos de um triângulo retângulo.
Objeto Geral	Reconhecer um triângulo como retângulo.
Recursos	Tarefa de estudo e *Software* Geogebra.
Procedimentos	Construir um triângulo a partir das instruções da tarefa. Determinar as medidas dos ângulos internos do triângulo. Investigar as relações existentes entre os ângulos internos do triângulo.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: Plano de ensino (2018) (Apêndice A).

Dos dezesseis alunos na turma, doze realizaram a tarefa, três faltaram às aulas, e um ausentou-se do laboratório de informática no decorrer da 22ª aula sem concluí-la, para resolver problemas pessoais.

Inicialmente, a tarefa apresentou o seguinte texto:

Todo triângulo que tem um ângulo reto e dois ângulos agudos é chamado triângulo retângulo, sendo a soma das medidas de seus ângulos internos igual a 180º e a soma dos agudos igual a 90º. Logo, os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

O triângulo retângulo permitiu que civilizações antigas calculassem distâncias e alturas consideradas impossíveis de medir.

De acordo com Andrini e Vasconcellos (2012, p. 182), “os antigos egípcios usavam um triângulo com lados de medidas 3, 4 e 5 unidades para determinar um ângulo reto”, o que permitiu um alto grau de precisão na construção de pirâmides.

Deve-se ressaltar que no decorrer da tarefa, embora informações apresentadas, no tocante aos ângulos internos de um triângulo retângulo, a maioria dos alunos não recorreu ao texto ao realizar as investigações e responder as questões.

Essa situação foi observada no decorrer da realização da maioria das tarefas que apresentavam informações referentes às figuras geométricas a serem investigadas.

Nesse sentido, é provável que essa atitude dos alunos seja o resultado de métodos de ensino-aprendizagem em que o professor responde aos questionamentos dos alunos em vez de propor consultas ao material de estudo.

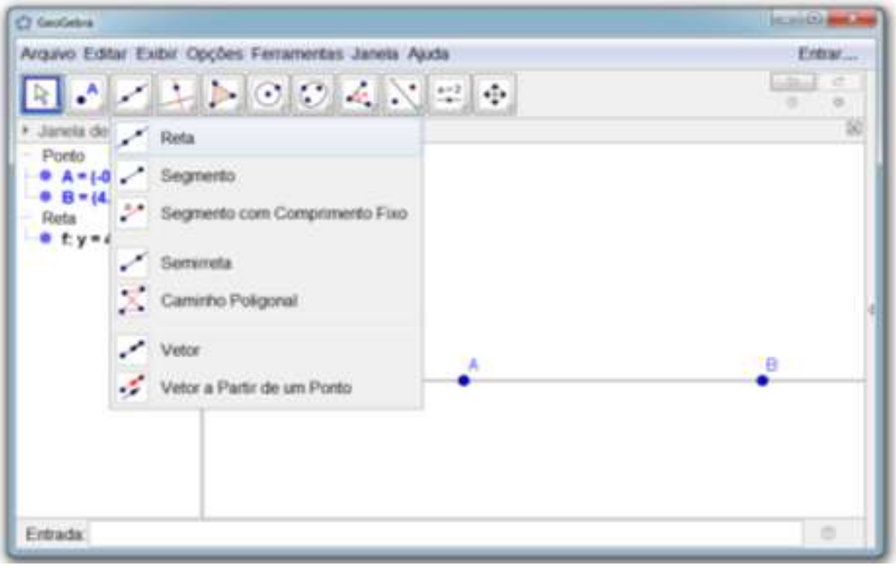
Pode-se afirmar que inicialmente, a rejeição de consultas aos textos apresentados nas tarefas foi um dos problemas evidenciados no experimento didático-formativo. Os alunos não consultaram os textos apresentados nas tarefas para obter informações.

Os diálogos e as mediações propostas no decorrer do experimento didático-formativo contribuíram com a mudança de postura dos alunos. Em muitos momentos, os próprios alunos orientavam os colegas a lerem os textos que encontrariam as respostas.

As Figuras 67, 68, 69, 70, 71 e 72 ilustram as instruções da tarefa para construção do triângulo a ser investigado.

Inserindo uma reta: acesse a ferramenta Reta, clique em dois locais da Janela de Visualização.

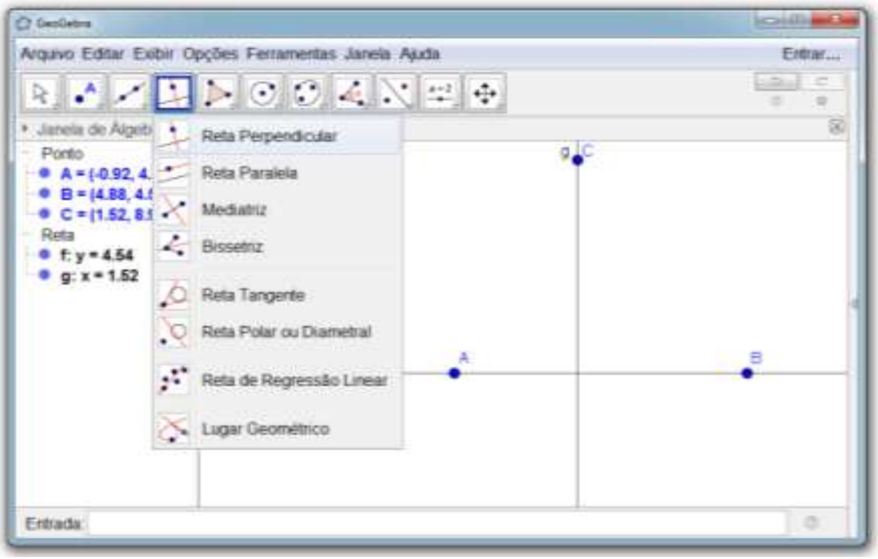
Figura 67 – Inserindo uma reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo uma reta perpendicular: acesse a ferramenta Reta Perpendicular, selecione um ponto C e depois o segmento de reta AB.

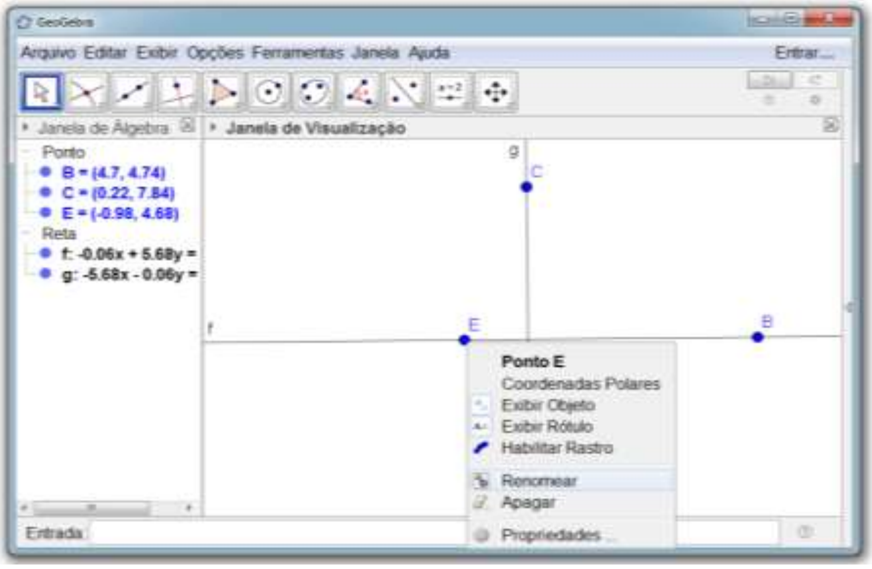
Figura 68 – Inserindo uma reta perpendicular



Fonte: elaboração da autora (2018).

Renomeando o ponto A: selecione o ponto A com o botão direito do *mouse*, acesse a ferramenta renomear e altere seu rótulo para E.

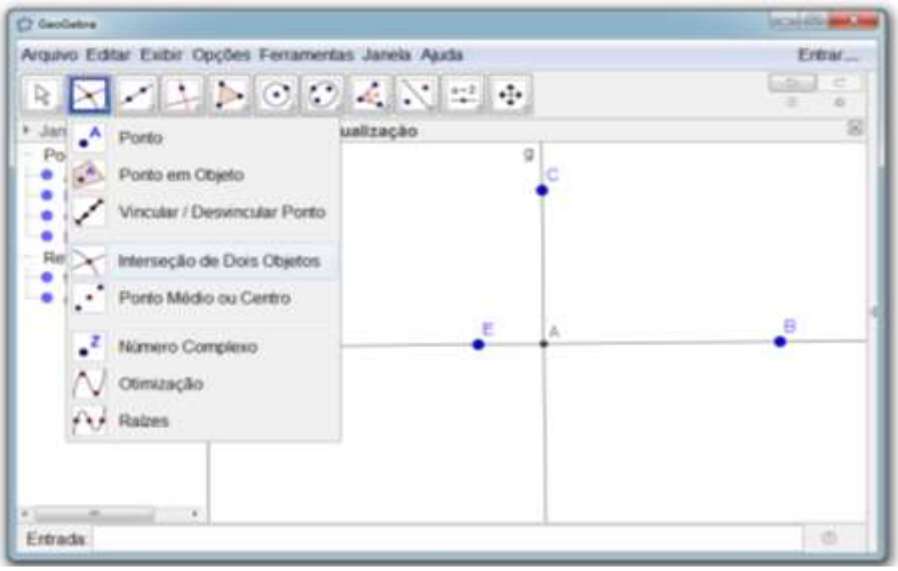
Figura 69 – Renomeando o ponto A



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um ponto fixo na interseção das retas f e g: acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecione as retas f e g para inserir o ponto A.

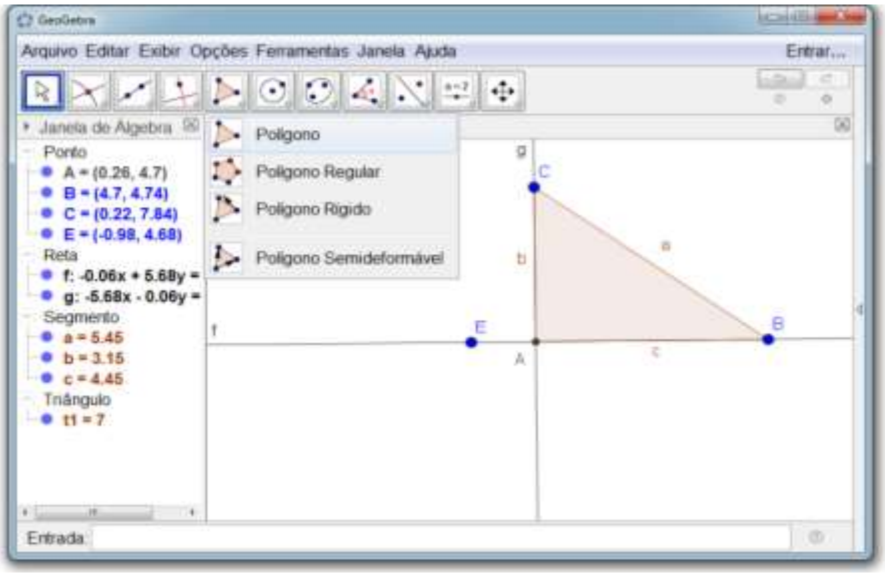
Figura 70 – Inserindo um ponto fixo na interseção das retas f e g



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um polígono: acesse a ferramenta Polígono, selecione os pontos A, B e C, nessa sequência, e depois o ponto A, novamente.

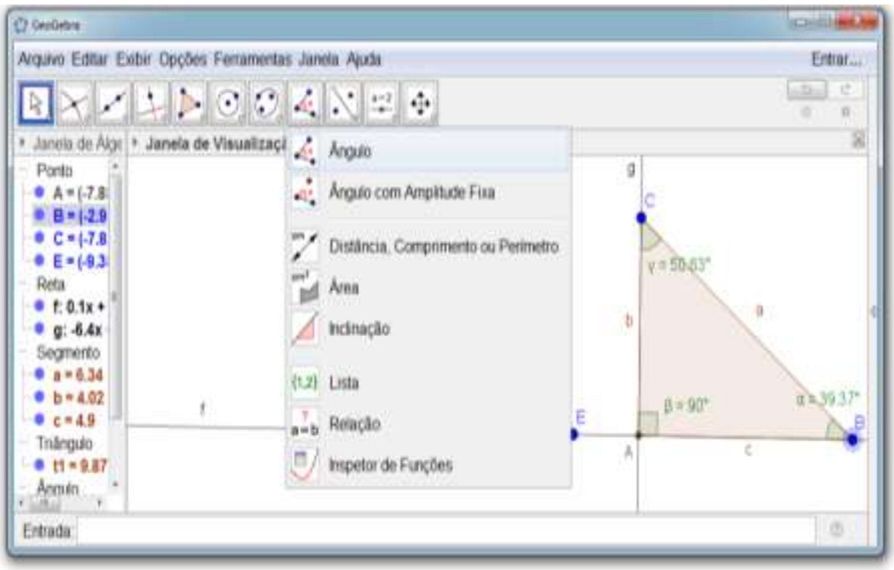
Figura 71 – Inserindo um polígono



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando a amplitude (medida) dos ângulos internos do triângulo: acesse a ferramenta Ângulo, selecione os pontos BAC, nessa ordem, em seguida, repita o procedimento para os pontos ACB, e CBA.

Figura 72 – Determinando a amplitude dos ângulos internos do triângulo

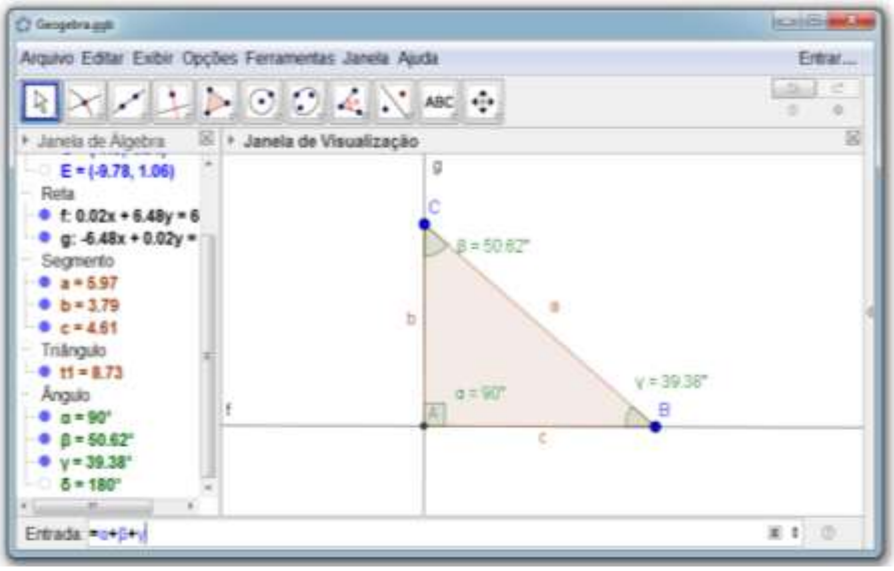


Fonte: elaboração da autora (2018).

Construído o triângulo e determinadas às amplitudes dos ângulos internos, os alunos seguindo as orientações da tarefa, e mediados pela professora, inseriram fórmulas e textos, consoante as Figuras 73, 74 e 75.

Inserindo a fórmula α + β + y: na caixa de entrada digite = α + β + y e tecle enter.

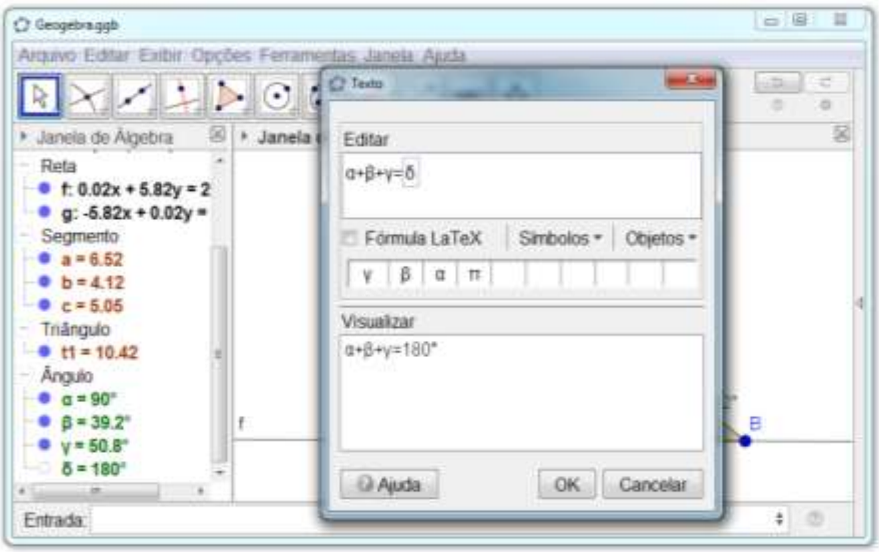
Figura 73 - Inserindo a fórmula α + β + y



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo o texto α + β + y = *δ*: acesse a ferramenta Texto e digite α + β + y =, em seguida, selecione opção Objetos, o símbolo *δ* e clique em OK.

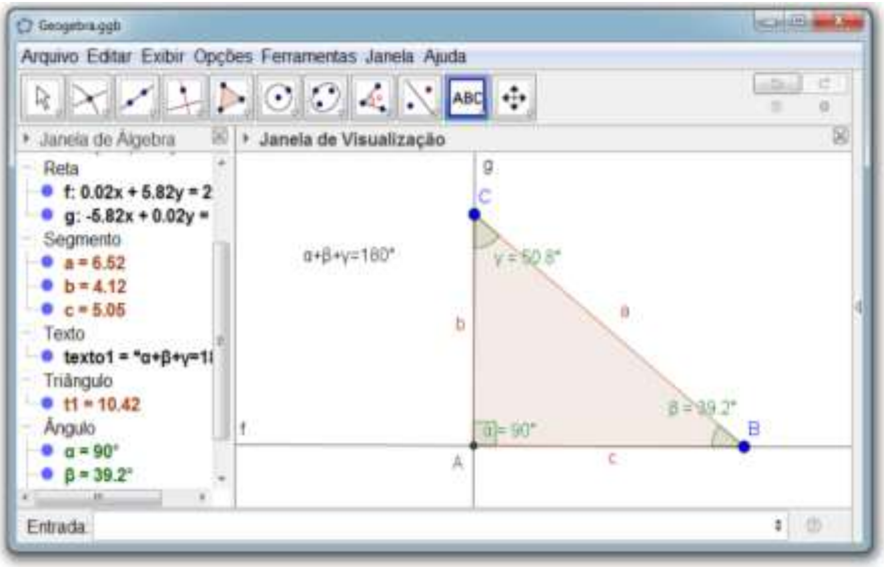
Figura 74 – Inserindo o texto α + β + y = *δ*



Fonte: elaboração da autora (2018).

Observe que na Janela de Visualização aparece o texto α + β + y = 180º.

Figura 75 - Visualização do texto α + β + y = 180º



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inseridas as fórmulas e os textos, os alunos iniciaram investigações com o intuito de responder as questões da tarefa. A primeira ação proposta foi: mova o ponto C, aumentando e diminuído o tamanho do triângulo ABC. Após realizar o movimento, os alunos tentaram responder à pergunta: O que acontece com a soma dos ângulos α, β e y? A seguir são apresentadas as respostas dos alunos para a questão[7]:

Aluno O: *Não acontece nada com a soma dos ângulos, permanece a mesma. Observa-se que movendo os pontos não muda a soma dos ângulos.*

Aluno P: *Os ângulos BC mudam de valores mais somando os dois a resposta é sempre 90 e somando os três ângulos a resposta é 180.*

Aluno F: *O ângulo de 90° continua o mesmo, enquanto os outros mudam de valores.*

Aluno C: *A medida continua a mesma por que a soma de um triângulo sempre é a mesma.*

Aluno J: *Não acontece nada a medida continua a mesma.*

Aluno M: *É que mesmo que você mova a seta a medida não vai mudar.*

Aluno G: *Os ângulos de 90° graus não se move os lados muda os valores.*

Aluno H: *Que o ângulo de 90° não muda de valor, enquanto o ponto C e B muda de valores.*

Aluno A: *O ângulo não muda de tamanho, e os ângulos C e B muda o tamanho.*

---

[7] As respostas foram transcritas, literalmente, das tarefas dos alunos.

Aluno L: *O ângulo não muda de tamanho só os ângulos B e C que muda de tamanho.*

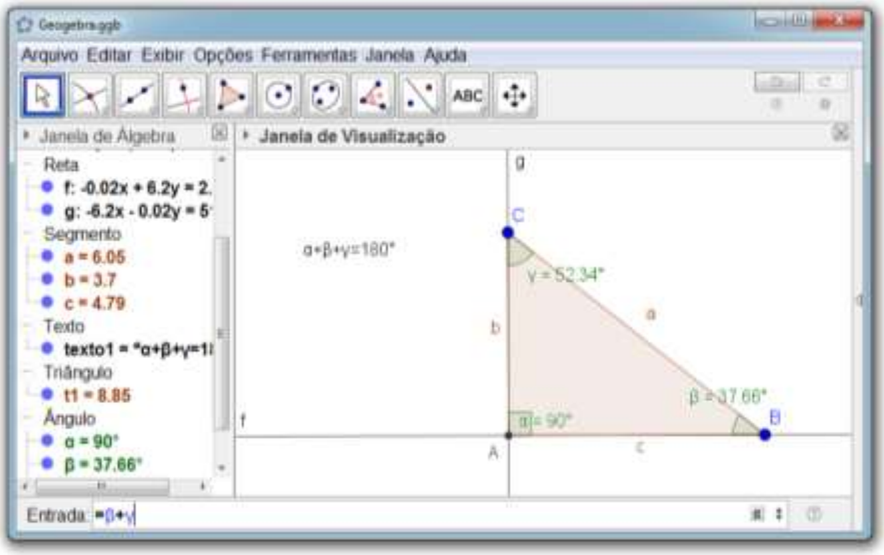
Aluno B: *Dá a mesma medida.*

Aluno D: *Â ângulo não muda de tamanho, e os ângulos C e B mudam de tamanho.*

Concluídas as investigações, e respondida à pergunta, os alunos realizaram as próximas etapas da atividade de estudo, seguindo as orientações da tarefa, de acordo com as Figuras 76 e 77.

Inserindo a fórmula β + y: na caixa de entrada digite = β + y e tecle enter.

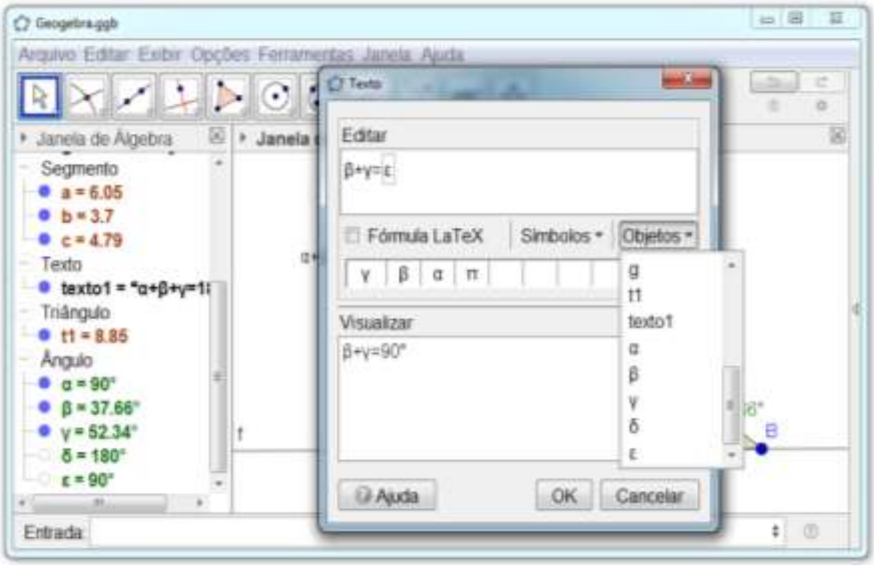
Figura 76 – Inserindo a fórmula β + y



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo o texto β + y = ε: acesse a ferramenta Texto e digite β + y =, em seguida, selecione opção Objetos, o símbolo ε e clique OK.

Figura 77 – Inserindo o texto β + y = ε



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserida a fórmula e o texto, os alunos continuaram as investigações, moveram os pontos B e C, aumentando e diminuindo o tamanho do triângulo e responderam as seguintes perguntas: o que acontece com soma dos ângulos β e y? Que relação pode ser observada a partir dessa investigação? A seguir são apresentadas as respostas dos alunos[8].

Aluno O: *Movendo os pontos B e C a soma de B e y permanece o mesmo resultado não havendo alteração.*

Aluno P: *A soma de BC será sempre 90º porque o triângulo é um triângulo retângulo.*

Aluno F: *Que os ângulos mudam de valor menos o de 90º.*

Aluno C: *O ângulo C e B muda já o ângulo de 90º não muda.*

Aluno J: *Mesmo movendo o ângulo continua o 90°.*

Aluno M: *Os ângulos se move mas a soma das medidas será sempre 90° graus.*

Aluno G: *O ângulo de 90º grau não se modifica, fica o mesmo valor.*

Aluno H: *O ângulo de 90° não muda de valor. Somente o C e B.*

Aluno A: *Os ângulos B e y a soma muda e o ângulo "A" continua o mesmo.*

Aluno L: *A soma de B e C muda mas o ângulo de 90° continua o mesmo.*

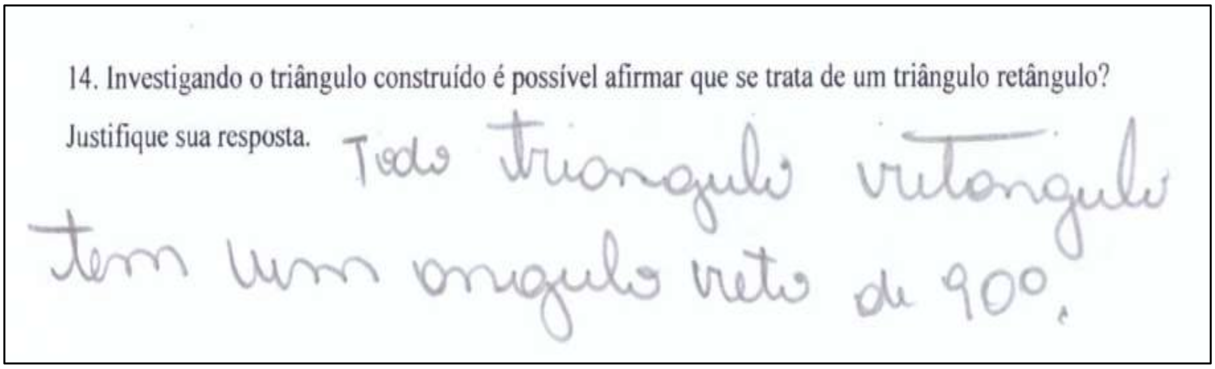
Aluno B: *Continua a mesma.*

Aluno D: *As somas dos ângulos B e y mudam, e o ângulo A continua o mesmo.*

[8] As respostas foram transcritas, literalmente, das tarefas dos alunos.

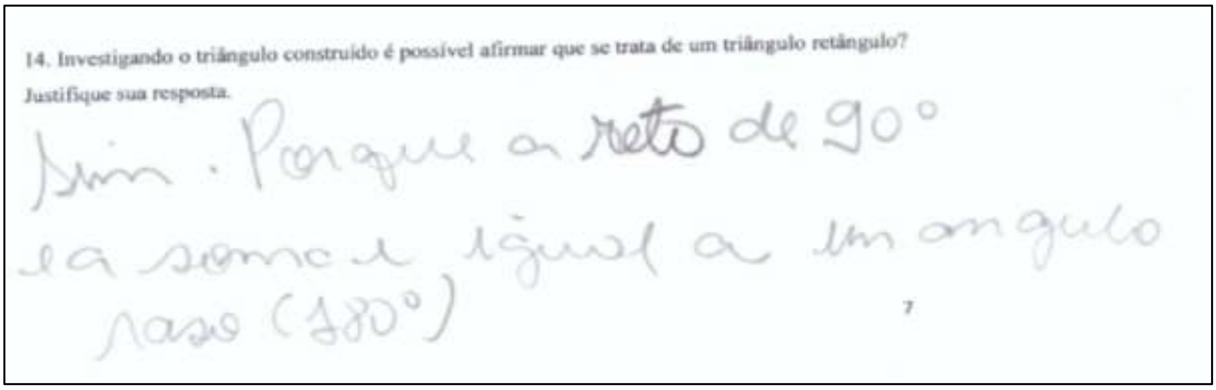
A terceira e última pergunta da tarefa questionou: Investigando o triângulo construído é possível afirmar que se trata de um triângulo retângulo? Justifique sua resposta. Analisando as respostas dos alunos, foi possível verificar que o objetivo da atividade de estudo foi alcançado, pois os alunos reconheceram o triângulo como sendo retângulo. As Figuras 78, 79, 80, 81 e 82 ilustram as respostas e justificativas de cinco alunos.

Figura 78 – Terceira questão respondida pelo aluno H


14. Investigando o triângulo construído é possível afirmar que se trata de um triângulo retângulo?
Justifique sua resposta. Todo triangulo retangulo tem um angulo reto de 90°.

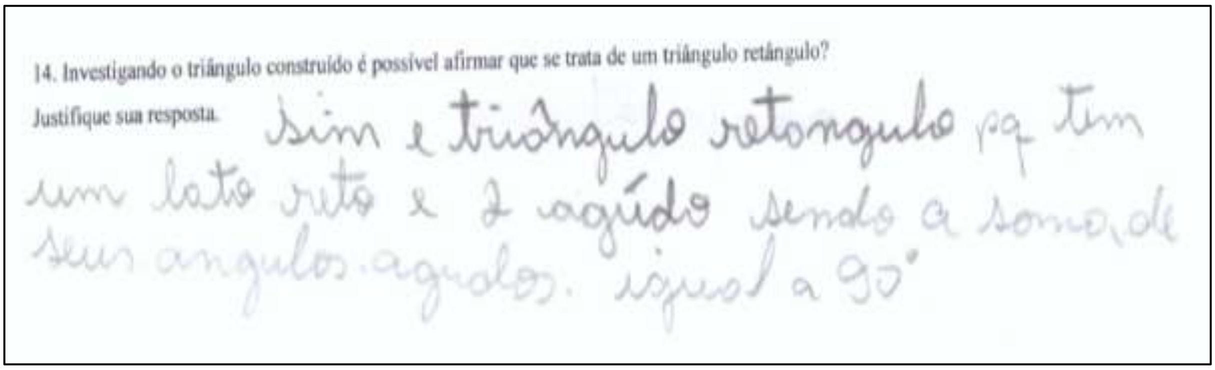
Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 79 – Terceira questão respondida pelo aluno L


14. Investigando o triângulo construído é possível afirmar que se trata de um triângulo retângulo?
Justifique sua resposta. Sim. Porque a reto de 90° e a soma é igual a um angulo raso (180°)

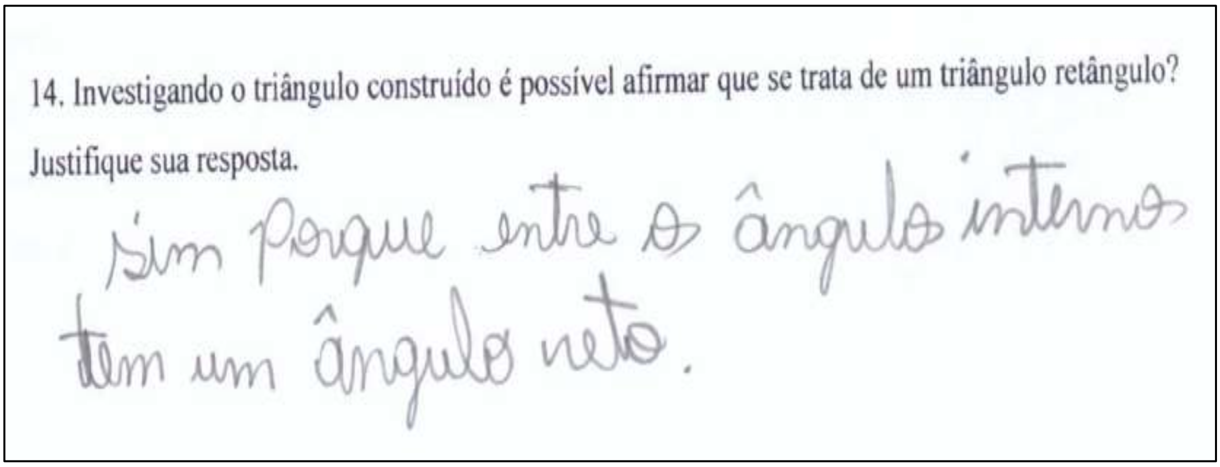
Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 80 – Terceira questão respondida pelo aluno O


14. Investigando o triângulo construído é possível afirmar que se trata de um triângulo retângulo?
Justifique sua resposta. Sim e triângulo retangulo pq tem um lato reto e 2 agúdo sendo a soma de seus angulos. agudos. igual a 90°

Fonte: elaboração da autora (2018).

Figura 81 – Terceira questão respondida pelo aluno P

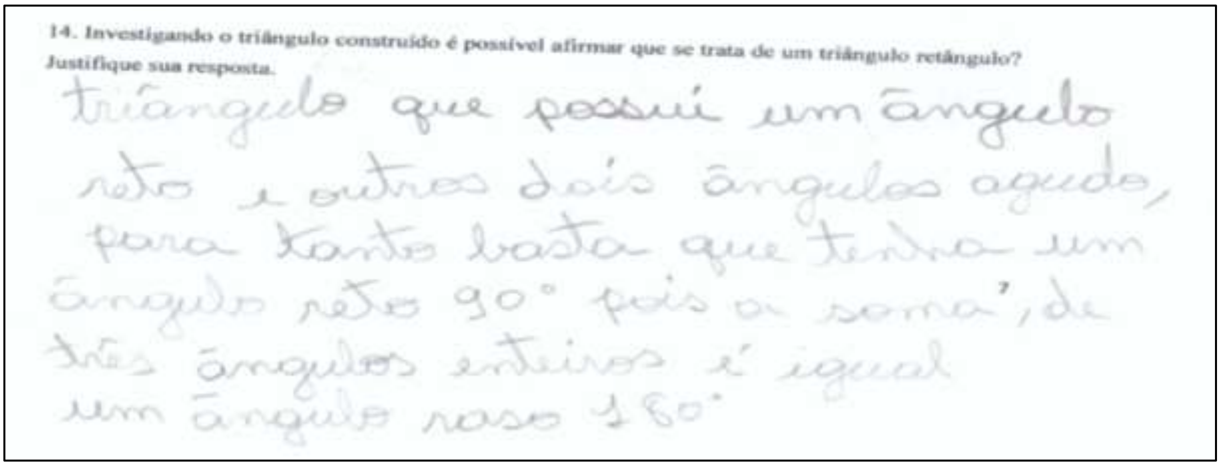


14. Investigando o triângulo construído é possível afirmar que se trata de um triângulo retângulo? Justifique sua resposta.

Sim Porque entre os ângulos internos tem um ângulo reto.

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 82 – Terceira questão respondida pelo aluno C



14. Investigando o triângulo construído é possível afirmar que se trata de um triângulo retângulo? Justifique sua resposta.

triângulo que possui um ângulo reto e outros dois ângulos agudo, para tanto basta que tenha um ângulo reto 90° pois a soma, de três ângulos enteiros é igual um ângulo raso 180°

Fonte: dados da pesquisa (2018).

5.5 Tarefa 2: investigando relações entre áreas de polígonos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo

No decorrer das aulas 23, 24, 25, 26 e 27, os alunos realizaram a tarefa de investigação de relações entre áreas de polígonos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

A tarefa teve como principal objetivo a apropriação de conceitos referentes às relações do Teorema de Pitágoras. Este é um dos teoremas matemáticos mais conhecidos, possuindo mais de 300 demonstrações. É possível que os povos antigos, como os egípcios, já conhecessem casos particulares deste teorema, todavia, foi Pitágoras (*c.* 570 – *c.* 490 a. C.), o primeiro a demonstrá-lo, provando suas relações.

A partir desta demonstração, o teorema ficou conhecido como Teorema de Pitágoras, em homenagem ao filósofo e matemático grego (SOUZA, 2013).

A tarefa foi proposta em consonância ao planejamento apresentado no Quadro 6.

Quadro 6 – Planejamento da segunda tarefa

Tarefa 02 - Investigando relações entre áreas de polígonos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo	
Data:	20/04/2018
Carga horária	5 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Triângulo retângulo, polígonos regulares, medidas de comprimento e áreas, Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Reconhecer, formalizar e generalizar o Teorema de Pitágoras.
Recursos	Tarefa de estudo, calculadora e *Software* Geogebra.
Procedimentos	Construir e determinar as medidas dos lados de um triângulo retângulo, construir polígonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo, determinar a área dos polígonos regulares, investigar relações existentes entre as áreas dos polígonos construídos.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: Plano de ensino (2018) (Apêndice A).

Dos dezesseis alunos da turma, dois não compareceram à aula, portanto, catorze alunos realizaram a investigação de relações entre áreas de polígonos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2015, p. 23), o "conceito de investigação em matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa".

Esta pesquisa não seguiu exatamente os momentos de uma investigação, conforme apresentados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2015), exploração e formulação de questões, conjecturas, testes e reformulação, justificativa e avaliação, contudo, considerou-se a importância da interação entre os alunos e as fases de desenvolvimento de uma atividade de investigação.

> Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE; BROCARDO e OLIVEIRA, 2015, p. 25).

Nesse prisma, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2015), as fases de uma atividade de investigação podem ser consolidadas de diversas formas, em geral, o professor faz uma breve introdução da atividade, em seguida, os alunos organizados em grupos realizam as investigações, e ao final, os resultados são compartilhados e discutidos com a turma.

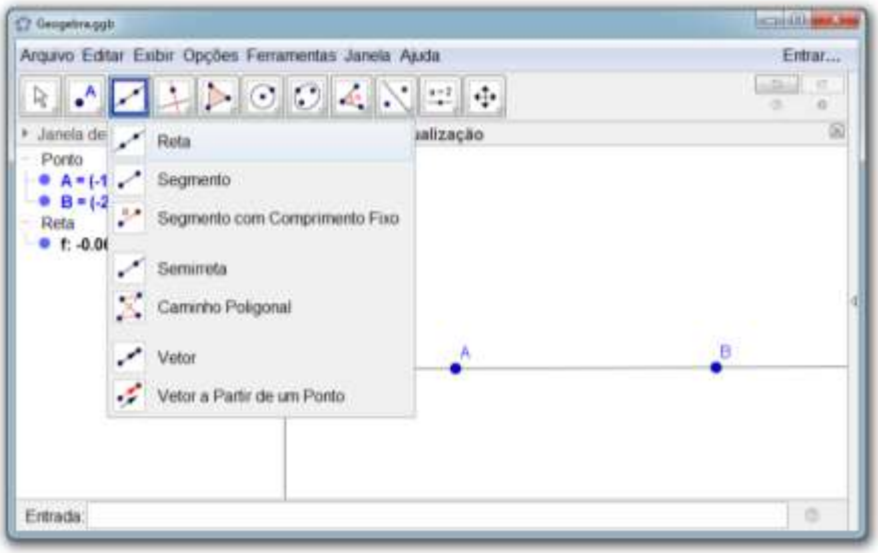
As tarefas propostas durante a realização do experimento didático-formativo foram planejadas com o propósito de trabalhar com o Geogebra e a investigação matemática em três níveis: experimentar, conjecturar e formalizar, conforme as perceptivas de Vaz (2012).

> A primeira etapa seria a possibilidade de experimentar, isto é,alunos e professor podem, em um laboratório de informática, usar o *software* para trabalhar atividades matemáticas que permitem o aluno, movimentando os objetos matemáticos, compararar representações algébricas e geométricas, perceber propriedades, defnições e construir conceitos através da interação. A segunda fase do processo seria levantar conjecturas relacionadas à primeira etapa. Conjecturar signifca que depois de perceber as relações oriundas da experimentação é possível vislumbrar propriedades, relações, resultados gerais importantes para o bom desenvolvimento do ensino da matemática. Uma vez feita a conjectura, o aluno pode enunciá-la como um resultado a ser investigado. A terceira etapa é a formalização que seria a demonstração matemática do fato propriamente dita ou uma contra-proposição da conjectura levantada, nos dois casos com um argumento pedagógico compativel à série que se está trabalhando. Tal atitude é importante, pois não podemos, através da experimentação, generalizar os resultados sob o risco de não estarmos praticando os ideais da Matemática. Os resultados dessa ciência devem ser argumentados, respeitando os níveis de entendimento do aluno (VAZ, 2012, p. 41).

Nesta tarefa, antes de iniciar as investigações, os alunos construíram figuras geométricas, seguindo as orientações, conforme apresentado a seguir.

Inserindo uma reta: acesse a ferramenta Reta e depois selecione duas posições da Janela de Visualização.

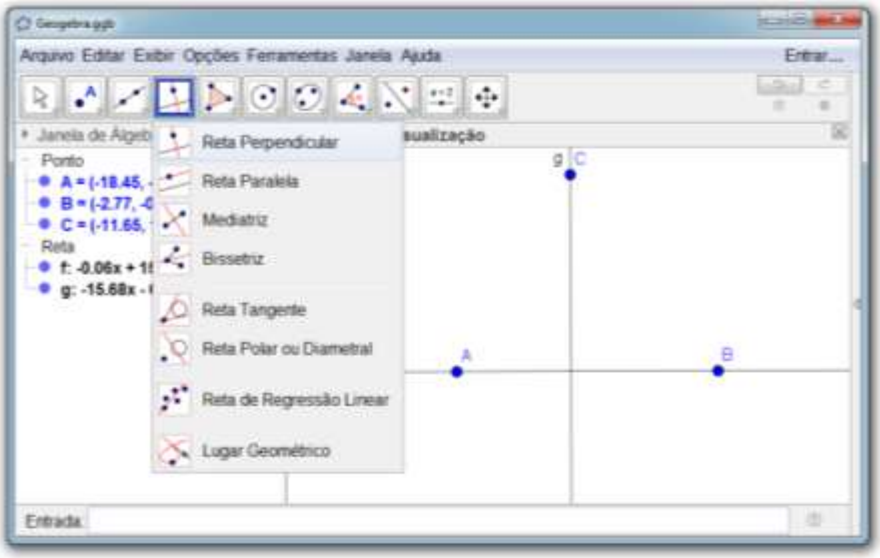
Figura 83 – Inserindo uma reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo uma Reta Perpendicular: selecione a ferramenta Reta Perpendicular, em seguida, clique acima da reta f e depois sobre o segmento de reta AB.

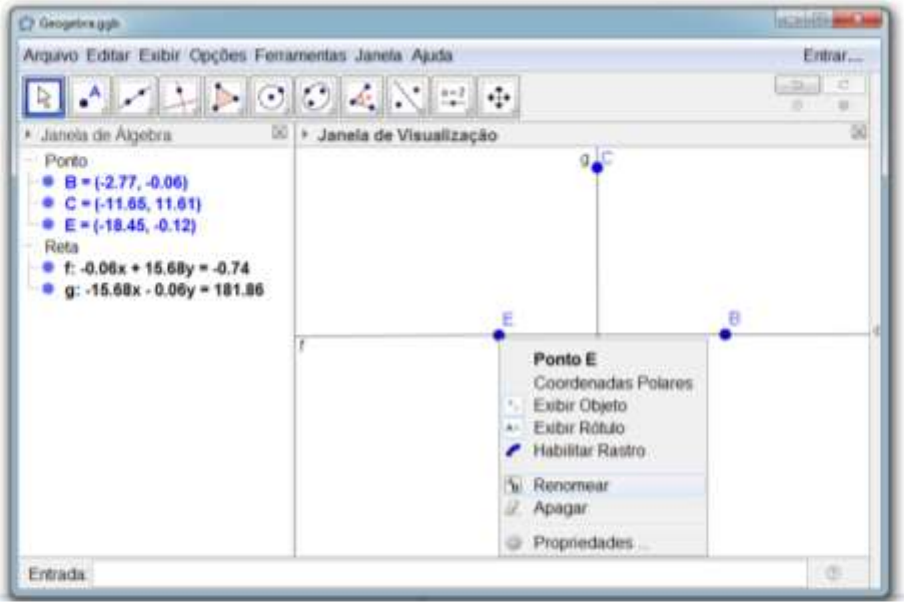
Figura 84 – Inserindo uma Reta Perpendicular



Fonte: elaboração da autora (2018).

Renomeando o ponto A: selecione o ponto A com o botão direito do *mouse*, acesse a ferramenta renomear, e digite E.

Figura 85 – Renomeando o ponto A



Fonte: elaboração da autora (2018).

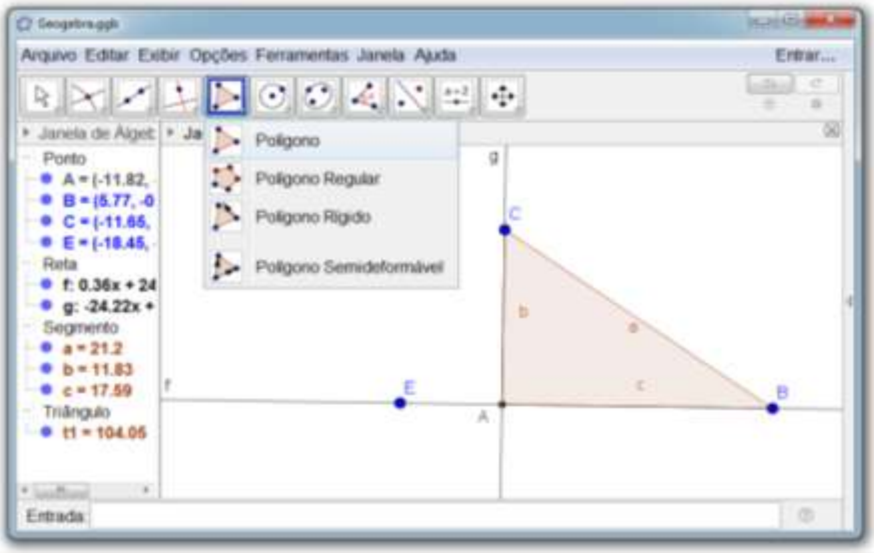
Inserindo um ponto a interseção das retas f e g: acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos, clique sobre as retas f e g para inserir o ponto A.

Figura 86 – Inserindo um ponto a interseção das retas f e g

Fonte: elaboração da autora (2018).

Construindo um triângulo: acesse a ferramenta Polígono, selecione os pontos A, B e C, e então, o ponto A novamente para construir um polígono com três vértices. Selecione o ponto E com o botão direito do mouse e selecione a opção ocultar objeto.

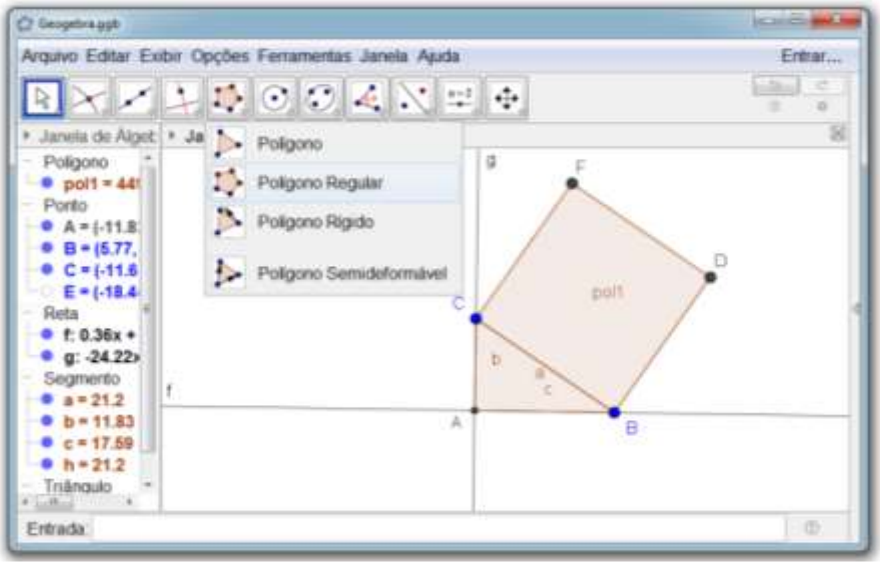
Figura 87 – Construindo um triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um polígono sobre o lado “a” do triângulo: acesse a ferramenta Polígono Regular, selecione os pontos C e B, nessa ordem, insira um polígono regular com quatro vértices sobre lado “a” do triângulo ABC.

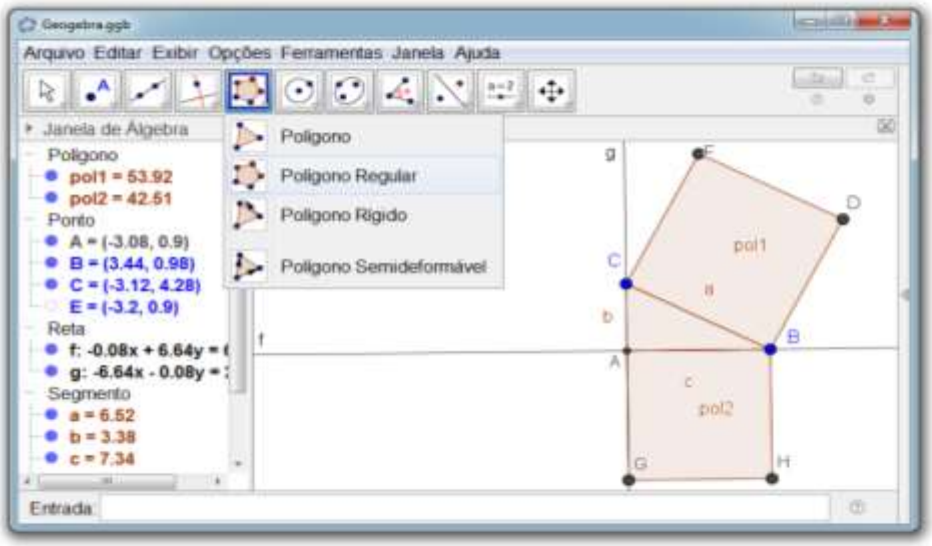
Figura 88 – Inserindo um quadrado sobre o lado “a” do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um polígono sobre o lado "c" do triângulo: acesse a ferramenta Polígono Regular, selecione os pontos B e A, sucessivamente, insira um polígono regular com quatro vértices sobre lado "c" do triângulo ABC.

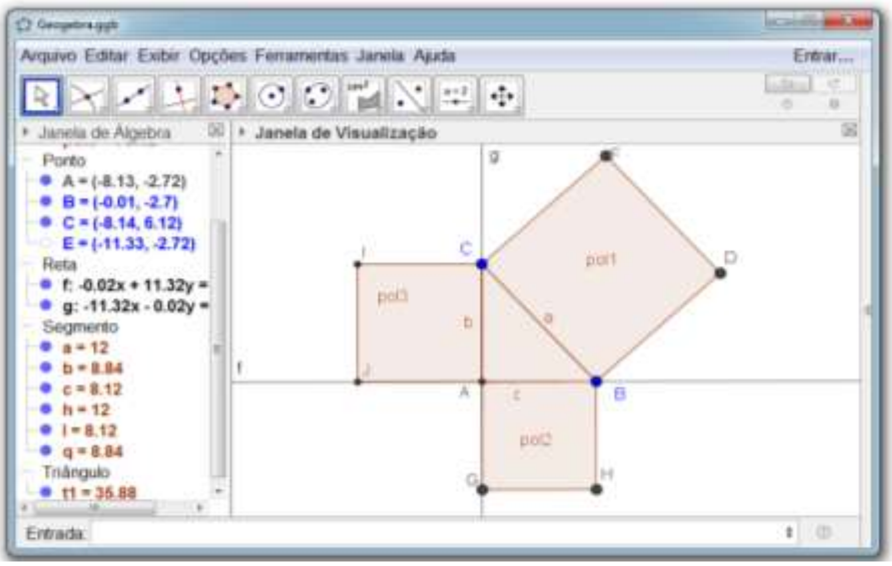
Figura 89 – Inserindo um quadrado sobre o lado "c" do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um polígono sobre o lado "b" do triângulo: acesse a ferramenta Polígono Regular, selecione os pontos A e C, continuamente, insira um polígono regular com quatro vértices sobre lado "b" do triângulo ABC.

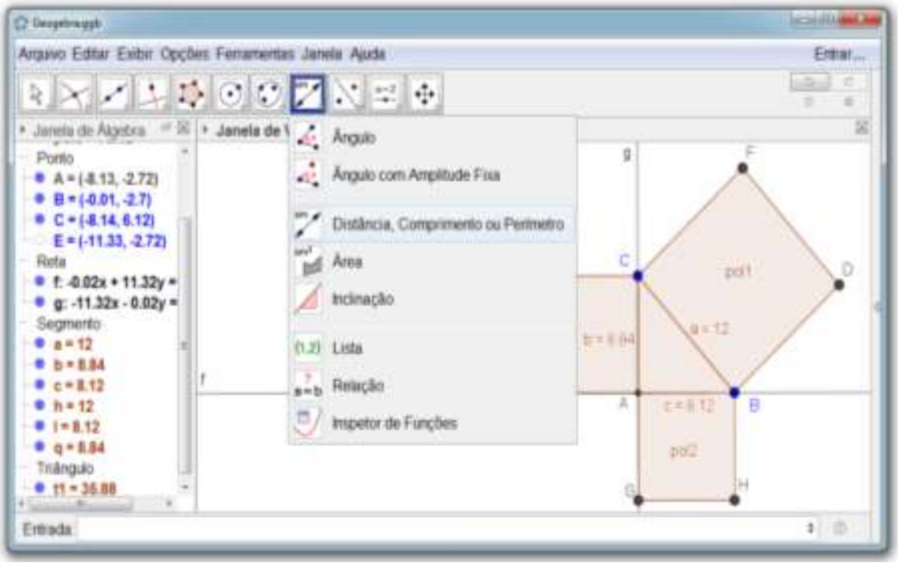
Figura 90 - Inserindo um quadrado sobre o lado "b" do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando a medida dos lados do triângulo: Acesse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro e clique sobre os lados a, b e c do triângulo ABC.

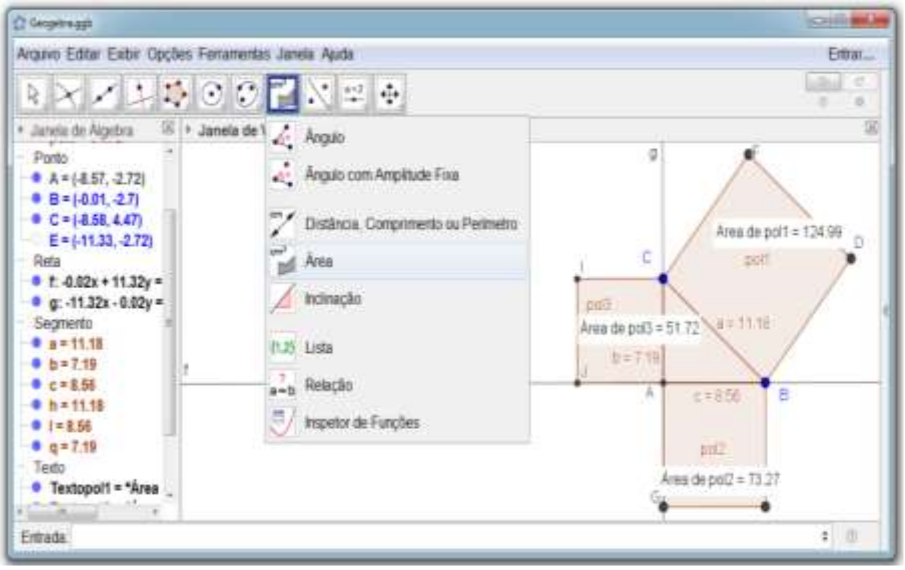
Figura 91 – Determinando a medida dos lados do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando a medida das áreas dos polígonos 1, 2 e 3: acesse a ferramenta Área e clique sobre as áreas dos polígonos 1, 2 e 3.

Figura 92 – Determinando a medida das áreas dos polígonos 1, 2 e 3



Fonte: elaboração da autora (2018).

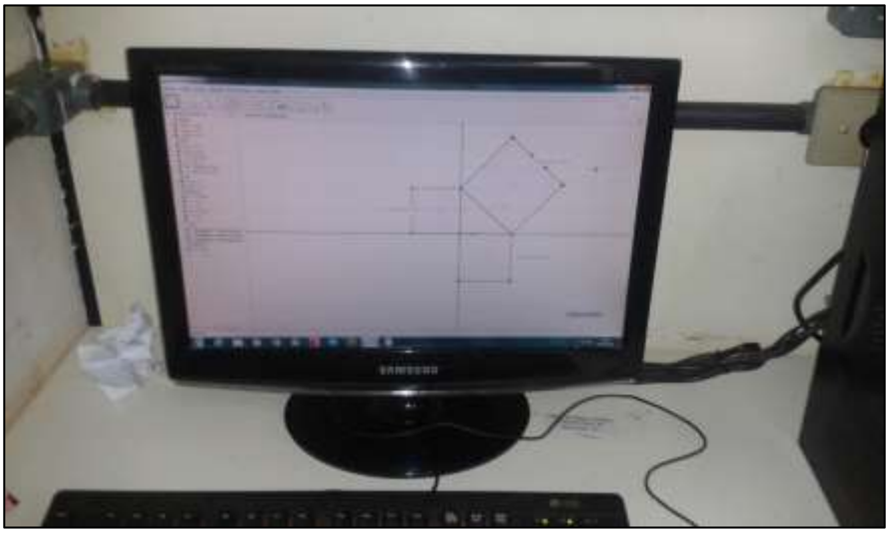
Nessa tarefa, cinco alunos construíram e determinaram as medidas das figuras geométricas, sem o auxílio da professora ou de colegas. Sete alunos apresentaram dificuldade ao construir e determinar as medidas das figuras. Destes, dois alunos só conseguiram concluir as construções mediados pela professora. Os demais alunos, com a mediação da professora e de colegas que apresentaram mais facilidade, concluíram a construção das figuras e determinaram as medidas dos lados e das áreas. “Compreender a questão da mediação, que caracteriza a relação do homem com o mundo e o com os outros homens, é de fundamental importância justamente porque é através deste processo que as funções psicológicas superiores, especificamente humanas, se desenvolvem” (REGO, 2014, p. 50).

A imitação foi o meio mais empregado durante as mediações, pois ao mediar os colegas com dificuldades, os alunos mais instruídos, demonstraram como fazer, utilizando suas construções, e pela imitação, os alunos mediados reconstruíram as figuras.

Para Vygotsky (2007), a imitação “não era mera cópia de um modelo, mas reconstrução individual daquilo que é observado nos outros. [...] uma oportunidade de a criança realizar ações que estão além de suas próprias capacidades, o que contribuiria para seu desenvolvimento” (OLIVEIRA, 2010, p. 65).

A Figura 93 apresenta a construção feita pelo aluno D, que foi mediado pelo aluno A.

Figura 93 – Figuras geométricas construídas pelo aluno D



Fonte: dados da pesquisa (2018).

No processo de aprendizagem, Vygotsky (2007) considerava a zona de desenvolvimento proximal, como a distância entre o nível de desenvolvimento real, ou seja, a capacidade do sujeito de realizar atividades de forma independente “e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes” (VYGOTSKY, 2007, p. 97).

Portanto, analisando o nível de desenvolvimento potencial dos alunos, isto é, capacidade de realizarem tarefas, mediados pela professora ou por colegas que apresentaram mais facilidade, e considerando os avanços desde o início do experimento didático-formativo, a etapa de construção das figuras geométricas contribuirá com o desenvolvimento dos sujeitos da pesquisa, porque segundo as perspectivas de Vygotsky (2007), o que o aluno faz hoje com auxílio do professor, e de colegas, no futuro conseguirá fazer de forma independente.

Vygotsky considerava a interatividade entre sujeitos e instrumentos uma atividade provocadora de mudanças externas e internas ao longo do desenvolvimento humano. As alterações externas são provocadas pela utilização de instrumentos construídos pelo homem para ações concretas. As transformações internas podem ser provocadas com o auxílio de signos, chamados por Vygotsky de instrumentos psicológicos (VYGOTSKY, 2007).

Após construir as figuras geométricas, com o auxílio das ferramentas do *software* Geogebra, os alunos iniciaram investigações com o intuito de responder as questões propostas na tarefa de estudo. A primeira pergunta questionou: Que relações existem entre às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo ABC? Interagindo com a professora e com os colegas de turma, os alunos conjecturaram[9]:

Aluno B: *As áreas dos quadrados são diferentes.*
Aluno J: *Isso mesmo, as medidas são diferentes.*
Aluno B: *Professora então não tem relação, pois são diferentes.*
Professora: *Todos concordam, não existe relação entre as áreas dos quadrados?*
Aluno M: *Deve ter, mas eu não consigo descobrir.*
Aluno P: *Tem, tem.*
Aluno Q: *Aonde então?*
Aluno P: *Sei lá, mais tem, vou pensar aqui.*
Aluno I: *Já sei professora, quando mecho aqui todas as medidas mudam.*
Professora: *Certo isso acontece, mas não é isso.*
Aluno N: *Professora, como assim relação.*

Nessa tarefa, a professora propôs aos alunos que utilizassem a calculadora para somar as áreas dos polígonos. Desse modo, calcularam a soma das áreas dos polígonos de foram

[9] As conjecturas foram transcritas, literalmente, das falas dos alunos.

aleatória. Alguns somaram as áreas de três polígonos e outros as áreas de dois polígonos. Um aluno aproximou-se da professora e disse:

Aluno H: *Professora vou falar só para você, não sei se está certo, mas parece que somando essas duas aqui dá o mesmo valor dessa aqui.*

Professora: *Isso mesmo, mas não conte para os outros alunos, agora tente responder a segunda pergunta.*

Como os demais alunos não estavam conseguindo identificar as relações, a professora orientou que somassem as áreas de duas em duas. Mediados pela professora e trocando informações com os colegas, todos os alunos, após várias tentativas de cálculos, conseguiram identificar a relação entre a soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos e a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa. Um aluno chamou a professora e disse:

Aluno P: *Isso aqui está parecendo aquele negócio de hipotenusa ao quadrado é igual aos outros lados.*

Professora: *Como, pode repetir o que você disse?*

Aluno P: *Acho que é aquele teorema, aquele que fala que esse lado e igual a esses outros aqui.*

Professora: *O Teorema de Pitágoras?*

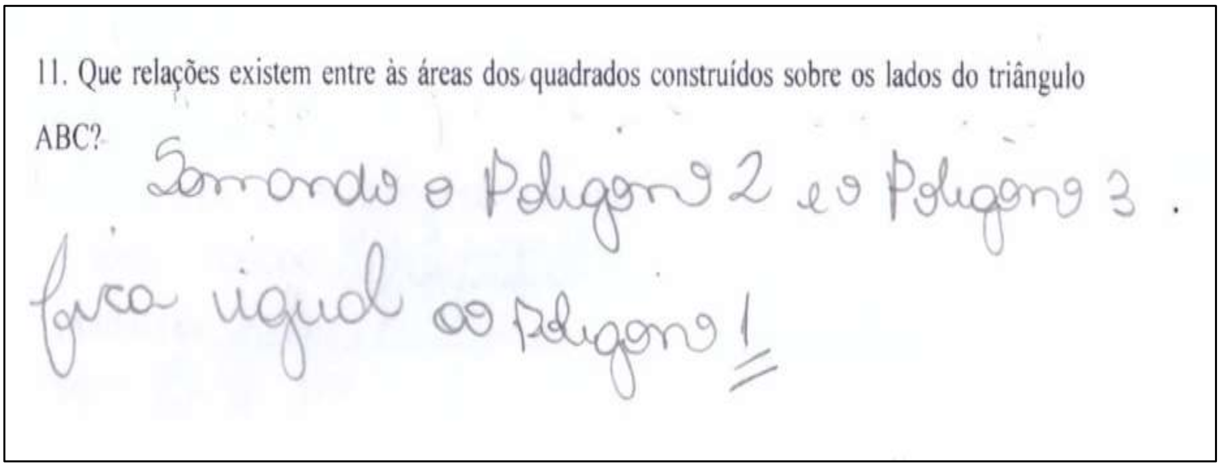
Aluno P: *Isso mesmo, é isso professora, ou estou errado?*

Professora: *Sim, é isso mesmo, mas não fale para os outros, anote no verso da tarefa o que você me disse.*

Somente esse aluno identificou que as relações investigadas se tratavam do Teorema de Pitágoras.

As Figuras 94, 95, 96, 97 e 98 apresentam as respostas de alguns alunos para a primeira questão da tarefa.

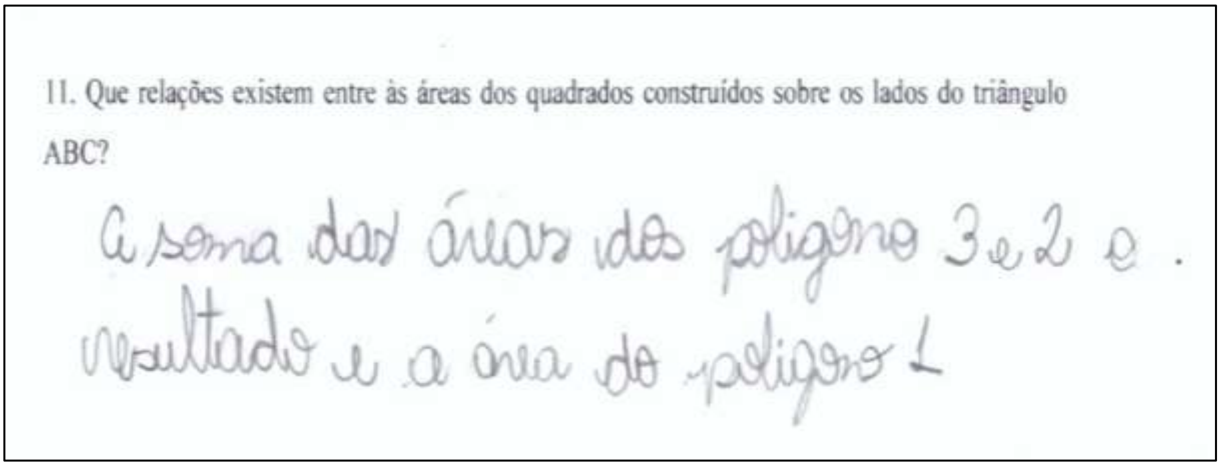
Figura 94 – Questão respondida pelo aluno H


11. Que relações existem entre às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo ABC?

Somando o Poligono 2 e o Poligono 3. fica igual ao Poligono 1

Fonte: dados da pesquisa (2018).

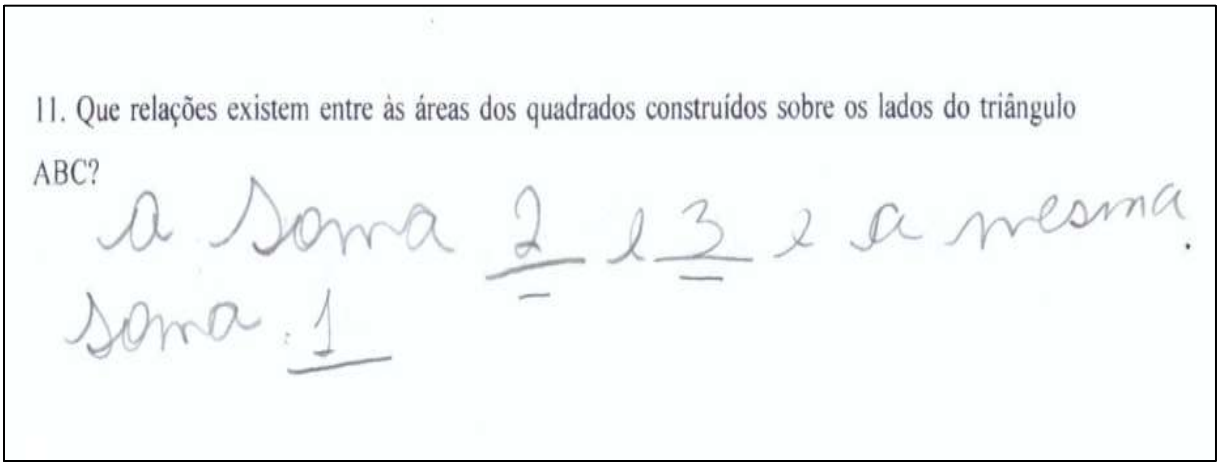
Figura 95 – Questão respondida pelo aluno P


11. Que relações existem entre às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo ABC?

a soma das áreas dos poligono 3 e 2 e. resultado e a área do poligono 1

Fonte: dados da pesquisa (2018).

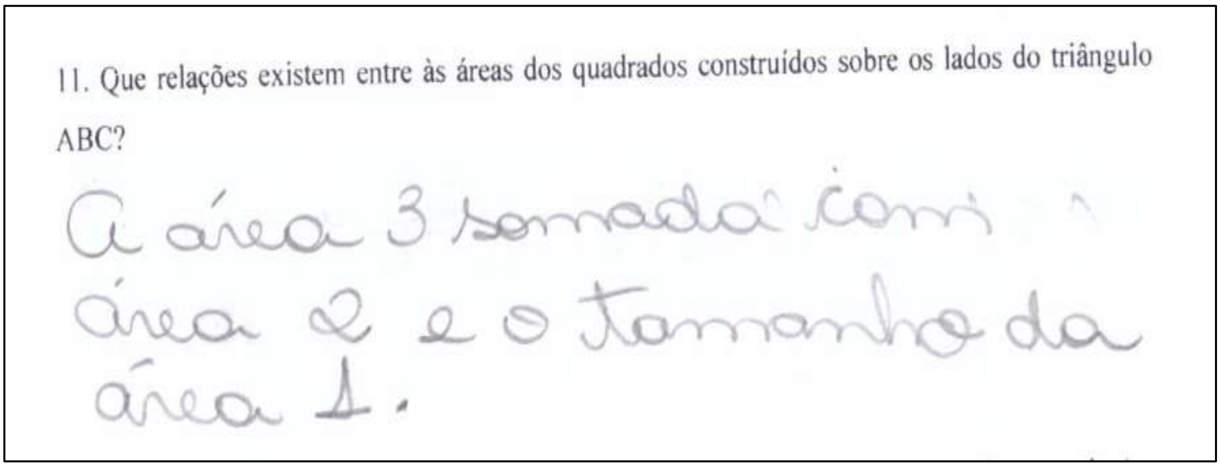
Figura 96 – Questão respondida pelo aluno G


11. Que relações existem entre às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo ABC?

a Soma 2 e 3 e a mesma. soma 1

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 97 – Questão respondida pelo aluno A

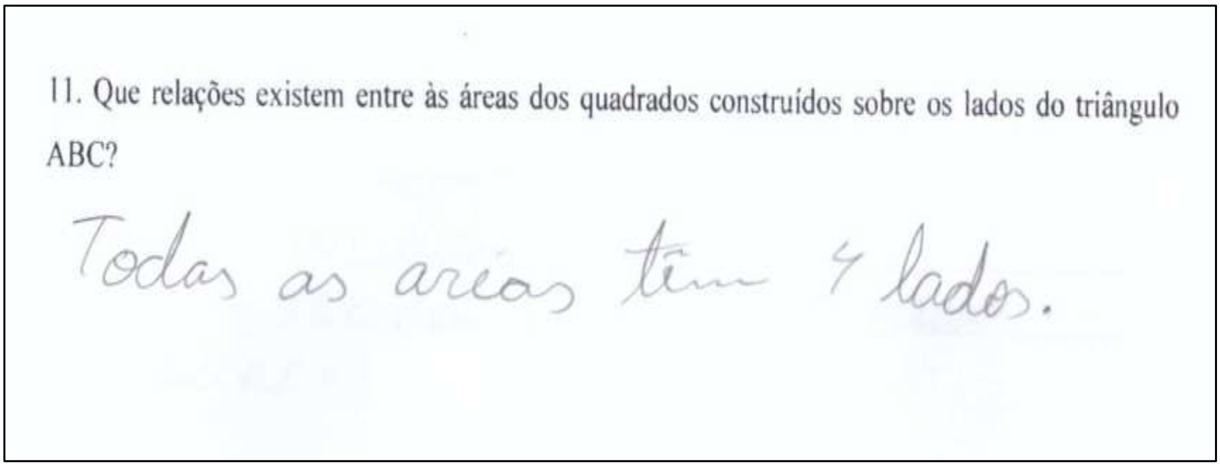


11. Que relações existem entre às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo ABC?

A área 3 somada com área 2 e o tamanho da área 1.

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 98 – Questão respondida pelo aluno D



11. Que relações existem entre às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo ABC?

Todas as areas têm 4 lados.

Fonte: dados da pesquisa (2018).

A segunda questão propôs: Mova o ponto C, aumentando e diminuindo o tamanho do triângulo retângulo, e questionou: As relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo se mantiveram? Os alunos procederam, conforme proposto, aumentando e diminuindo o tamanho do triângulo e investigaram se as relações entre as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo se mantinham. A professora e os alunos, que conseguiram observar que as relações se mantiveram, auxiliaram os alunos que apresentaram dificuldade ao realizar a investigação. Em seguida, são apresentadas as respostas de alguns alunos ao questionamento[10].

[10] As respostas foram transcritas, literalmente, das tarefas dos alunos.

Aluno E: *Sim. Continuaram o mesmo valor.*

Aluno Q: *Sim. Independente do nº de polígono sempre se mantém.*

Aluno J: *Mesmo aumentando o valor do polígono 3 e polígono 2 mantem o mesmo valor da 1.*

Aluno B: *A área do polígono 3 somada com a área do polígono 2 manteve igual a área do polígono 1.*

Aluno H: *Sim. Continuaram o mesmo valor.*

Aluno A: *Não, elas não se mantiveram.*

Aluno D: *Não, elas mudam.*

Os demais alunos responderam "sim", mas não justificaram a resposta. Analisando as respostas, verificou-se que as resposta dos alunos E e H foram idênticas em todas as perguntas, como usaram computadores próximos, é provável que um aluno tenha copiado as respostas do outro. Apesar do ocorrido, espera-se que tenham compartilhado da mesma opinião e não que tenha sido uma simples cópia. Nesse sentido, esse ocorrido impossibilitou avaliação.

A etapa 13 da tarefa apresentou a terceira questão, com a seguinte pergunta: As relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê? A professora mediou a investigação dos alunos que não conseguiam responder à questão, justamente, os alunos que não haviam justificado a segunda pergunta. Observar-se, abaixo, as respostas de alguns alunos[11].

Aluno E: *Sim, mesmo mudando o tamanho dos quadrados somando dará o valor do triângulo retângulo.*

Aluno J: *Sim. Mesmo aumentando manteve a mesma medida.*

Aluno L: *Sim. Porque quando aumentou e diminuiu manteve o mesmo valor.*

Aluno M: *Sim por que os movimentos não altera.*

Aluno C: *Sim. Porque quando aumentei e diminui ficou o mesmo valor.*

Aluno G: *Sim é porque quando move fica o mesmo valor.*

Aluno D: *Sim, somado a área 2 e 3 elas ficam do tamanho da área 1.*

[11] As respostas foram transcritas, literalmente, das tarefas dos alunos.

Aluno A: *Sim, somadas ligam a uma área.*

Aluno Q: *Sim. Não muda independente se for retângulo ou triangulo.*

Aluno N: *Sim.*

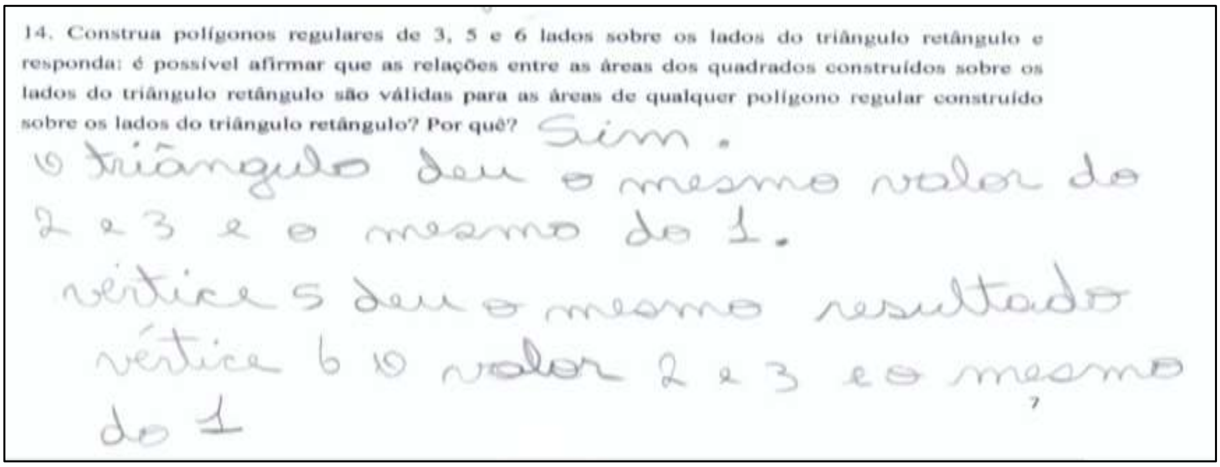
Aluno I: *Sim.*

Apesar de todos os alunos terem respondido “sim”, analisando as respostas, foi possível notar que alguns não conseguiram justificar a resposta, e entre as justificadas, algumas respostas foram confusas, provavelmente, em virtude da trajetória estudantil irregular dos sujeitos da pesquisa.

No entanto, durante as investigações, foi possível observar que os alunos compreenderam que as relações eram válidas para qualquer tamanho de triângulo retângulo, visto que, independentemente, do tamanho do triângulo, as relações entre as áreas dos quadrados se mantiveram.

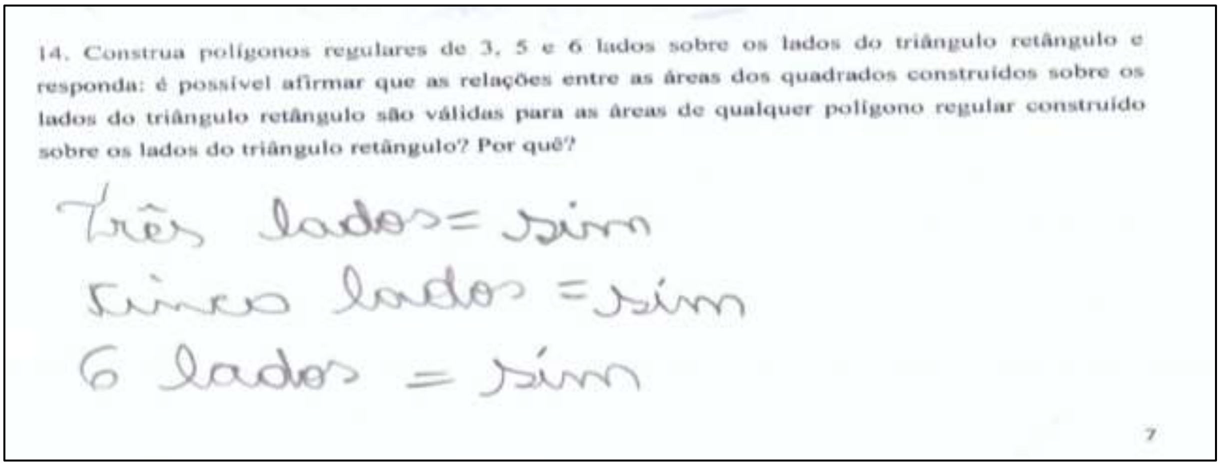
A quarta e última pergunta da tarefa propôs: Construa polígonos regulares de 3, 5 e 6 lados sobre os lados do triângulo retângulo e responda: é possível afirmar que as relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para as áreas de qualquer polígono regular construído sobre os lados do triângulo retângulo? Por quê? Nessa etapa, os alunos precisaram da mediação da professora para construir os polígonos. Após mediar à construção de alguns alunos, estes começaram a auxiliar os colegas. As Figuras 99, 100, 101, 102 e 103 ilustraram as respostas de alguns alunos.

Figura 99 – Questão respondida pelo aluno C


14. Construa polígonos regulares de 3, 5 e 6 lados sobre os lados do triângulo retângulo e responda: é possível afirmar que as relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para as áreas de qualquer polígono regular construído sobre os lados do triângulo retângulo? Por quê? Sim.
o triângulo deu o mesmo valor do 2 e 3 e o mesmo do 1.
vértice 5 deu o mesmo resultado
vértice 6 o valor 2 e 3 e o mesmo do 1

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 100 – Questão respondida pelo aluno B



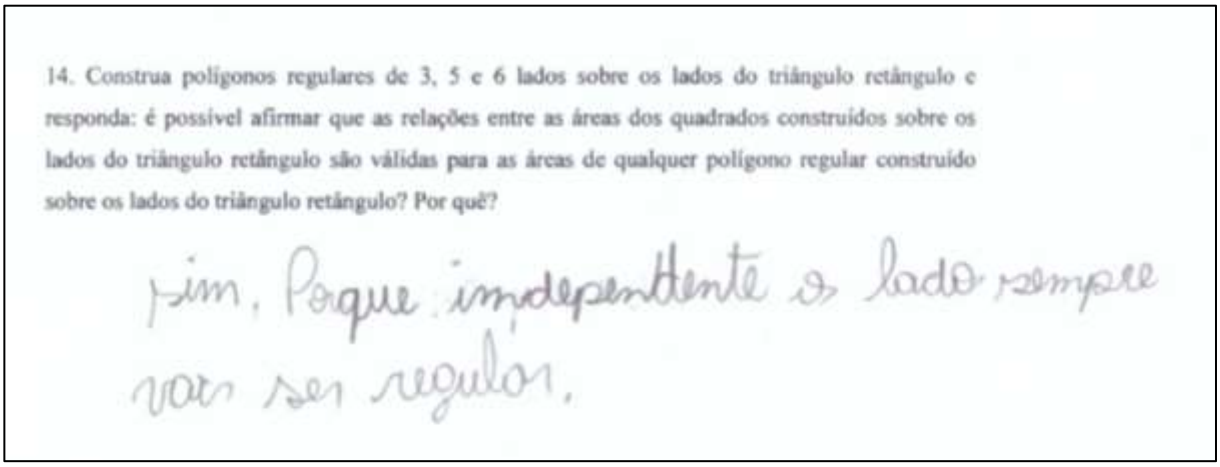
14. Construa polígonos regulares de 3, 5 e 6 lados sobre os lados do triângulo retângulo e responda: é possível afirmar que as relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para as áreas de qualquer polígono regular construído sobre os lados do triângulo retângulo? Por quê?

Três lados= sim
Cinco lados =sim
6 lados = sim

7

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 101 – Questão respondida pelo aluno P

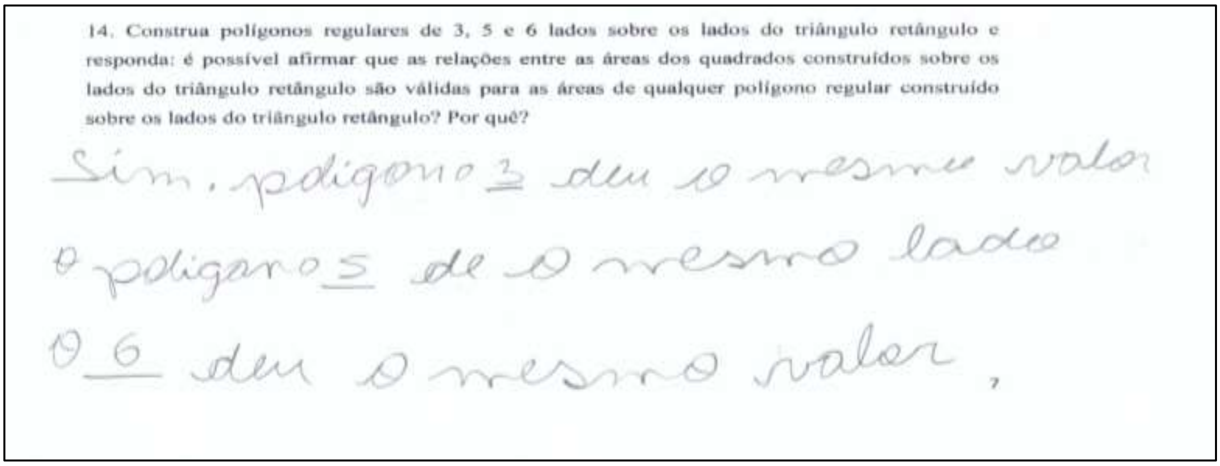


14. Construa polígonos regulares de 3, 5 e 6 lados sobre os lados do triângulo retângulo e responda: é possível afirmar que as relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para as áreas de qualquer polígono regular construído sobre os lados do triângulo retângulo? Por quê?

sim, Porque indepentente o lado sempre vai ser regular.

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 102 – Questão respondida pelo aluno G



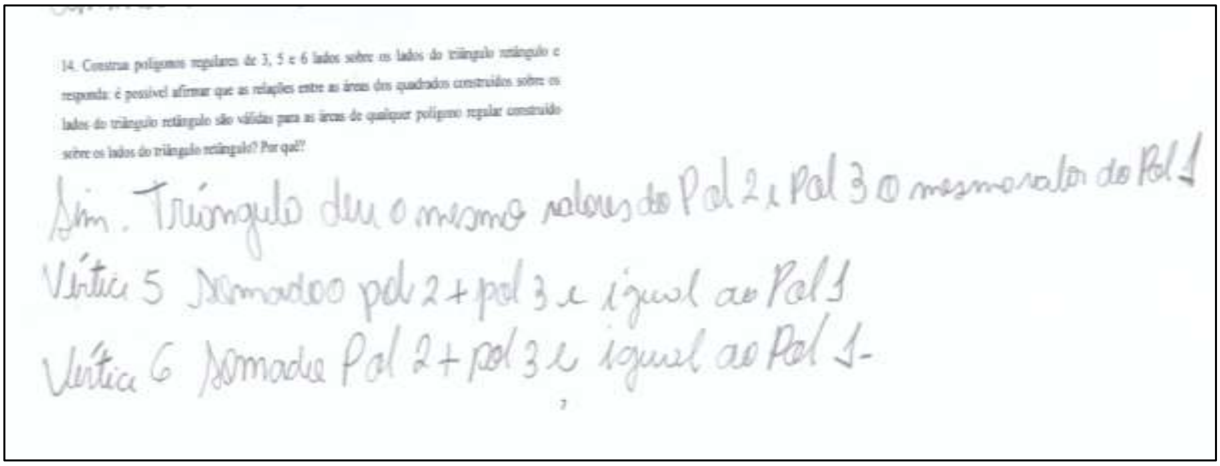
14. Construa polígonos regulares de 3, 5 e 6 lados sobre os lados do triângulo retângulo e responda: é possível afirmar que as relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para as áreas de qualquer polígono regular construído sobre os lados do triângulo retângulo? Por quê?

Sim, poligono 3 deu o mesmo valor
o poligono 5 de o mesmo lado
O 6 deu o mesmo valor,

7

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 103 – Questão respondida pelo aluno L


14. Construa polígonos regulares de 3, 5 e 6 lados sobre os lados do triângulo retângulo e responda: é possível afirmar que as relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para as áreas de qualquer polígono regular construído sobre os lados do triângulo retângulo? Por quê?

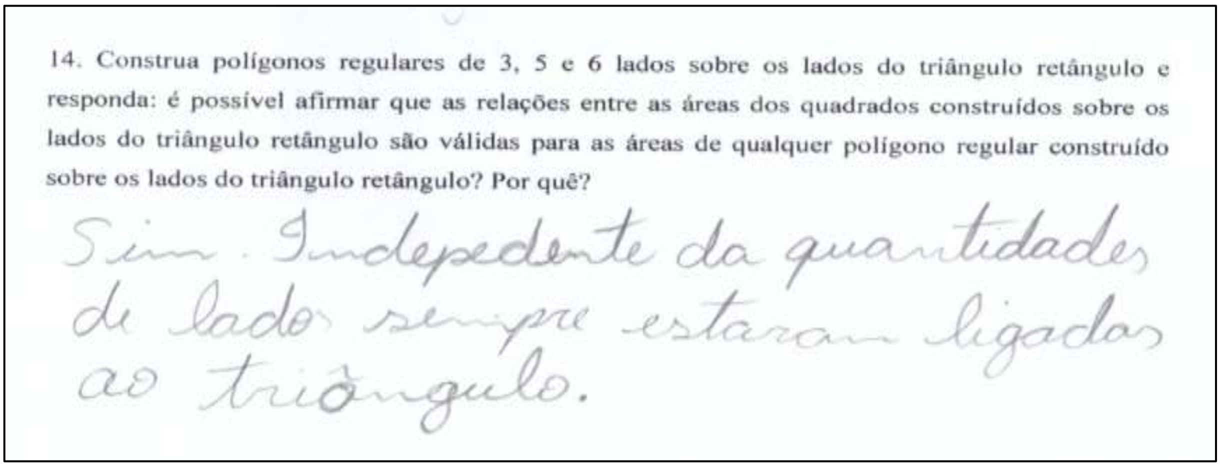
Sim. Triângulo deu o mesmo valores do Pol 2 e Pol 3 o mesmo valor do Pol 1
Vértice 5 Somado o pol 2 + pol 3 e igual ao Pol 1
Vértice 6 Somado Pol 2 + pol 3 e igual ao Pol 1-

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Apesar de todos os alunos terem respondido a quarta pergunta, os alunos A e D não construíram os polígonos de 3, 5 e 6, justificando que não era necessário. Observou-se que o aluno A auxiliou o aluno D durante a realização da tarefa.

As Figuras 104 e 105 exibem as respostas desses alunos.

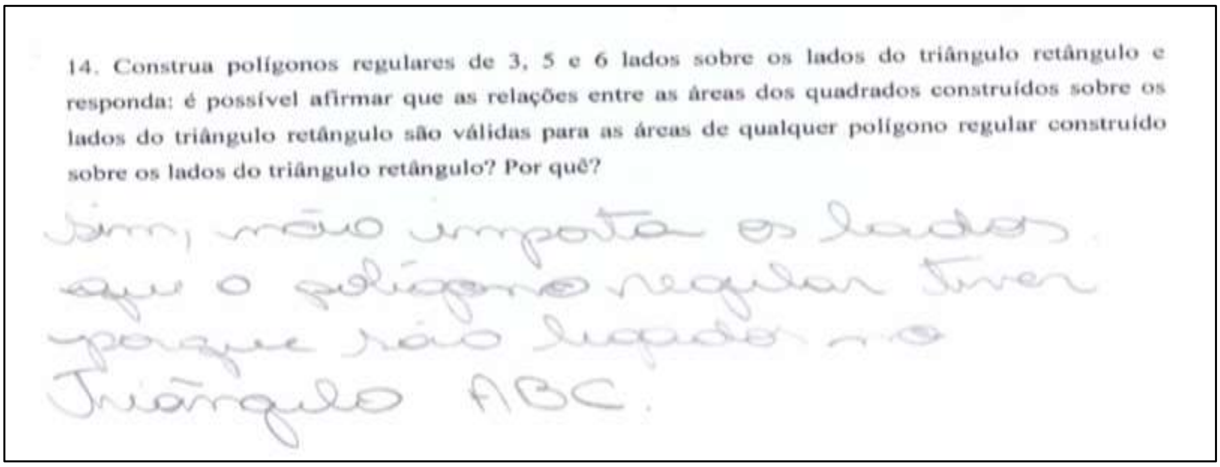
Figura 104 – Questão respondida pelo aluno D


14. Construa polígonos regulares de 3, 5 e 6 lados sobre os lados do triângulo retângulo e responda: é possível afirmar que as relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para as áreas de qualquer polígono regular construído sobre os lados do triângulo retângulo? Por quê?

Sim. Indepedente da quantidades de lados sempre estaram ligadas ao triângulo.

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 105 – Questão respondida pelo aluno A



14. Construa polígonos regulares de 3, 5 e 6 lados sobre os lados do triângulo retângulo e responda: é possível afirmar que as relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para as áreas de qualquer polígono regular construído sobre os lados do triângulo retângulo? Por quê?

Sim, não importa os lados que o polígono regular tiver porque são ligados ao Triângulo ABC.

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Essa tarefa foi realizada em 5 aulas, embora os alunos terem concluído as construções, investigações e terem respondido todas as perguntas, desse modo, a décima quarta etapa da tarefa deveria ter sido proposta em outra aula, porque os alunos se mostraram desmotivados ao construírem e investigarem os polígonos de 3, 5 e 6 lados. Provavelmente, em virtude, de se sentirem cansados diante de uma semana de trabalho e estudos.

Não obstante, nessa etapa do experimento didático-formativo, foi possível verificar que o aluno J apresentou um desenvolvimento superior em relação às etapas anteriores do estudo. Desde o início do experimento, foi observado que os alunos J e B apresentavam muitas dificuldades ao realizar as tarefas, mas não aceitavam as orientações de outros alunos, sendo mediados apenas pela professora.

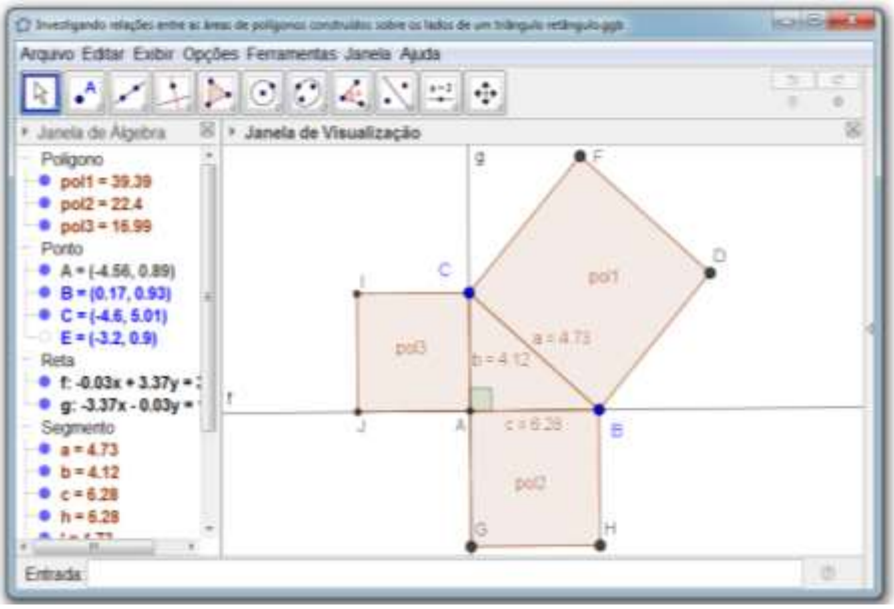
Nesse sentido, entende-se que a rejeição da mediação de outros alunos ocorreu, prejudicando a aprendizagem dos alunos J e B, devido à ausência de interação entre os colegas, comprometendo o desenvolvimento no final do experimento.

No entanto, de acordo com Vygotsky (2007), se o aprendizado escolar for adequadamente organizado pode produzir algo de novo no desenvolvimento dos alunos, portanto, é possível que o aprendizado organizado com o experimento didático-formativo, tenha produzido algo de novo no desenvolvimento dos alunos J e B.

Apesar das dificuldades apresentadas durante a realização das atividades, as ações objetivadas para a etapa da tarefa foram consolidadas, pois trocando informações, auxiliando, ou sendo auxiliados pelos colegas, a maioria dos alunos construiu, investigou e reconheceu as relações existentes entre as áreas de polígonos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

Com o objetivo de apresentar o Teorema de Pitágoras, na aula 28, foram exibidas imagens das figuras geométricas construídas no decorrer das aulas 23, 24, 25, 26 e 27, e propostos diálogos a respeito das relações existentes entre as áreas dos polígonos construídos sobre os lados do triângulo retângulo. A Figura 106 exibe a construção investigada no decorrer da aula.

Figura 106 – Construção investigada no decorrer da aula 28



Fonte: elaboração da autora (2018).

A seguir são apresentados trechos da discursão proposta no decorrer da aula[12].

Professora: *Investigando a construção o que vocês concluíram em relação às áreas dos polígonos construídos sobre os lados do triângulo?*

Aluno C: *Que a medida do quadrado construído sobre o lado maior do triângulo é igual à medida dos outros dois quadrados.*

Professora: *Então, a medida da área do quadrado construído sobre o lado **a** do triângulo retângulo e igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados **b** e **c**?*

Aluno C: *Sim, somando as medidas dos dois quadrados menores fica igual do quadrado maior.*

Aluno G: *Parece que este triângulo está diferente do que construí, onde é o **b** no meu era **c**.*

[12] As conjecturas foram transcritas, literalmente, das falas da professora e dos alunos.

Professora: *Está diferente? Mas isso não altera os resultados. Para verificar se a diferença entre os lados b e c no triângulo que você construiu e no que construí realmente não altera os resultados, vamos determinar as medidas das áreas dos quadrados utilizando a ferramenta do Geogebra, agora vamos somar as áreas dos triângulos construídos sobre os lados* ***b*** *e* ***c****, comparando é a mesma medida da área do quadrado construído sobre o lado* ***a****?*

Aluno G: *Sim.*

Professora: *Agora vamos supor que não tivéssemos o recurso da ferramenta área do Geogebra, como faríamos para calcular a área dos quadrados?*

Alunos L: *Eu não lembro como que faz.*

Aluno B: *A gente não aprendeu isso não.*

Aluno H: *Já estudei isto, mas esqueci.*

Professora: *Observe o quadrado construído sobre o lado* ***a*** *do triângulo retângulo, a medida do lado* ***a*** *é 4,73, é possível afirmar que os outros lados deste quadrado têm a mesma medida?*

Alguns alunos responderam que sim, outros ficaram com dúvidas, preferiram não se manifestar.

Professora: *Como se trata de um quadrado todos os lados tem a mesma medida, portanto se este lado oposto ao ângulo reto é nomeado de* ***a,*** *os outros lados desse quadrado também podem ser chamados de* ***a,*** *portanto, todos os lados têm a mesma medida, ou seja, todos os lados do quadrado medem 4,73. Para calcular a área de um quadrado aplicamos a seguinte regra: multiplicamos a medida da base do quadrado pela medida da altura, ou seja, a fórmula para calcular a área do quadrado construído sobre o lado* ***a*** *do triângulo é Área (pol1) = b . h Mas qual lado do triângulo é a base? E qual é a altura?*

Aluno B: *O que está do lado maior do triângulo é a base.*

Aluno L: *Acho que qualquer lado do quadrado pode ser a base, porque todos são iguais.*

Aluno A: *Mas a altura é maior.*

Aluno E: *Não, é tudo igual, porque todos os lados tem o mesmo tamanho.*

Professora: *Isso mesmo todos os lados têm a mesma medida, portanto qualquer lado do quadrado pode ser considerado a base, ou a altura, desse modo, a área do polígono de lado* ***a*** *pode ser calculada da seguinte forma Área (pol1) = a. a.*

A partir dessa afirmação o Teorema de Pitágoras foi apresentado, conforme exposto a seguir:

Área (pol1) = b . h.	**Área (po2) = b . h.**	**Área (pol3) = b . h.**
Área (Pol1) = a. a	**Área (Pol2) = b. b**	**Área (Pol3) = c. c**
Área (pol1) = $\mathbf{a^2}$	**Área (pol2) =** $\mathbf{b^2}$	**Área (pol3) =** $\mathbf{c^2}$

Área (pol1) = Área (pol2) + Área (pol3)

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

Foi questionado aos alunos se conheciam a relação $a^2 = b^2 + c^2$, a maioria respondeu que se tratava do Teorema de Pitágoras. Pode-se afirmar que a apresentação do teorema a partir da construção e investigação de polígonos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo despertou o interesse pelos estudos propostos.

Com o objetivo de validar o teorema, demonstrou-se como determinar a medida da área do polígono 1, conhecidas as áreas do polígono 2 e 3. Depois como calcular a área do polígono 3, construído sobre o lado maior do triângulo, dadas às medidas das áreas do polígono 1 e 2.

Concluídas as aplicações, foi apresentada a definição do Teorema de Pitágoras, "o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos" (EVES, 2004, p. 103). Todavia, faltava ainda formalizar o teorema, o que foi feito nas aulas seguintes, conforme exposto no próximo capítulo.

5.6 Tarefa 3: formalizando o Teorema de Pitágoras

A tarefa de formalização do Teorema de Pitágoras foi proposta no decorrer das aulas 29 e 30, de acordo com o planejamento apresentado no Quadro 7.

Quadro 7 – Planejamento da terceira tarefa

Tarefa 03 – Formalizando o Teorema de Pitágoras	
Data:	04/05/2018
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Teorema de Pitágoras.

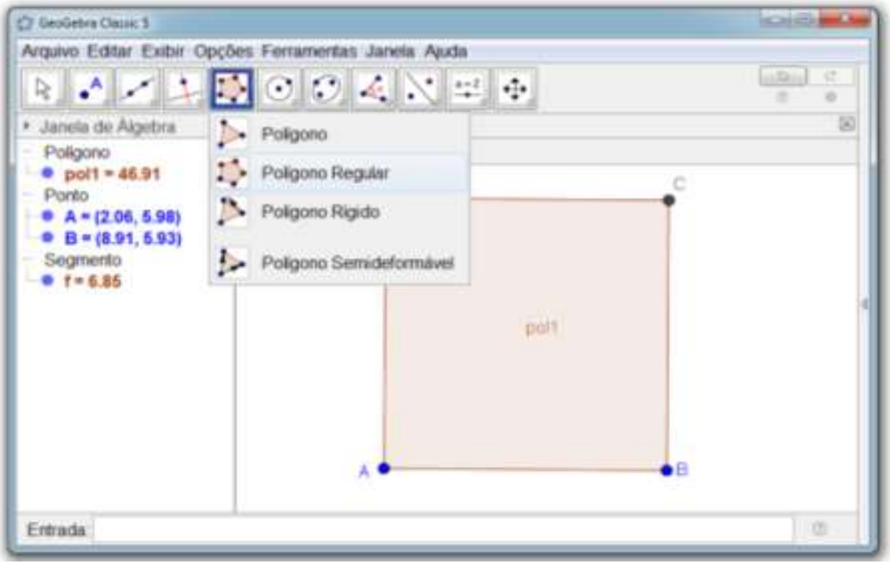
Objeto Geral	Formalizar o Teorema de Pitágoras.
Recursos	Tarefa de estudo, *software* Geogebra.
Procedimentos	Construir e investigar uma demonstração do Teorema de Pitágoras.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: Plano de ensino (2018).

Quinze alunos realizaram a tarefa, seis precisaram da mediação da professora ou de alunos que apresentaram facilidade em construir as figuras geométricas, os demais construíram a demonstração do Teorema de Pitágoras, seguindo as orientações da tarefa, conforme apresentadas a seguir.

Inserindo um polígono regular com quatro vértices: acesse a ferramenta Polígono Regular, e clique em dois locais da Janela de Visualização para inserir os pontos A e B, em seguida digite o número de vértices.

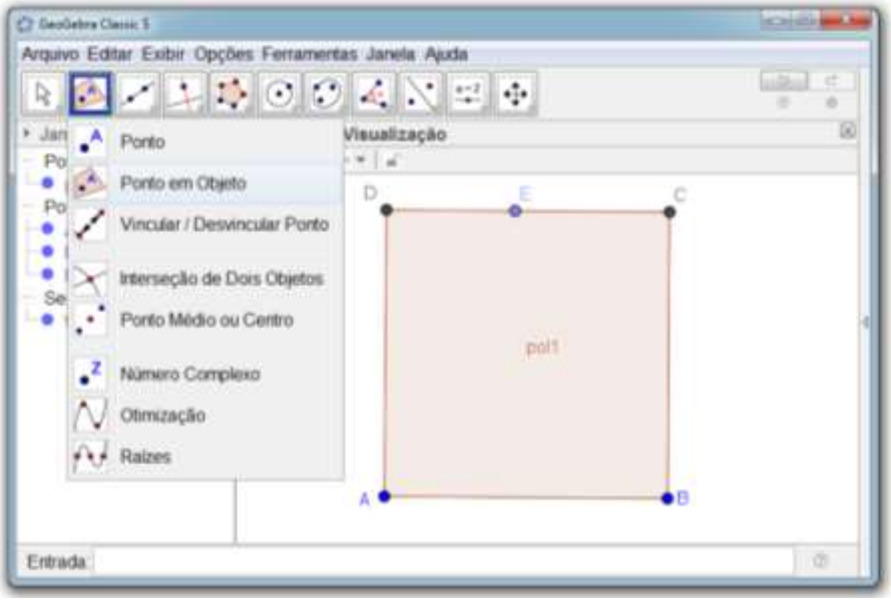
Figura 107 – Inserindo um polígono regular com quatro vértices



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um ponto em objeto: selecione a ferramenta Ponto em Objeto e insira um ponto E entre os pontos C e D do polígono construído.

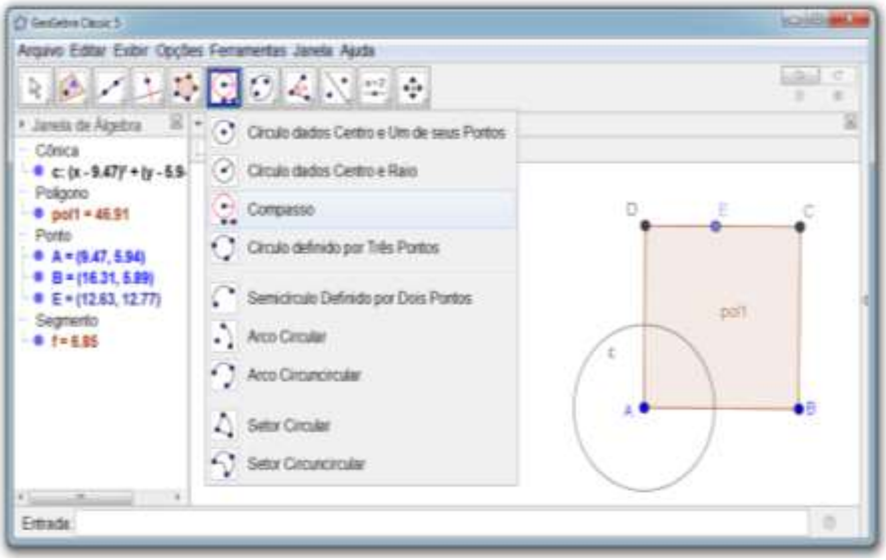
Figura 108 – Inserindo um ponto em objeto



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo uma circunferência: acesse a ferramenta Compasso e clique sobre os pontos D, E e A, nesta ordem.

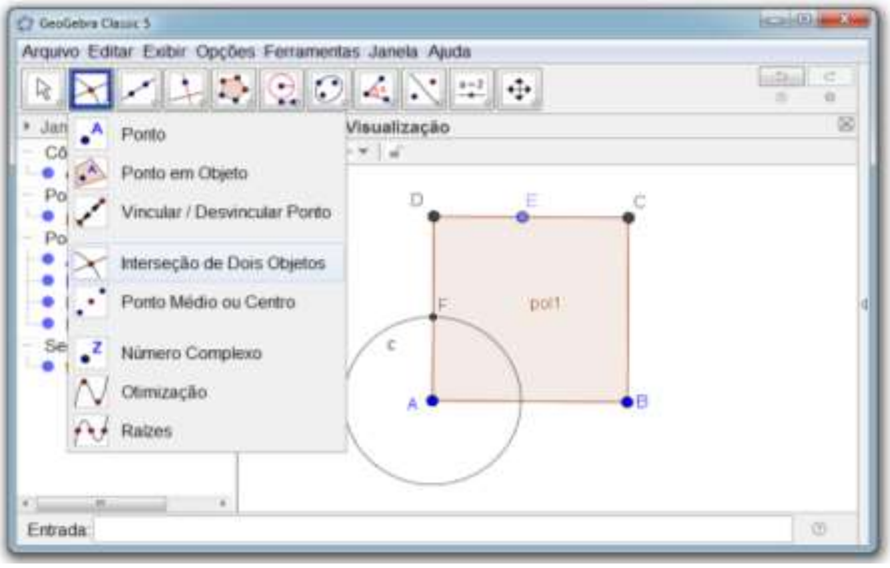
Figura 109 – Inserindo uma circunferência



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um ponto na interseção de dois objetos: acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecione a circunferência e o segmento AD, será inserido um ponto na interseção da circunferência com o lado AD do polígono.

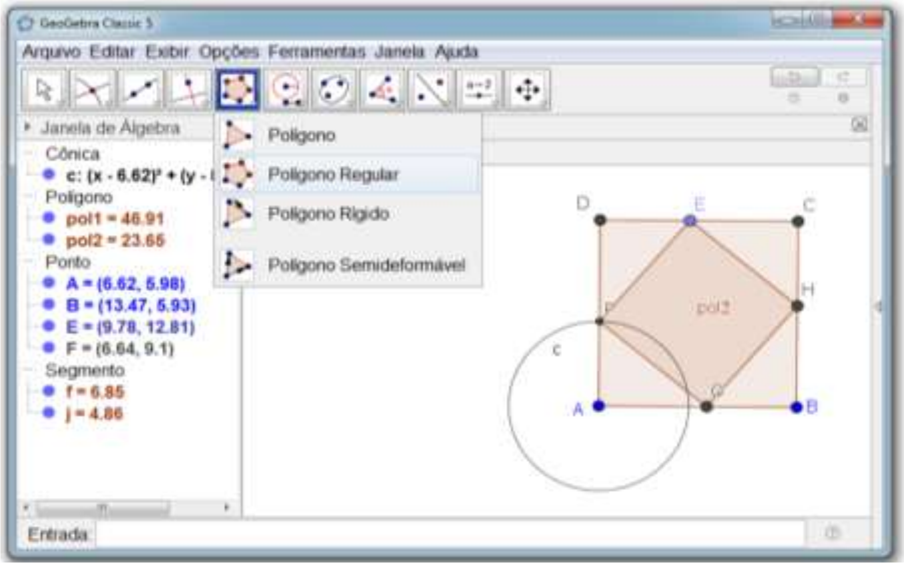
Figura 110 – Inserindo um ponto na interseção de dois objetos



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um polígono regular: selecione a ferramenta Polígono Regular, e, depois os pontos E e F para inserir um polígono com 4 vértices. Observe que será construído um polígono EFGH, cujos vértices estão sobre os lados do polígono ABCD.

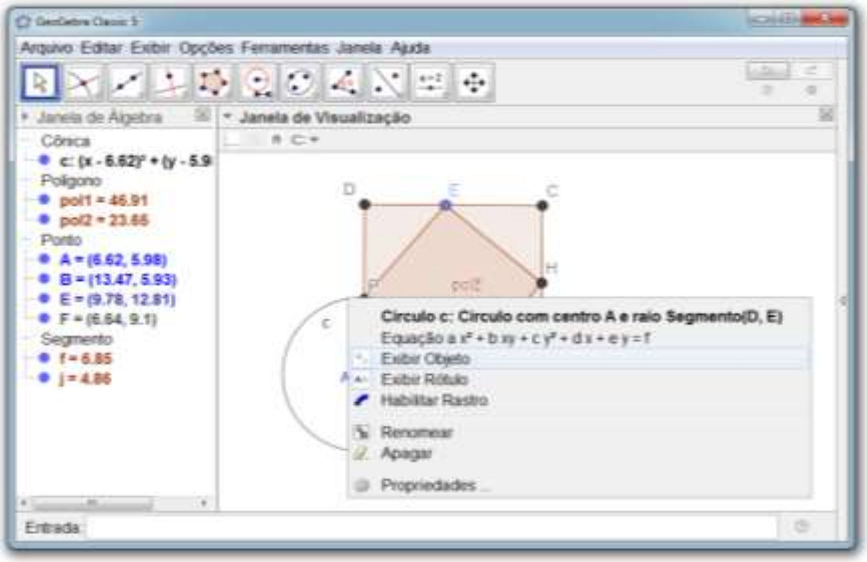
Figura 111 – Inserindo um polígono regular



Fonte: elaboração da autora (2018).

Ocultando a circunferência: clique com o botão direito do *mouse* sobre a circunferência e desative a opção Exibir Objeto.

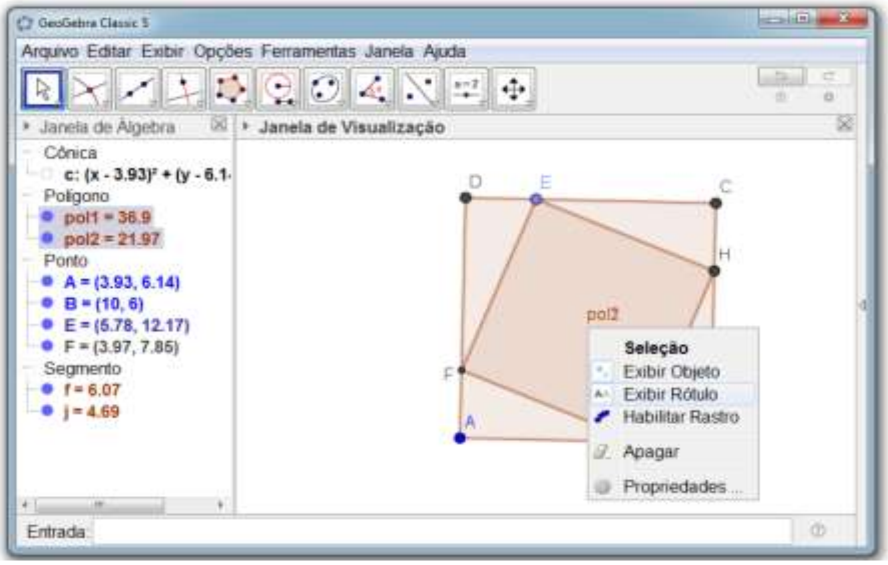
Figura 112 – Ocultando a circunferência



Fonte: elaboração da autora (2018).

Ocultando os rótulos dos polígonos: clique com o botão direito do *mouse* sobre os polígonos e selecione a opção Exibir Rótulo para ocultar os rótulos dos polígonos.

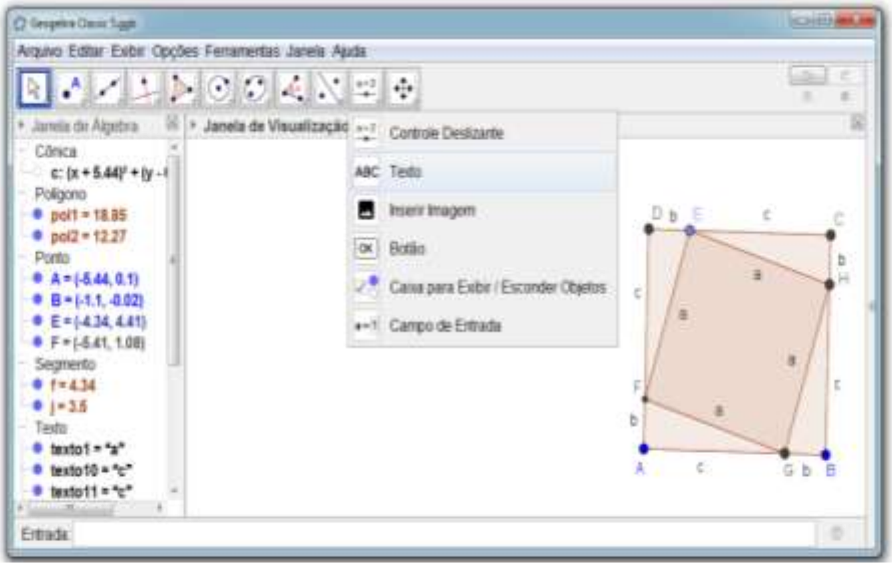
Figura 113 – Ocultando os rótulos dos polígonos



Fonte: elaboração da autora (2018).

Nomeando os lados dos polígonos: selecione a ferramenta Texto e nomeie os lados dos polígonos conforme apresentado na Figura 114.

Figura 114 – Nomeando os lados dos polígonos



Fonte: elaboração da autora (2018).

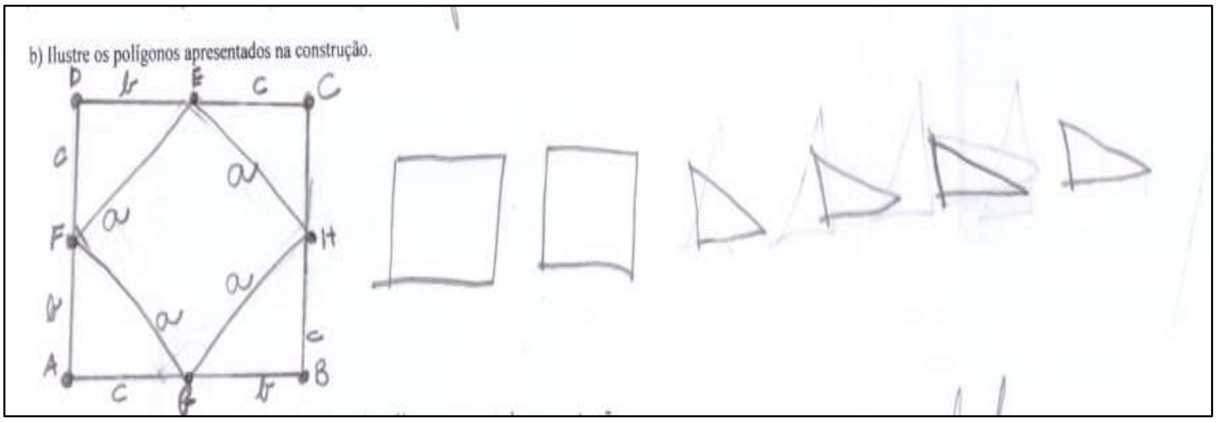
Construída a figura geométrica, os alunos moveram o ponto E, conforme proposto na tarefa, e buscaram responder as seguintes questões: Quantos polígonos são apresentados na construção? Ilustre os polígonos apresentados na construção. Descreva como podemos calcular a área de cada polígono apresentado na construção.

Nesse diapasão, apenas dois alunos não responderam a primeira questão, cinco responderam que a quantidade era igual a seis, os demais informaram que a construção apresentava seis polígonos, sendo dois quadrados e quatro triângulos.

Referente à segunda questão, apenas um aluno não ilustrou os polígonos apresentados na construção, sete alunos fizeram a ilustração, segundo observado na tela do Geogebra e os demais ilustraram os polígonos separadamente.

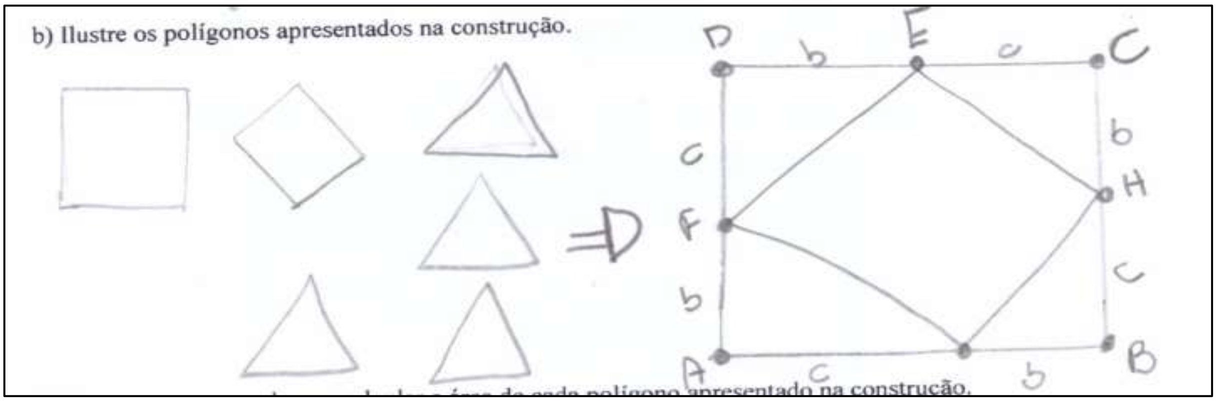
Houve interação dos alunos ao responder a essas questões, quando algum aluno afirmava que a quantidade de polígonos apresentados na construção eram cinco, imediatamente, outros alunos diziam errado a afirmação, pois se tratava de seis polígonos. Muitos dirigiam ao computador dos colegas para apontar a quantidade de polígonos na figura construída. As figuras 115, 116, 117 e 118 ilustram as tarefas dos alunos F, H, L e Q.

Figura 115 – Construção ilustrada pelo aluno L



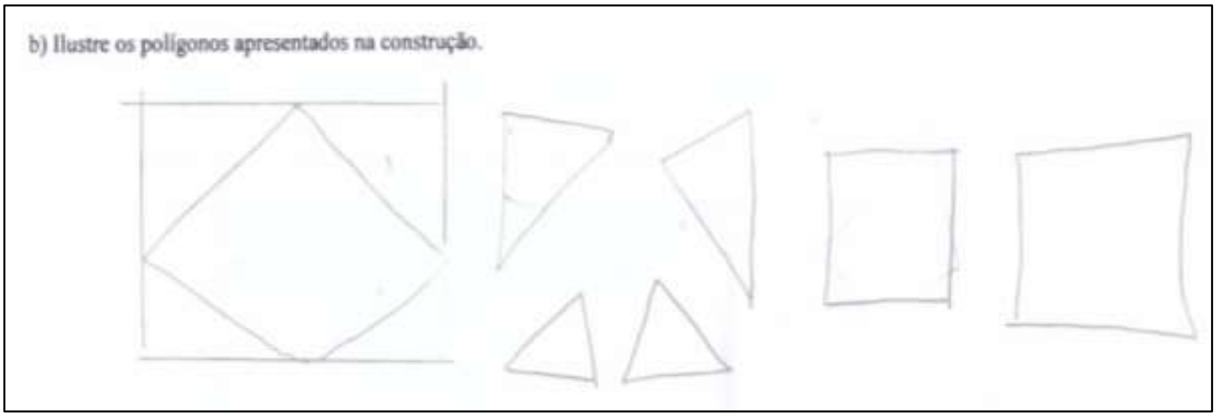
Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 116 – Construção ilustrada pelo aluno F



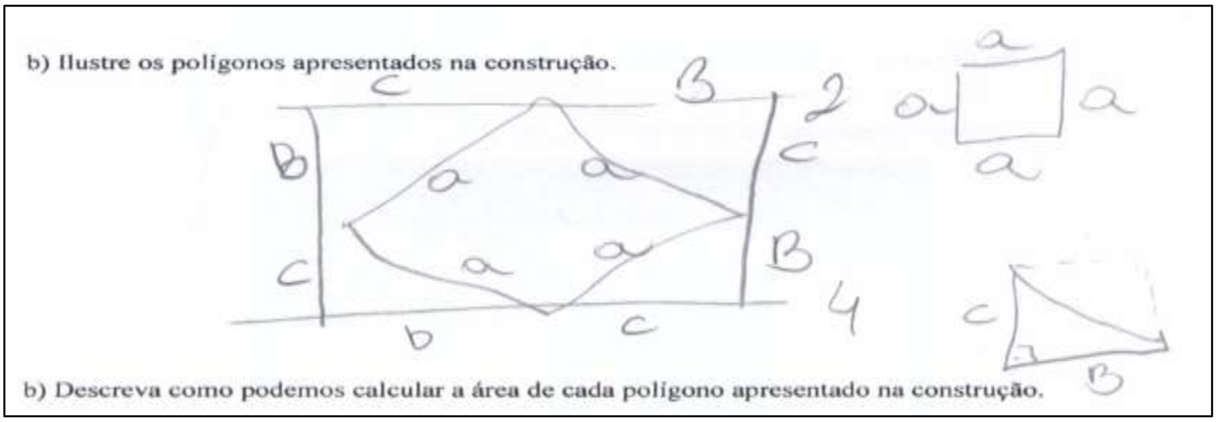
Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 117 – Construção ilustrada pelo aluno H



Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 118 – Construção ilustrada pelo aluno Q



Fonte: dados da pesquisa (2018).

Em relação à terceira questão, os alunos apresentaram dificuldades em descrever como calcular a área dos polígonos apresentadas na construção. Com o objetivo de mediar à realização da tarefa, as figuras foram desenhadas no quadro e perguntou-se aos alunos como calcular a área de cada polígono. Referente ao polígono de lados **a**, a maioria dos alunos respondeu que deveria multiplicar **a** por **a**, em relação aos triângulos foi preciso relembrar a fórmula $A = \frac{b.h}{2}$, onde A significa área, b base, h altura. Quanto ao quadrado de lados **b** e **c**, informou-se que deveriam somar **b** + **c**, quando questionados em relação à outra maneira de calcular a área deste polígono, apenas o aluno **L** respondeu que deveria somar a área do quadrado de vértices EFGH com as áreas dos quatro triângulos.

Concluídas as conjecturas referentes ao cálculo das áreas das figuras, passou-se a demonstrar como calcular a área de cada polígono, assim o Teorema de Pitágoras foi formalizado, conforme apresentado a seguir.

Determinando a área do polígono ABCD (quadrado de lados **b + c**):

A área do polígono ABCD pode ser obtida adicionando a área do polígono EFGH (quadrado de lados **a**) à área dos quatro triângulos retângulos $a^2 + 4.\frac{b.c}{2}$, ou elevando ao quadrado a medida do lado do polígono ABCD $(b+c)^2$. Dessa maneira, tem-se que:

$$a^2 + 4.\frac{bc}{2} = (b+c)^2$$
$$a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

A relação $a^2 = b^2 + c^2$ apresentada pelo Teorema de Pitágoras descreve que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, a demonstração investigada, nessa tarefa, possibilitou formalizar o Teorema de Pitágoras.

Os alunos se mostraram surpresos ao reconhecer o teorema a partir da igualdade das formas de calcular a área do polígono ABCD. A respeito do aluno **L**, cabe informar que teve interesse em realizar as tarefas, mas como apresentou dificuldades ao realizar algumas atividades, recorreu à mediação da professora e solicitou auxílio dos colegas.

Ressalte-se, nesse sentido, que a interação com a turma contribuiu com a própria aprendizagem, pois o desejo de aprender para mediar às atividades de outros alunos motivou investigações em busca das respostas corretas. Situações de mediação e interação entre os alunos foram observadas em vários momentos da realização do experimento didático-formativo, efetivando-se a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

Em relação ao desenvolvimento psíquico dos escolares, Davydov (1988) aponta que

> Os problemas do ensino e da educação que impulsionam o desenvolvimento estão estreitamente ligados à fundamentação lógico-psicológica da estruturação das disciplinas escolares. O conteúdo destas e os meios para desenvolvê-los no processo didático-educativo determinam essencialmente o tipo de consciência e de pensamento que se forma nos escolares durante a assimilação dos correspondentes conhecimentos, atitudes e hábitos. Por isso, as questões referidas à estruturação das matérias escolares não têm uma importância estreita, didático-metodológica, mas mais ampla, a partir do ponto de vista das particularidades do desenvolvimento psíquico dos escolares (DAVYDOV, 1988, p. 103).

Concordando com Davydov (1988), os conteúdos propostos durante o experimento didático-formativo realizado, nesta pesquisa, e os meios para desenvolvê-los foram estruturados, objetivando promover a assimilação de conhecimentos, e despertar atitudes e hábitos que impulsionassem o desenvolvimento psíquico dos alunos.

Nesse passo, notou-se que professores que nunca ministraram aulas para alunos da educação de jovens e adultos, considerem simples a estruturação das tarefas e os meios que foram propostos para desenvolvê-las, mas aqueles que ministram ou já ministraram matérias escolares para alunos da EJA ou do PROEJA, provavelmente, reconhecem as dificuldades de aprendizagem aqui relatadas, e conseguem visualizar o desenvolvimento dos alunos que participaram do experimento didático-formativo realizado.

5.7 Tarefa 4: aplicação do Teorema de Pitágoras I

A primeira tarefa de aplicação do Teorema de Pitágoras foi realizada no decorrer das aulas 31, 32 e 33. A tarefa foi proposta, conforme planejamento apresentado no Quadro 8.

Quadro 8 – Planejamento da quarta tarefa

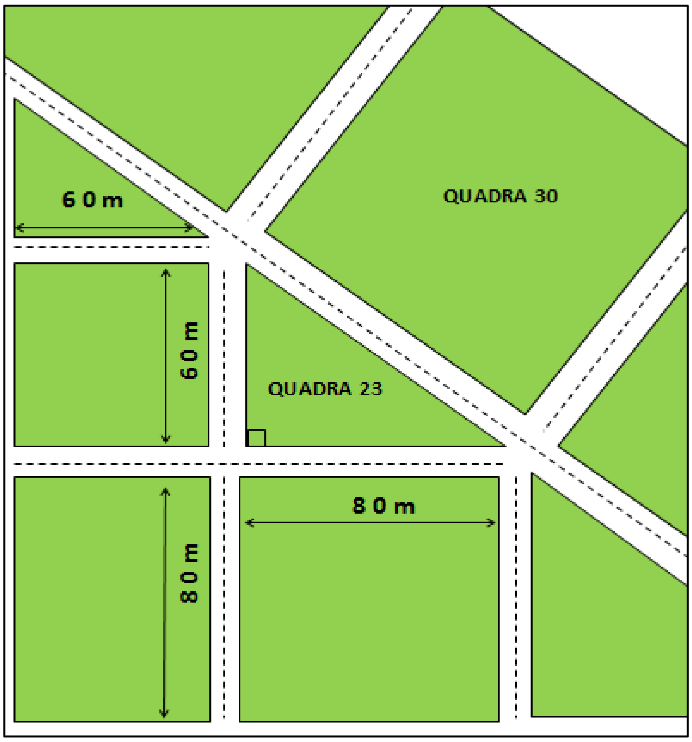
Tarefa 04 – Aplicação do Teorema de Pitágoras I	
Data:	10/05/2018 a 11/05/2018
Carga horária	3 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de situações problemas.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar situações propostas e aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução dos problemas.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: Plano de ensino (2018) (Apêndice A).

Catorze alunos realizaram as investigações em dupla, mediados pela professora e/ou colegas.

A tarefa apresentou cinco situações problemas. A primeira, que foi elaborada pela pesquisadora, questionou: Qual a área da quadra 30, sabendo que a mesma tem o formato de um polígono regular com comprimento igual ao lado maior da quadra 23?

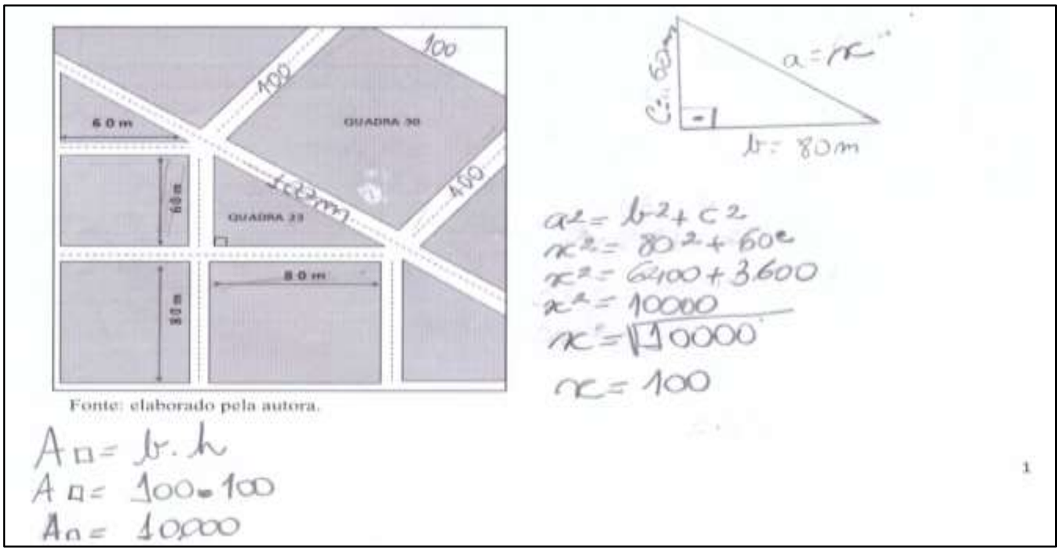
Figura 119 – Tarefa 4: ilustração da primeira situação-problema



Fonte: elaboração da autora (2018).

A maioria dos alunos apresentou facilidade ao aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular o lado maior da quadra 23, mas precisaram ser mediados ao calcular a área da quadra 30. A Figura 120 apresenta os cálculos efetuados pelo aluno L.

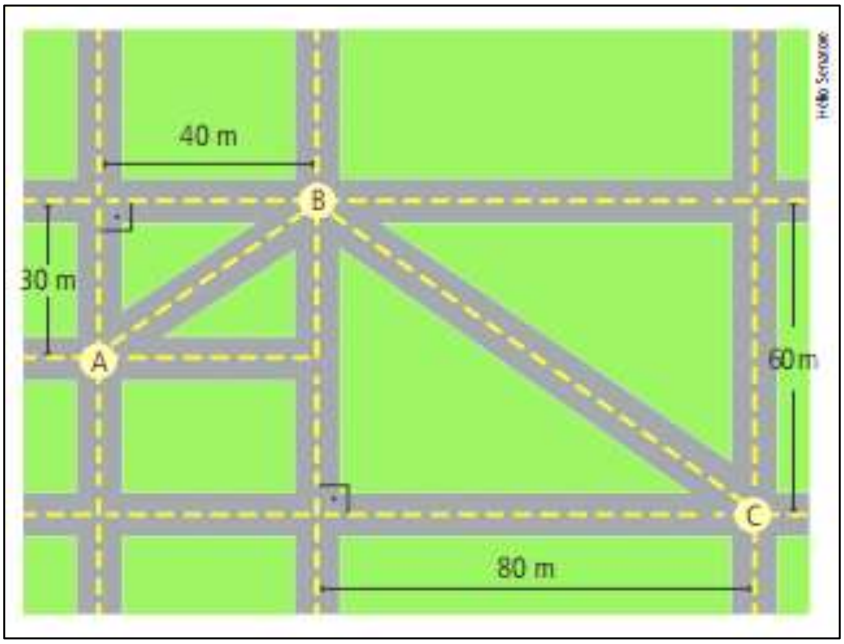
Figura 120 – Tarefa 4: primeira questão respondida pelo aluno L



Fonte: dados da pesquisa (2018).

A segunda questão, extraída de Andrini e Vasconcellos (2015, p. 191), abordou a seguinte situação: Uma pessoa percorre a trajetória de A até C, passando por B. Qual foi a distância percorrida?

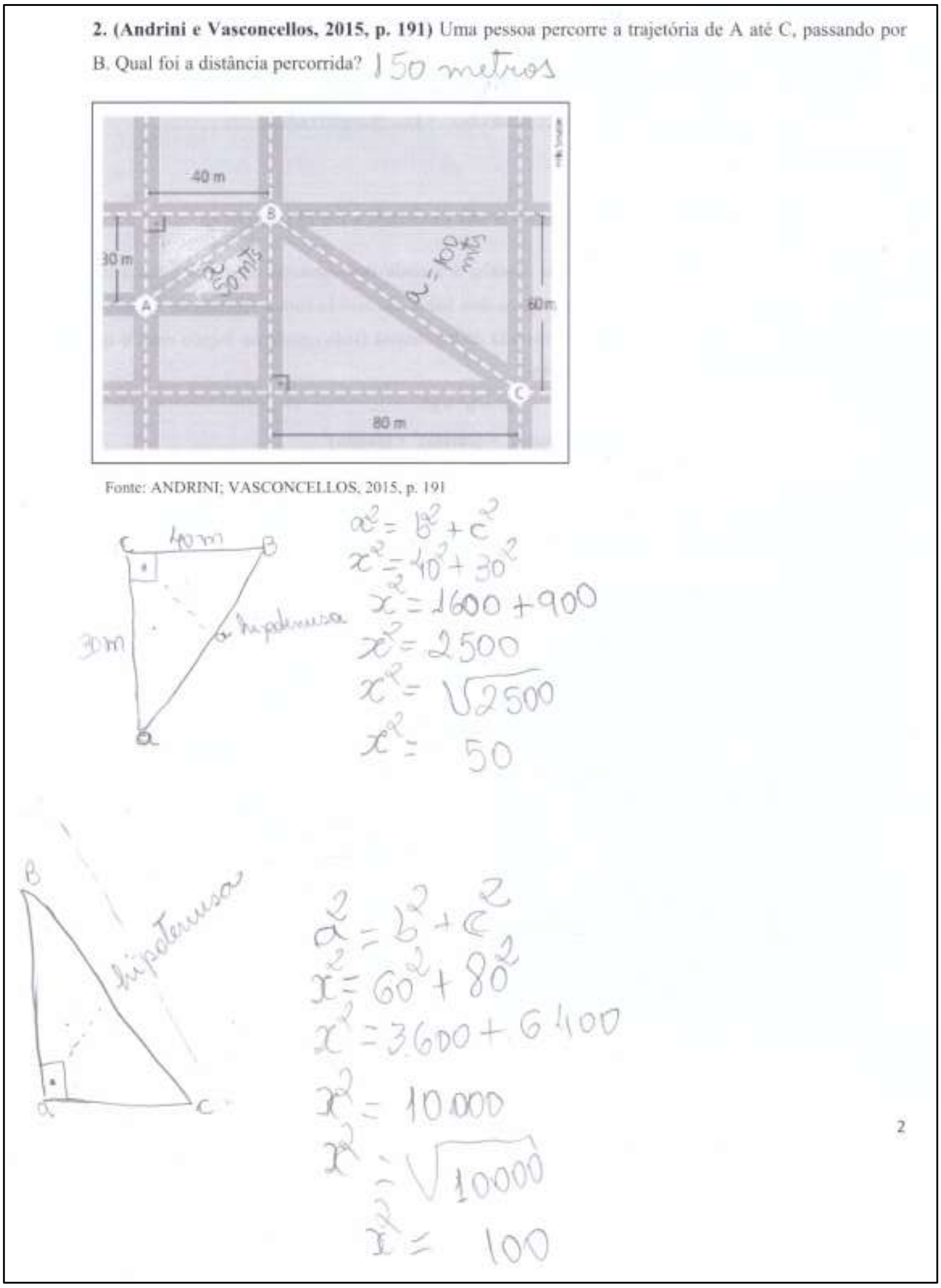
Figura 121 – Tarefa: ilustração da segunda situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 191).

Catorze alunos realizaram a tarefa, sendo que seis efetuaram os cálculos e responderam que a distância percorrida era 150 m, dois não responderam a questão, um calculou apenas a distância de A até B, três alunos efetuaram os cálculos corretamente, no entanto não responderam qual foi a distância percorrida, um aluno efetuou corretamente os cálculos, mas respondeu que a distância de A até C era 100 m, um aluno ao aplicar o Teorema de Pitágoras, mas não concluiu os cálculos, obtendo os valores de a = 10000 na trajetória de A até B, e a = 2500 na distância de B até C. A maioria dos alunos precisou de mediação para identificar a medida de 60 m do triângulo retângulo com vértices B e C. A Figura 122 ilustra a resolução feita pelo aluno B.

Figura 122 – Tarefa 4: segunda questão respondida pelo aluno B


2. (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 191) Uma pessoa percorre a trajetória de A até C, passando por B. Qual foi a distância percorrida? 150 metros

Fonte: ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015, p. 191

$a^2 = b^2 + c^2$
$x^2 = 40^2 + 30^2$
$x^2 = 1600 + 900$
$x^2 = 2500$
$x^2 = \sqrt{2500}$
$x^2 = 50$

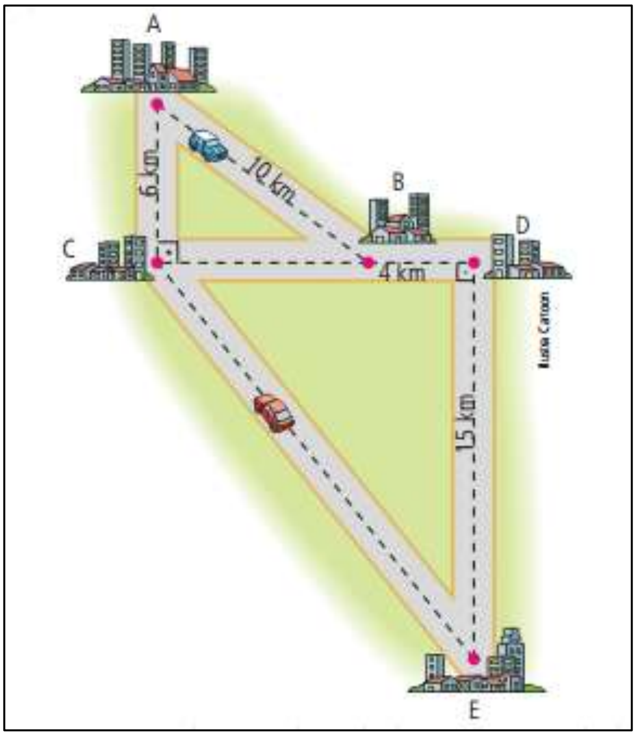
$a^2 = b^2 + c^2$
$x^2 = 60^2 + 80^2$
$x^2 = 3600 + 6400$
$x^2 = 10000$
$x^2 = \sqrt{10000}$
$x^2 = 100$

2

Fonte: dados da pesquisa (2018).

A terceira situação apresentada na tarefa, adaptada de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 197), foi a seguinte: Um carro parte da cidade A para a cidade C, passando por B. Um outro carro parte da cidade E igualmente para a cidade C, mas com o trajeto direto. Considere que os carros se deslocam à mesma velocidade. Qual dos carros chegará primeiro a cidade C?

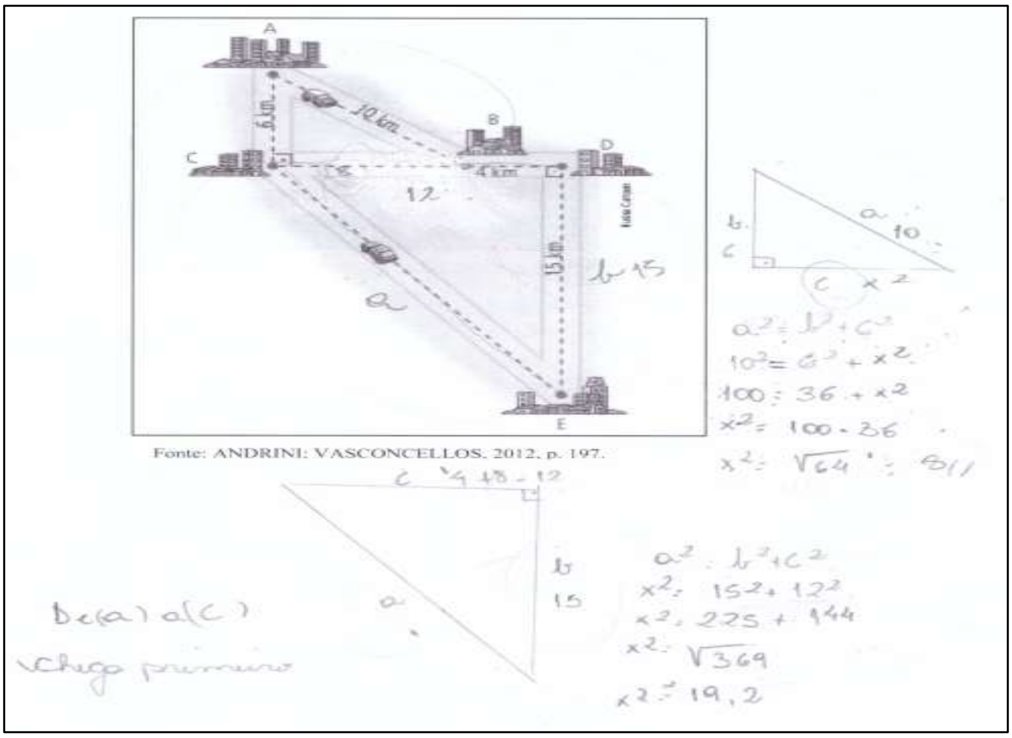
Figura 123 – Tarefa 4: ilustração da terceira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 197).

Nesta questão todos os alunos precisaram ser mediados em relação à distância das cidades D até C. Três alunos não tentaram respondera a questão, nove responderam corretamente, um calculou as distâncias, mas não respondeu qual carro chegará primeiro à cidade C, um aluno calculo incorretamente a distância percorrida pelo carro que partiu da cidade E. Figura 124 apresenta a resolução feita pelo aluno G.

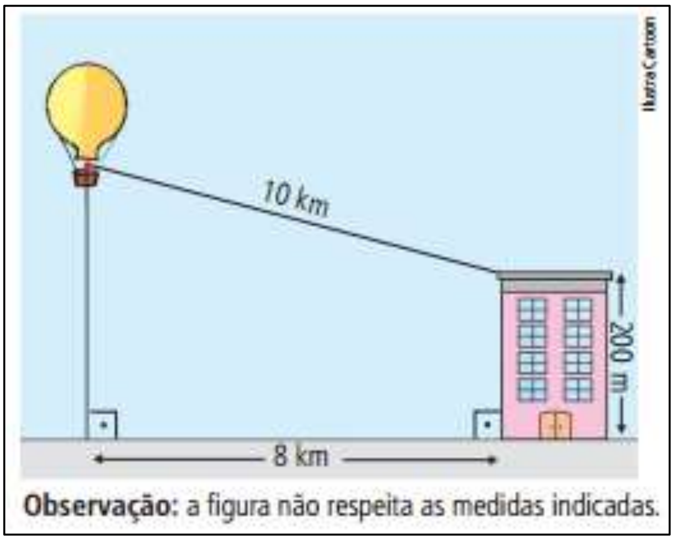
Figura 124 – Tarefa 4: terceira questão respondida pelo aluno G



Fonte: dados da pesquisa (2018).

A quarta situação investigada pelos alunos, adaptada de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 202), foi: A que altura do chão está o balão apresentado na figura abaixo?

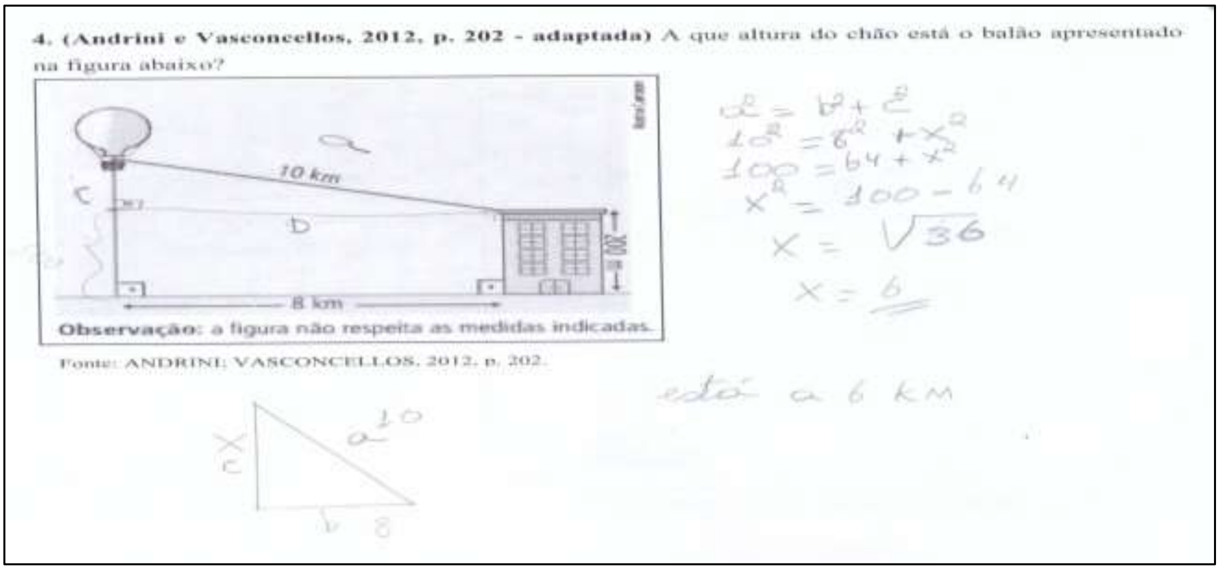
Figura 125 – Tarefa 4: ilustração da quarta situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 202).

Embora os alunos tenham calculado corretamente a altura do balão em relação a topo do prédio, a altura do balão em relação ao chão ficou incorreta em todas as tarefas. A Figura 126 apresenta a resposta do aluno C.

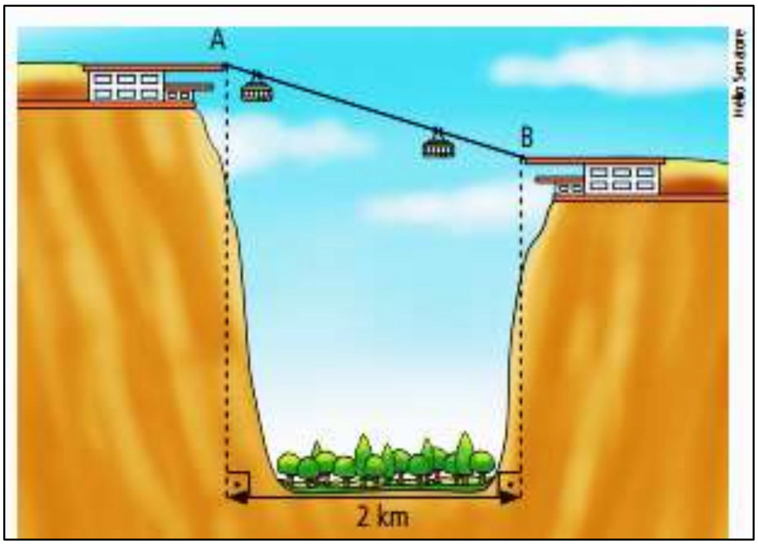
Figura 126 – Tarefa 4: quarta questão respondida pelo aluno C



Fonte: elaboração da autora (2018).

A quinta situação, adaptada de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 200), apresentou a situação a seguir: a altura da montanha A é 2800m, da montanha B 2200 m, a distância entre as duas montanhas 2 km, qual o comprimento do cabo de teleférico?

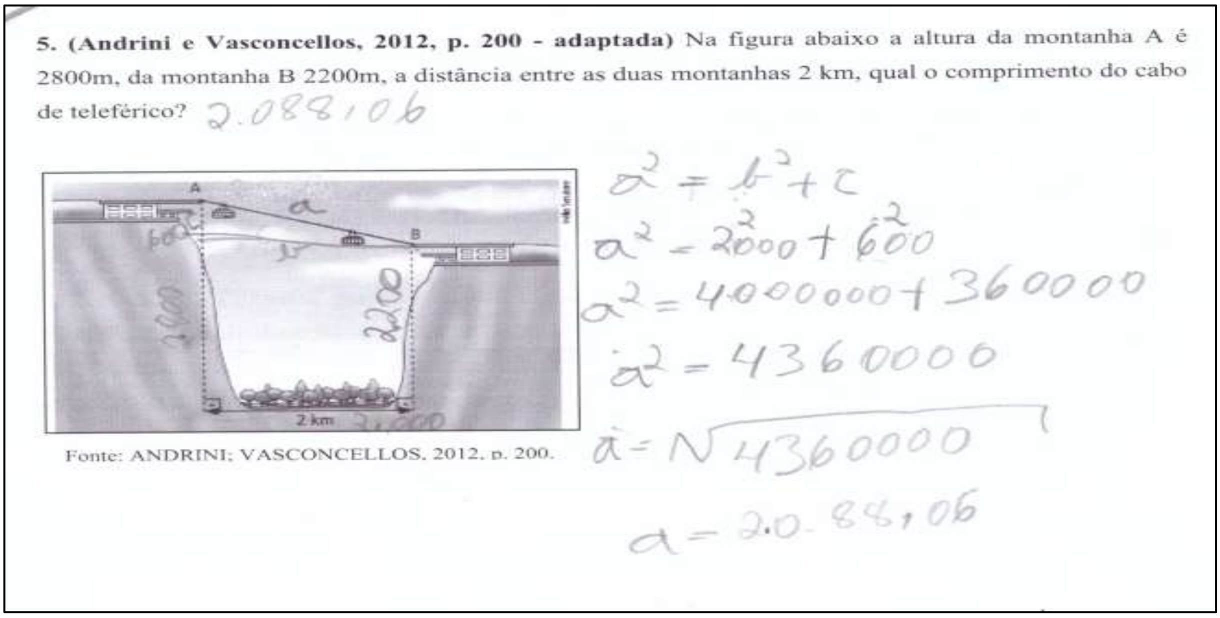
Figura 127 – Tarefa 4: ilustração da quinta situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 200).

Apesar desta questão sem semelhante a anterior, os alunos precisaram ser mediados em relação à altura das montanhas A e B. Cinco alunos não responderam a questão, sete calcularam incorretamente, pois ao calcular $a^2 = 4360000$ extraíram a raiz quadrada de $a = \sqrt{4360}$. A Figura 128 ilustra a resolução do aluno J. Nesta questão, como em outras propostas no decorrer da realização do experimento didático-formativo foi apresentado déficit de aprendizagem de conteúdos de matemática da educação básica.

Figura 128 – Tarefa 4: quinta questão respondida pelo aluno J



5. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 200 - adaptada) Na figura abaixo a altura da montanha A é 2800m, da montanha B 2200m, a distância entre as duas montanhas 2 km, qual o comprimento do cabo de teleférico? 2.088,06

Fonte: ANDRINI; VASCONCELLOS. 2012, p. 200.

$a^2 = b^2 + c$

$a^2 = 2000^2 + 600^2$

$a^2 = 4000000 + 360000$

$a^2 = 4360000$

$a = \sqrt{4360000}$

$a = 2.088,06$

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Os alunos não apresentaram dificuldades em aplicar o Teorema de Pitágoras ao resolver as situações propostas, contudo a maioria tentou responder as questões analisando apenas as imagens das figuras. Neste contexto, quando requeriam auxílio, eram convidados a ler o problema, e conseguiam compreender o que a situação propunha. Ao mediar à realização da tarefa os questionamentos dos alunos não eram respondidos, propunha-se que investigassem a situação-problema, por considerar que os “métodos que mais favorecem o desenvolvimento mental são os que levam o aluno a pensar, que o desafiam a ir sempre mais além” (MOYSÉS, 2012, p. 45).

As observações no decorrer da tarefa, as mediações e a análise das questões respondidas possibilitaram identificar o desenvolvimento dos alunos em relação aos conceitos. Diferente dos resultados da avaliação diagnóstica, aplicada no início do estudo, que permitiram identificar que a maioria dos alunos tentou ilustrar e responder as questões, aplicando conceitos empíricos, nessa tarefa, pôde-se analisar a aplicação de conceitos científicos para investigar e resolver as situações problemas. Como os alunos realizaram a tarefa em dupla, e mediados por colegas, não foi possível identificar, especificamente, quais alunos fizeram essa transição. Assim, a professora propôs uma tarefa individual de aplicação do Teorema de Pitágoras, conforme apresentado a seguir.

5.8 Tarefa 5: Aplicação do Teorema de Pitágoras II

Com o intuito de avaliar o desenvolvimento dos alunos a partir da realização das tarefas de estudo de trigonometria, foi proposta uma segunda atividade de aplicação do Teorema de Pitágoras, com questões semelhantes as tarefas anteriores, mas distinta da última tarefa, os alunos investigaram as situações problemas de forma individual. A tarefa foi elaborada, de acordo com o planejamento apresentado no Quadro 9.

Quadro 9 – Planejamento da quinta tarefa

Tarefa 05 - Aplicação do Teorema de Pitágoras II	
Data:	18/05/2018
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de situações problemas.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos e aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: Plano de ensino (2018).

A tarefa foi proposta a partir da aula 35, uma vez que na aula 34, os alunos participaram de uma atividade no auditório da instituição, realizada durante a 70ª Reunião Regional da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC) no Instituto Federal Goiano Campus Rio Verde, período de 15 a 19 de maio de 2018.

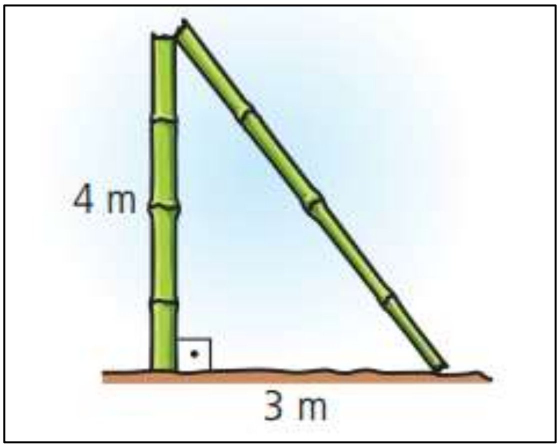
> A Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC) é uma entidade civil, sem fins lucrativos ou posição político-partidária, voltada para a defesa do avanço científico e tecnológico, e do desenvolvimento educacional e cultural do Brasil. Desde sua fundação, em 1948, a SBPC exerce um papel importante na expansão e no aperfeiçoamento do sistema nacional de ciência e tecnologia, bem como na difusão e popularização da ciência no País. Sediada em São Paulo, a SBPC está presente nos demais estados brasileiros por meio de Secretarias Regionais. Representa mais de 100 sociedades científicas associadas e mais de 6 mil sócios ativos, entre pesquisadores, docentes, estudantes e cidadãos brasileiros interessados em ciência e tecnologia. A SBPC participa ativamente de debates sobre questões que determinam os rumos das políticas de C&T e da educação no Brasil. Tem assento permanente no Conselho Nacional de Ciência e Tecnologia (CCT), órgão consultivo do Governo Federal para definição das políticas e ações prioritárias no campo da C&T. Possui representantes oficiais em mais de 20 conselhos e comissões governamentais. Periodicamente institui grupos de trabalhos – compostos por cientistas renomados em suas especialidades – com o objetivo de estudar e apresentar propostas para questões específicas de interesse nacional. Anualmente, a SBPC realiza diversos eventos, de caráter nacional e regional, com o objetivo de debater políticas públicas de C&T e difundir os avanços da ciência. Por meio das Secretarias Regionais, são realizadas ainda outras atividades de difusão científica. A entidade também contribui para o debate permanente das questões relacionadas à área por meio de diversas publicações, como o Jornal da Ciência, a revista Ciência e Cultura, o portal na internet, e a edição de livros sobre temas diversos relacionados à ciência brasileira (SBPC, 2018)[13].

Os alunos participaram das atividades da 70ª Reunião da SBPC, no dia 17 de maio de 2018, e retornaram as atividades da disciplina de Matemática IV, no dia 18 de maio de 2018. Assim, a segunda tarefa de aplicação do Teorema de Pitágoras foi aplicada no decorrer das aulas 35 e 36. O aluno **O** por motivos particulares desistiu do curso e o aluno **P** não compareceu às aulas, pois estava trabalhando. Desse modo, dos dezesseis alunos que participavam do experimento didático-formativo, catorze realizaram essa tarefa, a qual apresentou seis situações problemas.

A primeira situação, adaptada de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 202) questionou qual seria a altura de um bambu antes de partir-se a uma altura de 4 metros do chão, sendo que ao cair, a parte de cima tocou no chão a uma distância de 3 metros da base do bambu.

[13] SBPC - Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência. **Quem somos**. Disponível em: <http://portal.sbpcnet.org.br/a-sbpc/quem-somos/>. Acesso em: 19 ago. 2018.

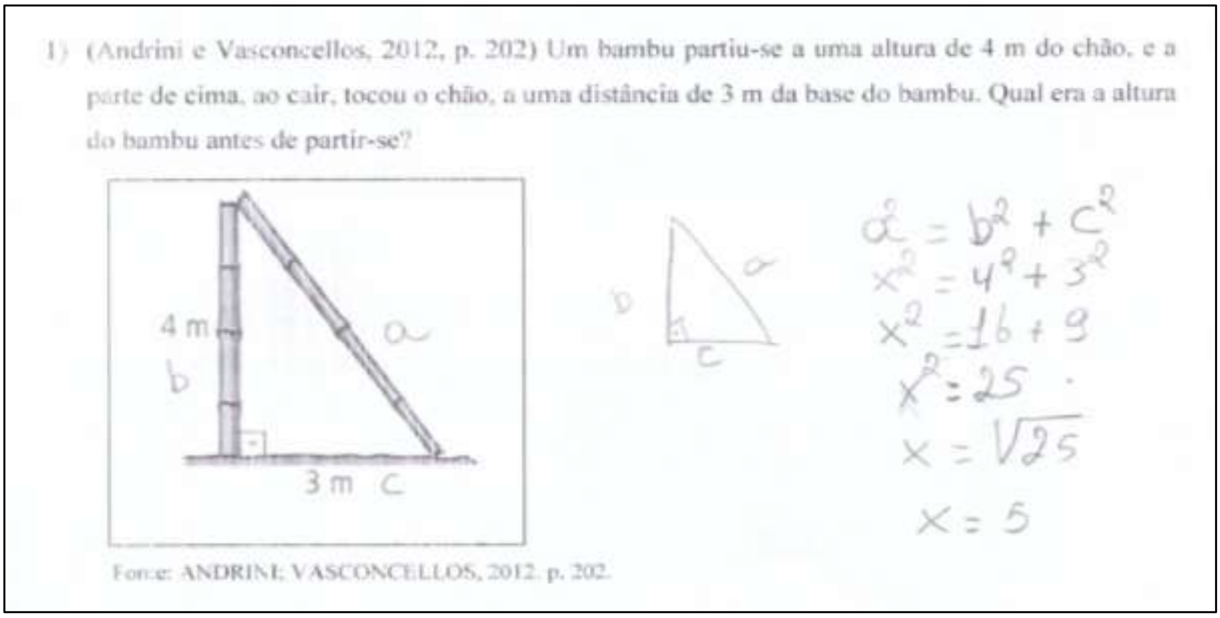
Figura 129 – Tarefa 5: ilustração da primeira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 202).

Treze alunos responderam à questão corretamente, destes três foram mediados pela professora e um mesmo com auxílio da professora não conseguiu resolver o problema. A Figura 130 apresenta a resposta dado pelo aluno C.

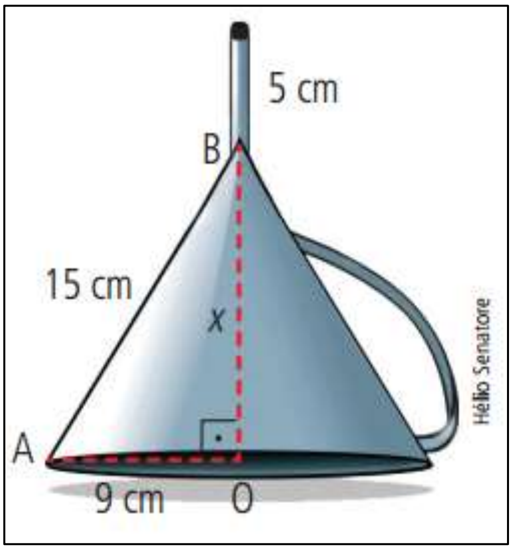
Figura 130 – Tarefa 5: primeira questão respondida pelo aluno C



Fonte: dados da pesquisa (2018).

A segunda situação, adaptada de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 198) apresentava a imagem de um funil com suas respectivas dimensões, e foi questionado: Qual é a altura do funil representado pela figura?

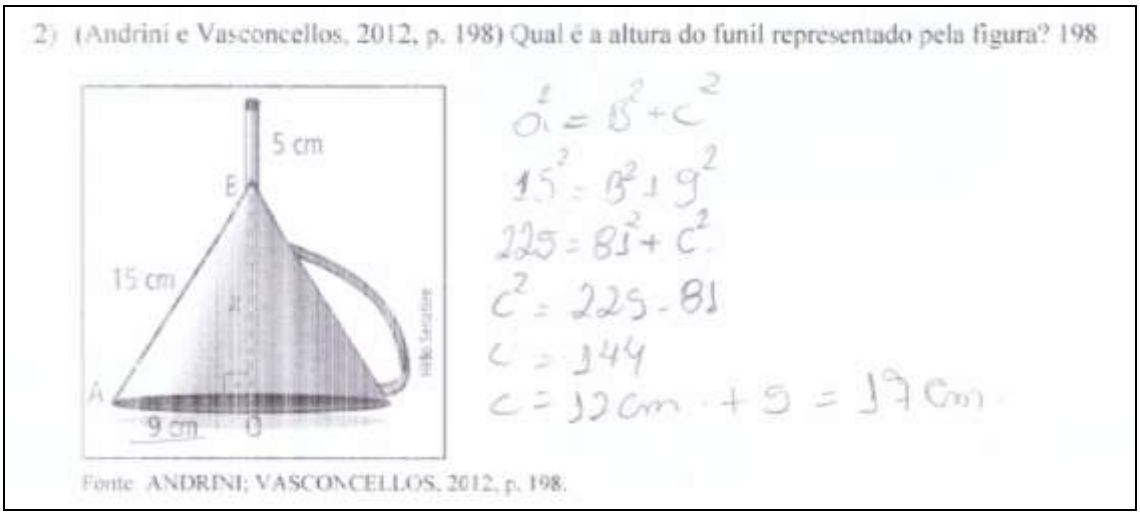
Figura 131 – Tarefa 5: ilustração da segunda situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 198).

Sete alunos determinaram corretamente a altura do funil, destes três solicitaram o auxílio da professora para encontrar o lado que correspondia a hipotenusa. Todos precisaram ser mediados em relação à altura total do funil. Quatro alunos responderam parcialmente à questão, calcularam os 12 cm de altura, mas não somaram ao valor 5 cm, informado na imagem. Três alunos calcularam incorretamente a questão. A Figura 132 ilustra os cálculos efetuados pelo aluno Q.

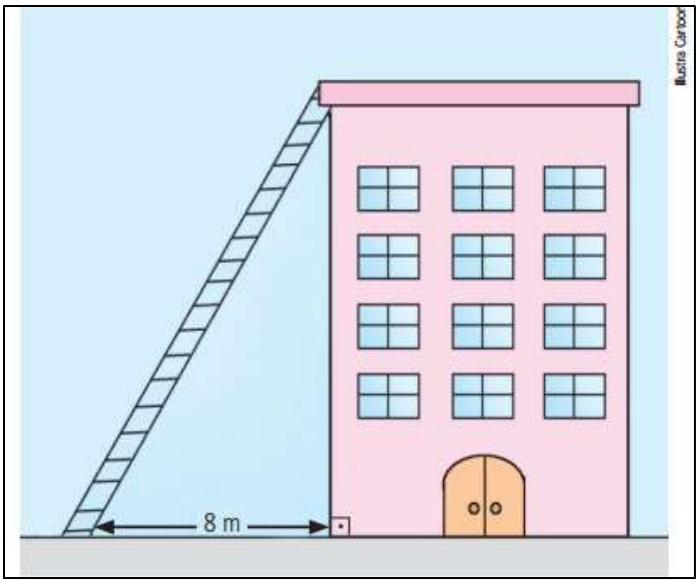
Figura 132 – Tarefa 5: segunda questão respondida pelo aluno Q



Fonte: dados da pesquisa (2018).

A terceira situação, extraída de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 188), apresentou uma escada encostada em um prédio de 15 m, e questionou qual era o comprimento da escada.

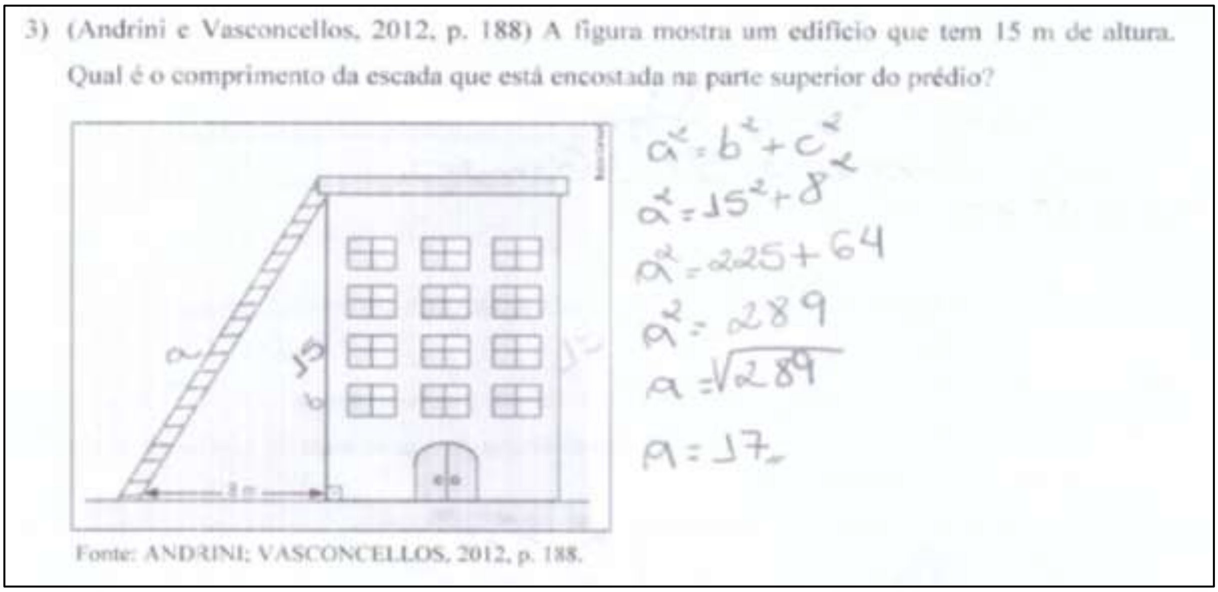
Figura 133 – Tarefa 5: ilustração da terceira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 188).

Treze alunos calcularam corretamente o comprimento da escada, destes três precisaram ser mediados, pois não conseguiram compreender qual o lado era a hipotenusa do triângulo retângulo investigado. Um aluno, mesmo mediado, não conseguiu responder à questão. A Figura 134 descreve a atividade respondida pelo aluno F.

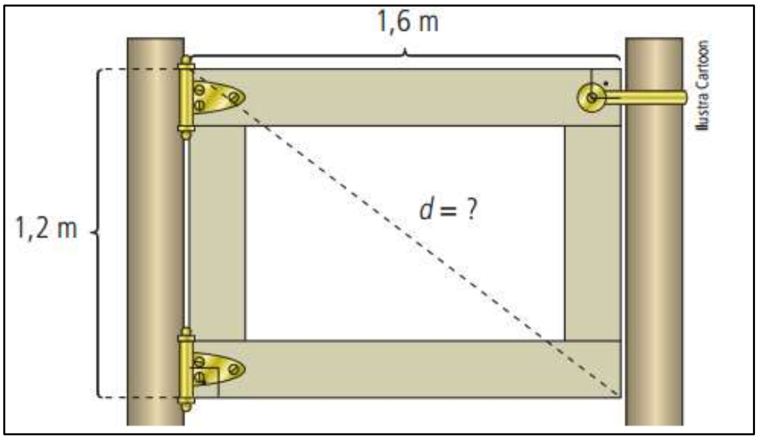
Figura 134 – Tarefa 5: terceira questão respondida pelo aluno F



Fonte: dados da pesquisa (2018).

A quarta questão apresentou a seguinte situação, extraída de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 198): Um fazendeiro quer colocar uma tábua em diagonal na sua porteira. Qual é o comprimento dessa tábua, se a folha da porteira mede 1,2 m por 1,6 m?

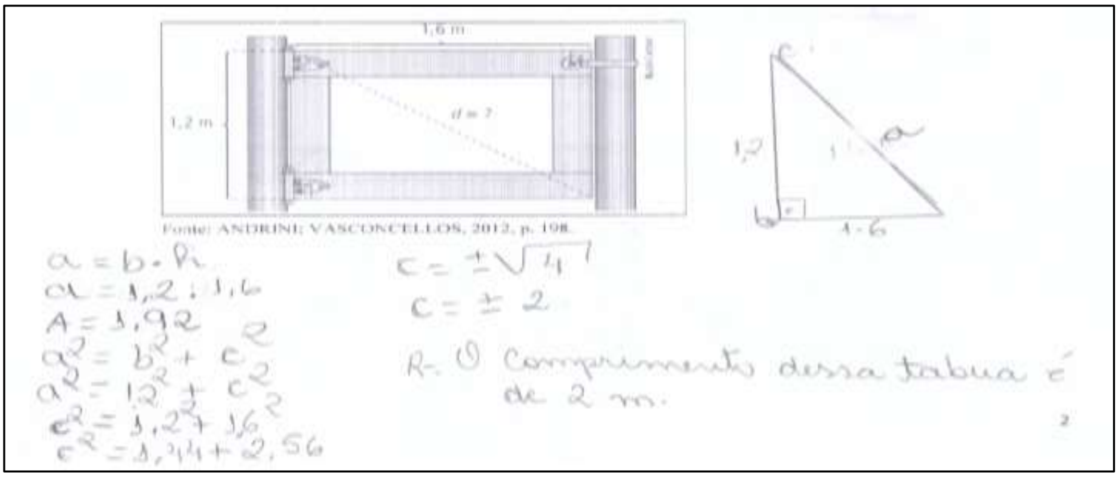
Figura 135 – Tarefa 5: ilustração da quarta situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 198).

Doze alunos calcularam corretamente o comprimento da tábua, destes um foi mediado pela professora. Um aluno não respondeu à questão, e um não aplicou corretamente o Teorema de Pitágoras. A Figura 136 mostra os cálculos realizados pelo aluno B.

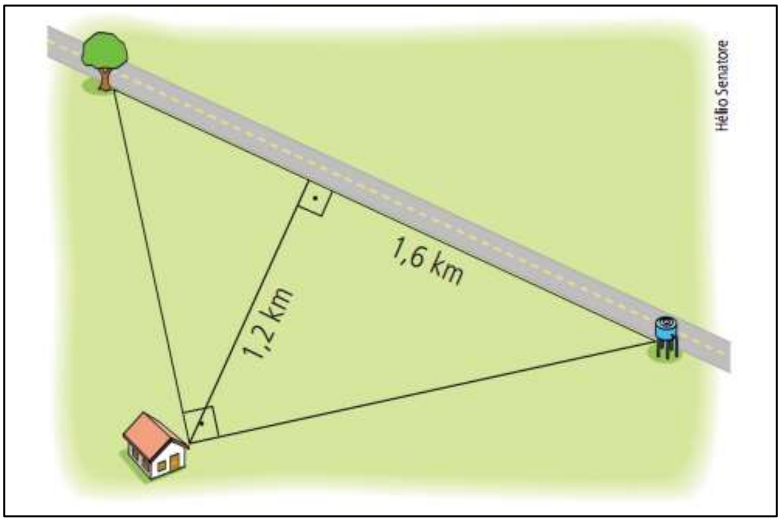
Figura 136 – Tarefa 5: quarta questão respondida pelo aluno B



Fonte: dados da pesquisa (2018).

A quinta questão, adaptada de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 197) expôs uma casa que se encontrava a 1,2 km de uma estrada, 1,6 km a direta tinha uma caixa d'água. Foi questionado: qual a distância entre a casa e a caixa d'água.

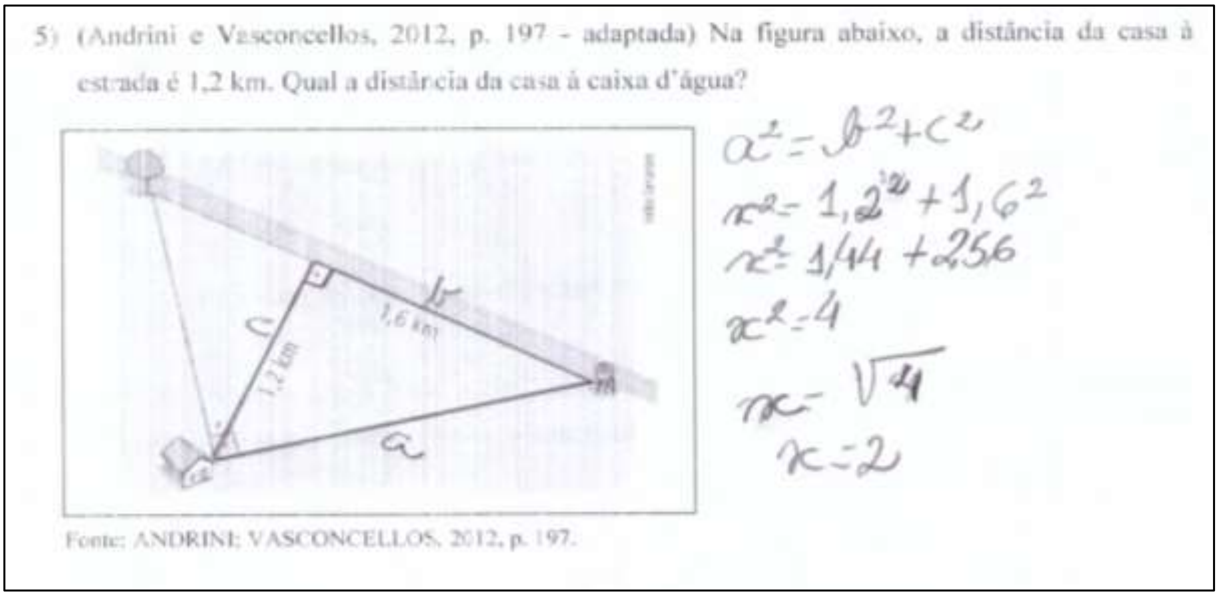
Figura 137 – Tarefa 5: ilustração da quinta situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 197).

Treze alunos calcularam corretamente o problema, destes dois foram mediados pela professora, e um aluno fez a seguinte anotação: A distância da casa a caixa d'água é de 5 metros. Um aluno não respondeu à questão. A Figura 138 exibe os cálculos efetuados pelo aluno L.

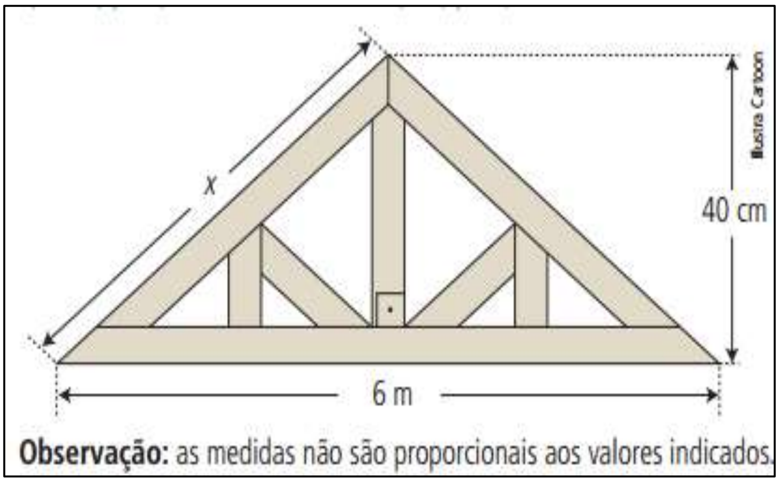
Figura 138 – Tarefa 5: quinta questão respondida pelo aluno L



Fonte: dados da pesquisa (2018).

A sexta questão aduziu a seguinte proposta, extraída de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 198): Calcule o comprimento x nesta estrutura de telhado, que tem a forma de um triângulo isósceles.

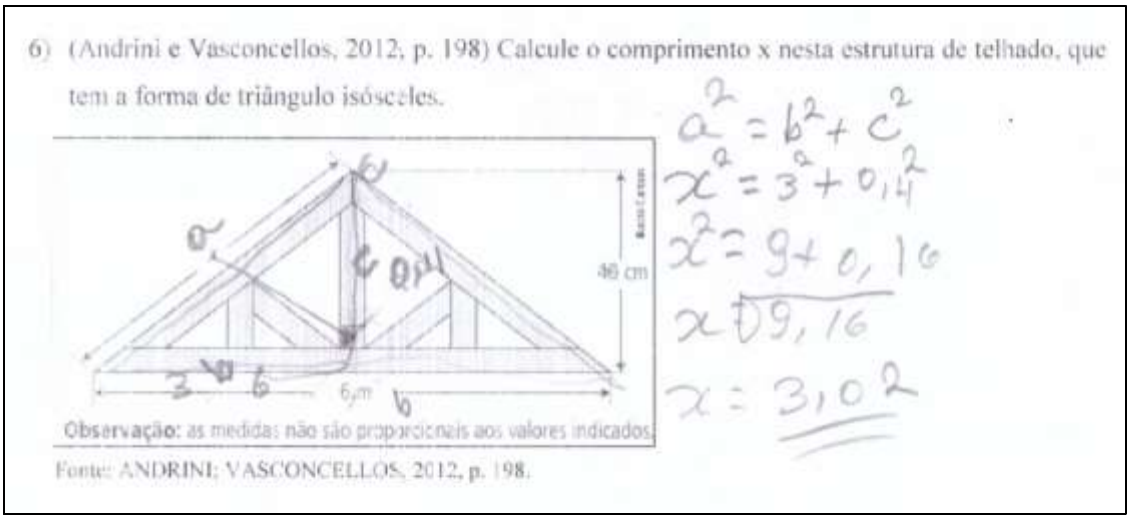
Figura 139 – Tarefa 5: ilustração da sexta situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 198).

Doze alunos calcularam corretamente o valor de x, destes apenas um não foi mediado pela professora em relação a medida da base do telhado. Um aluno não respondeu à questão, e um respondeu incorretamente. A Figura 140 apresenta as anotações e cálculos feitos pelo aluno M.

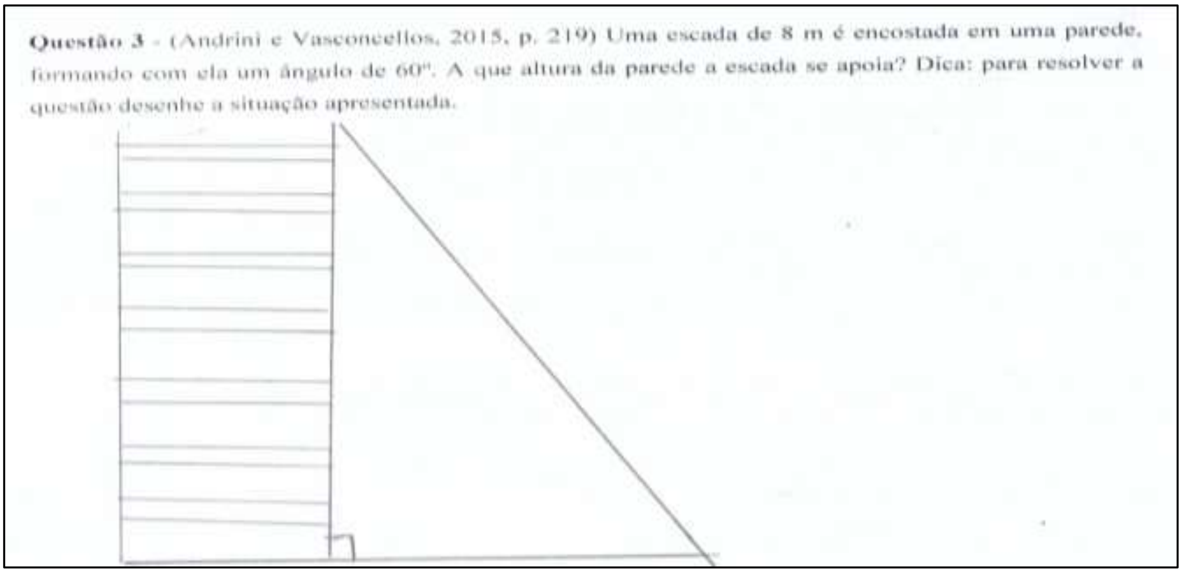
Figura 140 – Tarefa 5: sexta questão respondida pelo aluno M



Fonte: dados da pesquisa (2018).

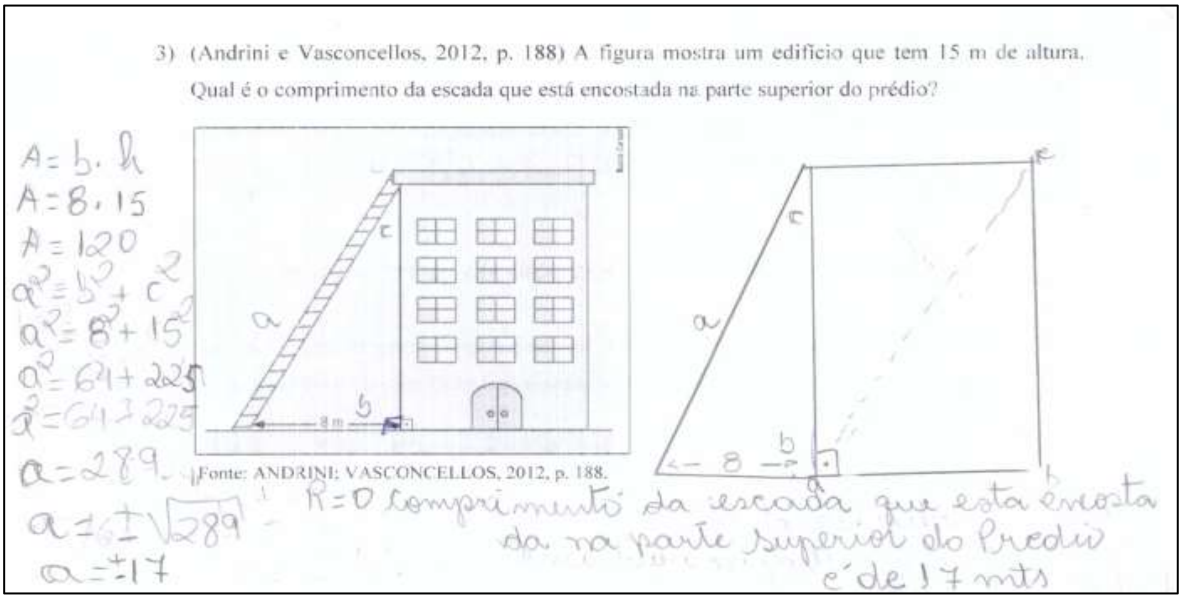
Analisando as tarefas realizadas pelos alunos, foi possível verificar que o aluno B reconstruiu os triângulos retângulos ilustrados nas figuras apresentadas nas situações problemas, o que possibilitou identificar aquisições psicológicas superiores, comparando com os resultados da avaliação diagnóstica, em que o aluno apenas tentou ilustrar as questões, conforme as Figuras 141 e 142.

Figura 141 – Terceira questão da avaliação diagnóstica ilustrada pelo aluno B



Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 142 – Terceira questão da quinta tarefa respondida pelo aluno B



Fonte: dados da pesquisa (2018).

No entanto, ao realizar as tarefas com a utilização das ferramentas do *software* Geogebra, o aluno B se mostrava impaciente e sempre reclamava, acredito que problemas pessoais eram responsáveis pelas atitudes, pois durante as aulas comentava que o pai estava doente. Apesar das reclamações, com mediação realizava as tarefas propostas.

Nesse contexto, as críticas constantes em relação ao tamanho das letras das tarefas, levou-me a acreditar que apresentava baixa visão, sendo assim, sugeri que procurasse um oftalmologista. Depois de alguns dias, o aluno compareceu a aula e informou que naquele dia não conseguiria realizar as tarefas, porque tinha feito exames de vista, após adquirir os óculos, não reclamou mais das letras das tarefas e mostrou-se mais confiante ao realizar as atividades propostas. Devido à internação do pai, o aluno não compareceu as últimas aulas do semestre.

A situação da baixa visão do aluno B levou-me a refletir sobre a importância de considerar características dos alunos ao organizar as atividades que serão propostas durante as aulas, a simples proposição de frases com letras de tamanhos diferentes no questionário preliminar poderia ter detectado a situação referente.

Retomando a questão da realização da tarefa, somente um aluno não concluiu a tarefa de aplicação do Teorema de Pitágoras, em razão de ir embora antes do término da aula. Em geral, esse aluno se dedicava as atividades propostas nas aulas de quinta-feira, mas nas de sexta-feira sempre desistia das tarefas, justificando que precisava ir embora. As aulas ministradas nesse dia da semana ocasionavam problemas desse tipo. Os alunos ansiosos, que não se concentravam, justificando-se em não poder ficar até o final da aula, devido a essa situação, passei propor tarefas a serem concluídas até às 22h, apesar do horário de término das aulas do período noturno ser às 22h20min.

A situação de ausência às aulas impossibilitou acompanhar o desenvolvimento de alguns alunos até o final do experimento didático-formativo, todavia, comparada com outras turmas da educação de jovens e adultos, em que eu atuava como professora de Matemática, o percentual de frequência dos alunos do 4º período era superior.

Nesse passo, é possível que as ações propostas no decorrer da realização do experimento didático-formativo, possam ter contribuído com a maior frequência dos alunos as aulas da disciplina de Matemática IV. Embora as situações de ausência citadas, as observações durante a aplicação da tarefa possibilitaram identificar que a maioria dos alunos se apropriaram dos conceitos do Teorema de Pitágoras, transitando dos conceitos empíricos (espontâneos) baseados em experiências socialmente adquiridas, para os conceitos científicos adquiridos no decorrer desse experimento mediante ações propostas durante a realização das tarefas de estudo.

> A questão da formação de conceitos insere-se nos trabalhos de Vygotsky e seus colaboradores (notadamente Luria) como uma extensão das usas próprias pesquisas sobre o processo de internalização. As principais conclusões a que chegou emanaram do confronto que estabeleceu entre o desenvolvimento dos conceitos espontâneos e científicos. Considerou os primeiros como sendo aqueles que a criança aprende no seu dia a dia, nascidos do contato que ela possa ter tido com determinados objetos, fatos, fenômenos etc., dos quais ela não tem sequer consciência. E os últimos, como sendo aqueles sistematizados e transmitidos intencionalmente, em geral, segundo uma metodologia específica. São, por excelência, os conceitos que se aprendem na situação escolar (MOYSÉS, 2012, p. 35).

Segundo Moysés (2012, p. 36), na situação escolar, o professor tem uma tarefa importante na formação dos conceitos científicos, pois ao contrário do espontâneo, sua "apreensão exige que seja intencionalmente trabalhado num processo de interação professor/aluno. Ou seja, implica reconstrução do saber mediante estratégias adequadas, nas quais o professor atue como mediador entre o aluno e o objeto de conhecimento".

5.9 Tarefa 6: investigando relações entre elementos de um triângulo retângulo

A tarefa foi proposta no decorrer das aulas 37, 38 e 39, de acordo com o planejamento apresentado no Quadro 10.

Quadro 10 – Planejamento da sexta tarefa

Tarefa 06 – Investigando relações entre elementos de um triângulo retângulo	
Data:	24/05/2018
Carga horária	3 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Triângulo retângulo, hipotenusa, cateto oposto e adjacente.
Objeto Geral	Reconhecer os lados de um triângulo retângulo como hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente.
Recursos	*Software* Geogebra e tarefa de estudo.
Procedimentos	Construir um triângulo retângulo, determinar as medidas de seus ângulos e lados, anotar as medidas da hipotenusa e dos catetos. Investigar as relações entre os catetos oposto e adjacente.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

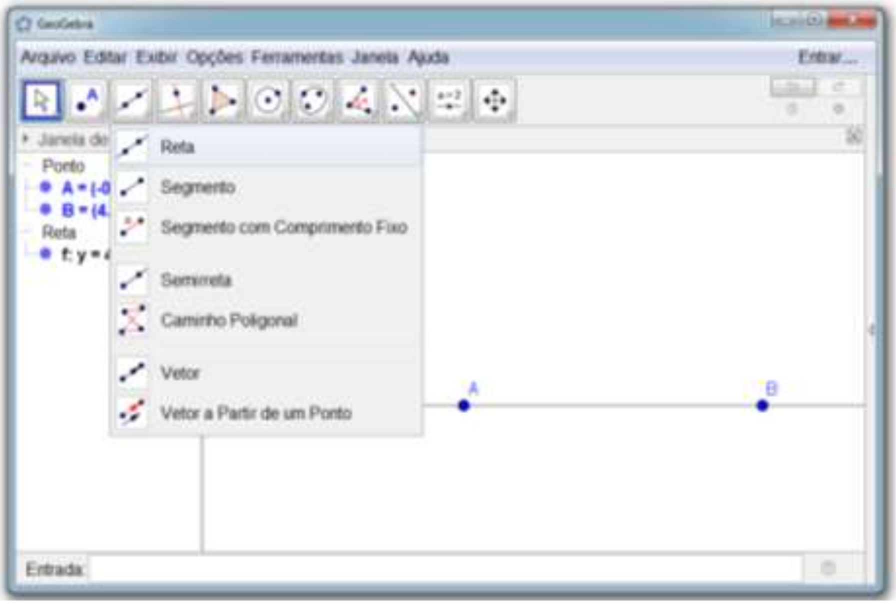
Fonte: Plano de ensino (2018) (Apêndice A).

Os alunos realizaram a tarefa, seguindo as orientações apresentadas a seguir.

Os lados de um triângulo retângulo são denominados de hipotenusa e catetos. **Hipotenusa** é o lado oposto ao ângulo de 90º (ângulo reto). Os lados que formam o ângulo reto são os catetos. Os catetos podem ser adjacentes ou opostos dependendo de sua posição em relação aos ângulos agudos. **Cateto oposto** é o lado que fica oposto ao ângulo agudo analisado, **cateto adjacente** é o lado que forma com a hipotenusa o ângulo agudo.

Inserindo uma reta: acesse a ferramenta Reta e selecione duas posições da Janela de Visualização.

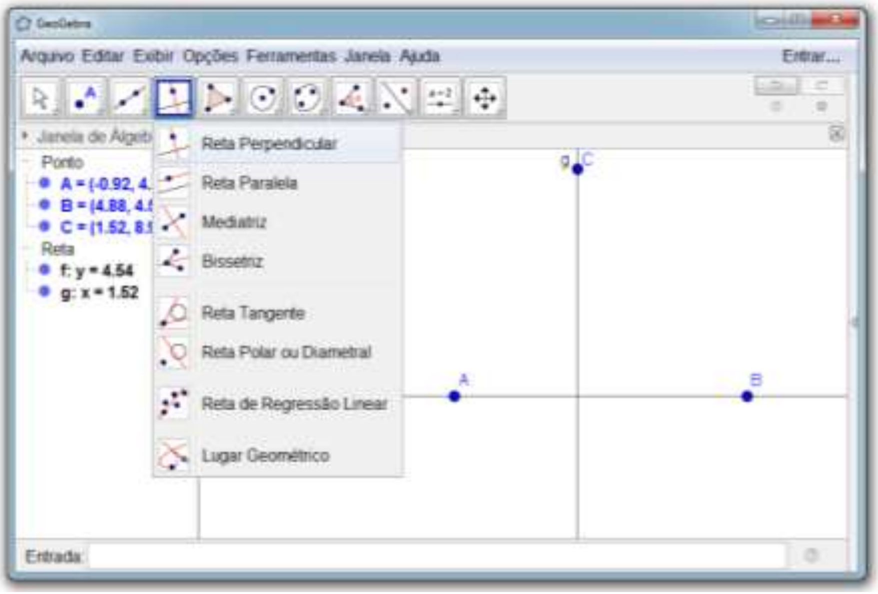
Figura 143 – Inserindo uma reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo uma reta perpendicular: acesse a ferramenta Reta Perpendicular, insira um ponto C e depois selecione o segmento de reta AB.

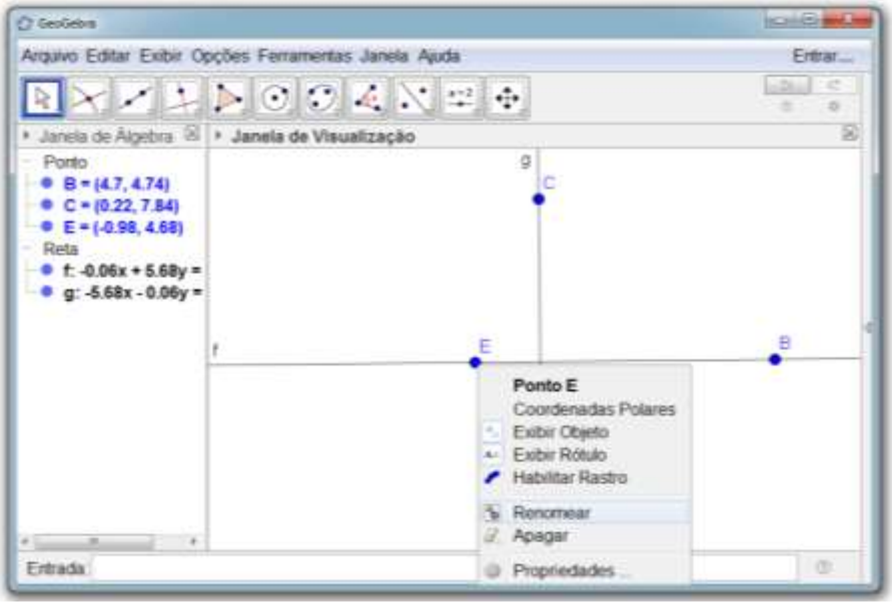
Figura 144 – Inserindo uma reta perpendicular



Fonte: elaboração da autora (2018).

Renomeando o ponto A: selecione o ponto A com o botão direito do *mouse*, acesse a ferramenta renomear e altere seu rótulo para E.

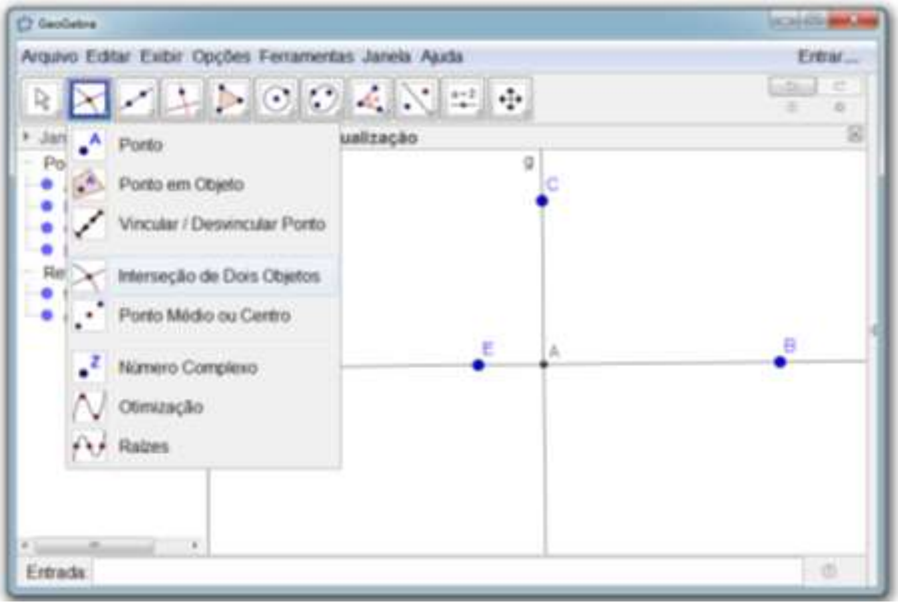
Figura 145 – Renomeando o ponto A



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserido um ponto de interseção: acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecione as retas f e g.

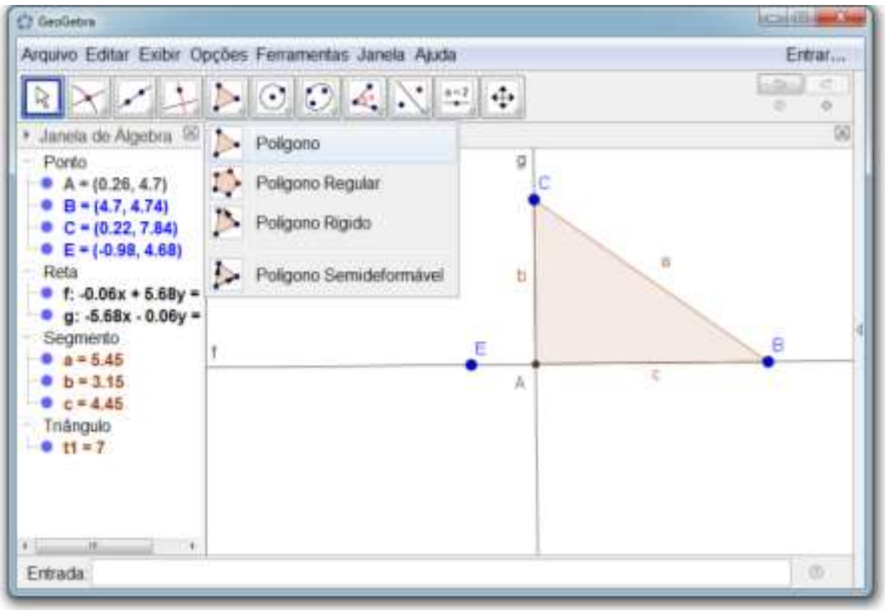
Figura 146 – Inserido um ponto na interseção das retas f e g



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo um polígono: acesse a ferramenta Polígono, selecione os pontos A, B e C, e então, o ponto A novamente.

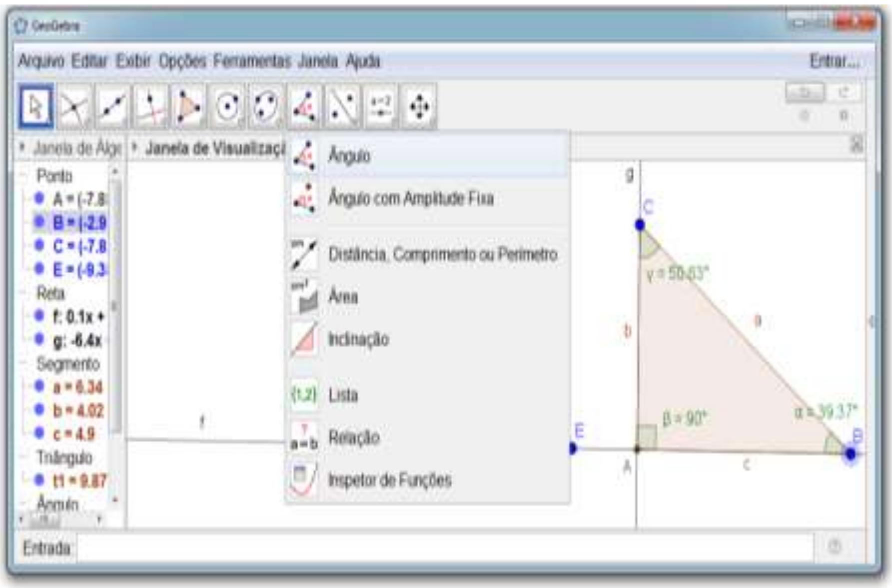
Figura 147 – Inserido um polígono



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando a amplitude (medida) dos ângulos internos do triângulo: acesse a ferramenta Ângulo, selecione os pontos BAC, nessa ordem, em seguida repita o procedimento para os pontos ACB, e CBA.

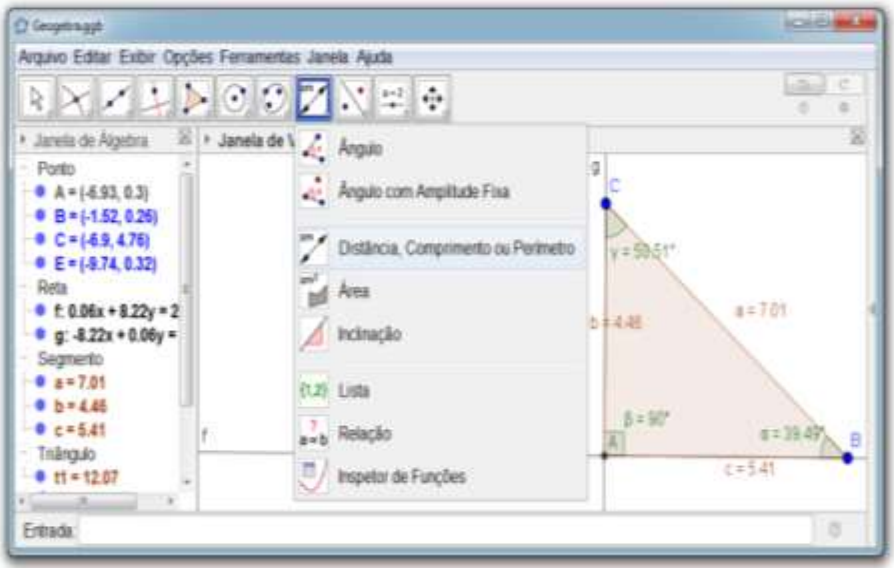
Figura 148 - determinando a amplitude dos ângulos internos do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando a medida dos lados do triângulo: acesse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, selecione os segmentos de reta e determine a medida de todos os lados do triângulo ABC.

Figura 149 - Determinando a medida dos lados do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

Concluída a construção e determinadas as medidas dos lados do triângulo retângulo, e as amplitudes dos ângulos, os alunos iniciaram investigações com o intuito de preencher uma tabela com as medidas da hipotenusa, dos catetos oposto e adjacente dos ângulos agudos γ e α, e responderem as seguintes perguntas: Que relações podem ser observadas entre as medidas da hipotenusa, dos catetos adjacente e oposto dos ângulos γ e α? As relações obeservadas entre as medidas da hipotenusa, dos catetos adjacente e oposto dos ângulos γ e α se mantiveram? Por meio das investigações realizadas é possível afirmar que as relações entre a hipotenusa, os catetos adjacente e oposto dos ângulos γ e α são válidas para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Porque? Catorze alunos realizaram a tarefa, as observações possibillitaram identificar que todos construíram o triângulo retângulo.

Entretanto, analisando as tarefas, verificou-se que apenas oito alunos preencheram a tabela e sete responderam as questões. A partir dessa análise, baseando-se no experimento formativo de Davydov (1988), passou-se, por meio da comunicação, a mediar novas investigações.

Inicialmente foi solicitado aos alunos que fizessem a leitura das definições de hipotenusa, cateto adjacente e oposto, apresentadas na primeira página da tarefa. Como já mencionado neste trabalho, a maioria dos alunos não recorria às definições apresentadas na tarefa ao tentar realizara as atividades e quando solicitado, não conseguiam relacionar as definições aos objetos.

Em seguida foi necessário mostrar na construção que lado do triângulo retângulo correspondia a hipotenusa, e explicar quais lados eram o cateto adjacente, e o cateto oposto em relação ao ângulo analisado.

Posteriormente com o objetivo de modificar as medidas, os alunos alteraram o tamanho do triângulo, em seguida classificaram novamente os lados como hipotenusa, cateto adjacente e oposto.

Essas ações foram repetidas várias vezes, desde modo os alunos se apropriaram dos conceitos de hipotenusa, cateto adjacente e cateto oposto e responderam as questões. As figuras 150 ilustra a tarefa respondida pelo aluno A.

Figura 150 – Tarefa 6 respondida pelo aluno A

8. Preencha a tabela com a medida da hipotenusa, do cateto oposto e do cateto adjacente dos ângulos agudos γ e α.

Catetos adjacentes, catetos opostos e hipotenusa			
Ângulos agudos	Hipotenusa	Cateto adjacente	Cateto oposto
γ	8,98	4,31	7,88
α	8,98	7,88	4,31

9. O que pode ser observado entre os valores do cateto adjacente e oposto dos ângulos γ e α?

o cateto adjacente y e 4,31 do o mesmo valor do cateto oposto a que e 4,31

10. Mova o ponto C aumentando e diminuindo o tamanho do triângulo retângulo. As relações entre os catetos adjacentes e opostos dos ângulos γ e α se mativeram? Justifique sua resposta.

Da o mesmo valor.

11. Pode-se afirmar que as relações entre os catetos adjacentes e opostos dos ângulos γ e α são válidas para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Justifique su resposta.

Sim, o mesma cateto adjacentes de um e o mesma medida do cateto oposto do outro.

Fonte: dados da pesquisa (2018).

De acordo com o ponto de vista de Davydov (1988, p. 188) o experimento formativo é um método que

> se baseia na organização e reorganização de novos programas de educação e ensino e dos procedimentos para concretizá-los. O ensino e a educação experimentais não são implementados por meio da adaptação de um nível existente, já formado de desenvolvimento mental [...], mas sim utilizando, por meio da comunicação do professor [...], procedimentos que formam ativamente nelas o novo nível de desenvolvimento das capacidades (DAVYDOV, 1988, p. 188).

A comunicação ao mediar à realização da tarefa foi utilizada com o intuito de despertar zonas de desenvolvimento proximal e impulsionar um novo nível desenvolvimento das capacidades.

5.10 Tarefa 7: Investigando razões trigonométricas em triângulos retângulos semelhantes

A investigação de razões trigonométricas foi proposta no decorrer das aulas 40, 41, 42, 43, 44 e 45, conforme planejamento apresentado no quadro 11:

Quadro 11 – Planejamento da sétima tarefa

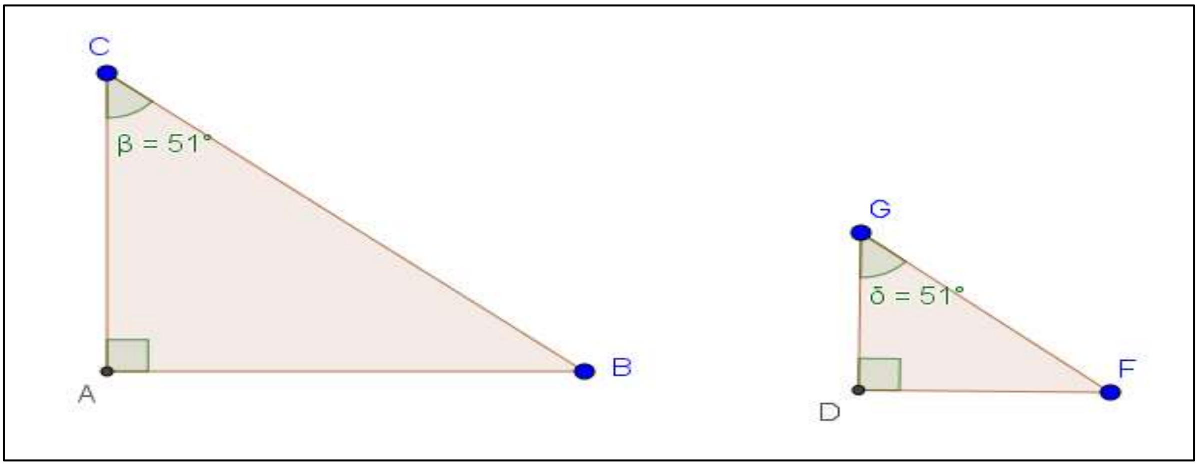
Tarefa 07 – Investigando razões trigonométricas em triângulos retângulos semelhantes	
Data:	07/06/2018 à 15/06/2018
Carga horária	6 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Semelhança entre triângulos retângulos, razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Reconhecer as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente a partir de investigações em triângulos retângulos semelhantes.
Recursos	*Software* Geogebra e tarefa de estudo.
Procedimentos	Construir triângulos retângulos semelhantes a partir de semirretas, retas perpendiculares e pontos, determinar as medidas dos lados, e a amplitude dos ângulos do triângulo ADF. Calcular as razões entre os lados do triângulo ADF. Investigar as relações entre as razões dos triângulos construídos.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização das atividades e das questões das tarefas/monitoramento, observação e registro em diário pessoal.

Fonte: Plano de ensino (2018) (Apêndice A).

Inicialmente, a tarefa apresentou as seguintes informações:

Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, os dois triângulos são semelhantes.

Figura 151 – Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: elaboração da autora (2018).

Em todos os triângulos retângulos semelhantes à razão entre a medida do cateto oposto de um ângulo agudo e a medida da hipotenusa será sempre constante. Essa razão constante é chamada de seno do ângulo.

Considerando os triângulos ABC e DFG, tem-se que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{FG} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = sen(51°)$$

Da semelhança de triângulos, tem-se outra razão constante, chamada de cosseno de um ângulo, que é a razão entre a medida do cateto adjacente do ângulo agudo e a medida da hipotenusa.

Assim, considerando os triângulos ABC e DFG, tem-se que:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DG}{FG} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \cos(51°)$$

Outra razão constante entre triângulos semelhantes é a razão entre o cateto oposto de um ângulo agudo e o cateto adjacente deste mesmo ângulo, chamada de tangente do ângulo.

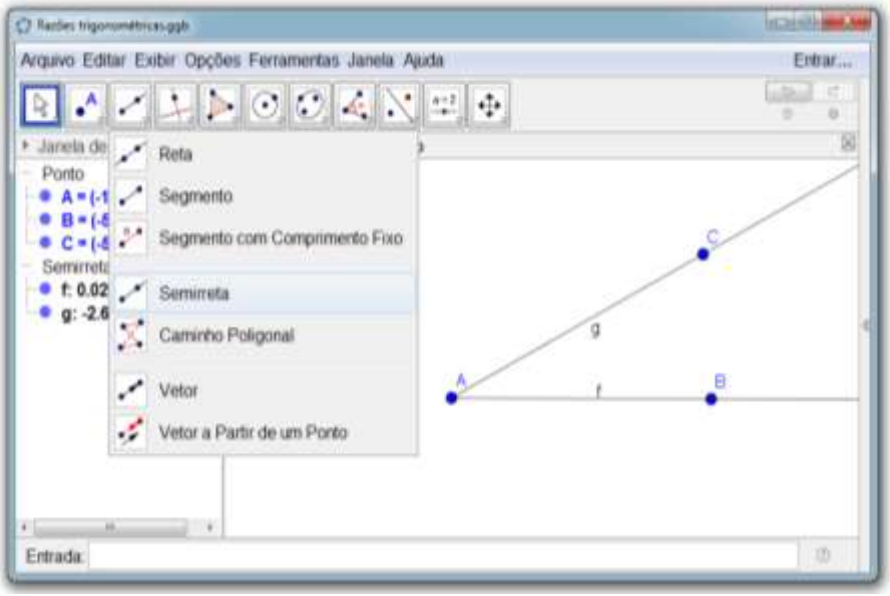
Portanto, considerando os triângulos ABC e DFG, tem-se que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DF}{DG} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = tg(51°)$$

Dos dezesseis alunos que, inicialmente, participavam do experimento didático-formativo, um trancou o curso por motivos pessoais e um que estava de licença médica retornou as aulas. Desse modo, esses dezesseis alunos construíram a figura geométrica a ser investigada, conforme etapas a seguir.

Inserindo semirretas: acesse a ferramenta Semirreta e insira duas semirretas com origem no ponto A.

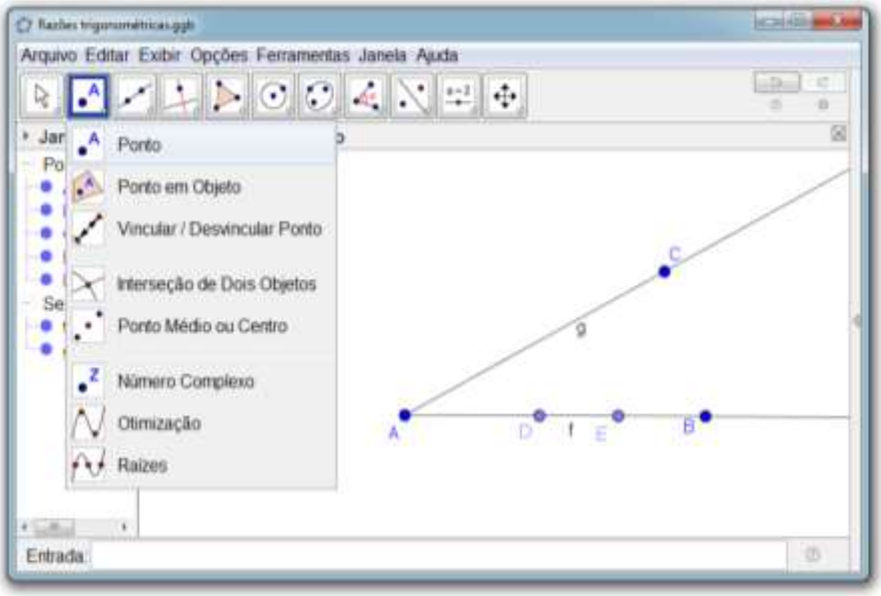
Figura 152 - Inserindo semirretas



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo os pontos D e E: acesse a ferramenta Ponto e insira dois pontos sobre o seguimento de reta AB.

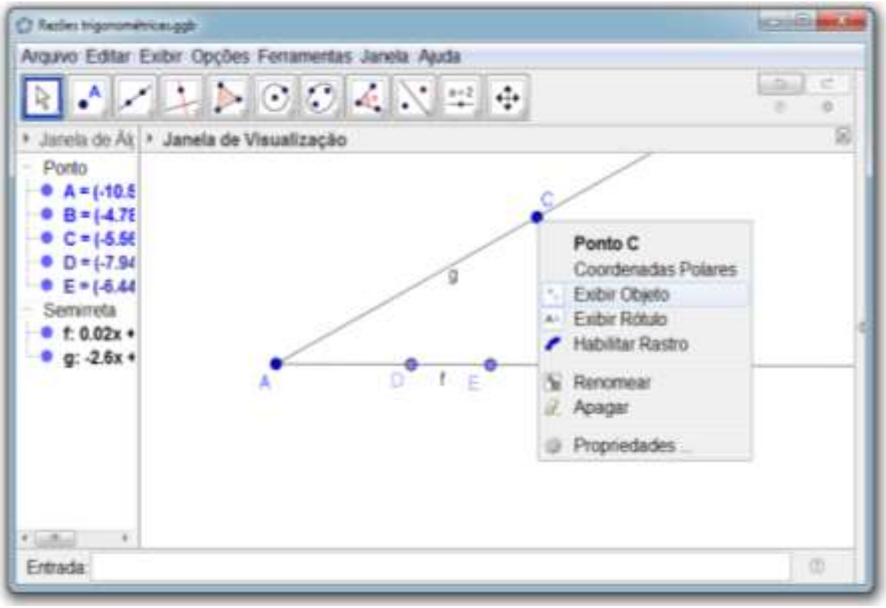
Figura 153– Inserindo os pontos D e E



Fonte: elaboração da autora (2018).

Ocultando o ponto C: acesse a ferramenta Exibir objeto e oculte o ponto C.

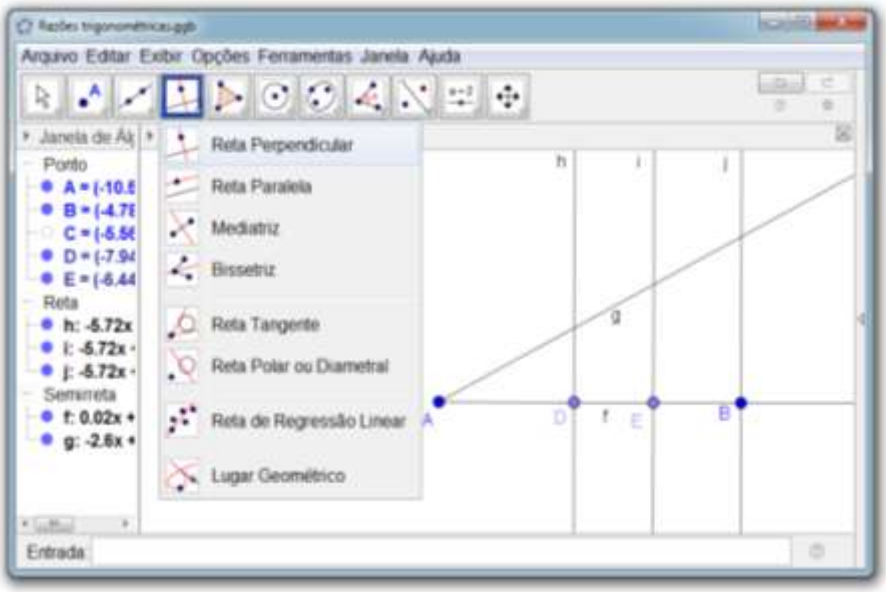
Figura 154 – Ocultando o ponto C



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo retas perpendiculares à reta f: acesse a ferramenta Reta Perpendicular e insira três retas perpendiculares à semirreta f, passando pelos pontos D, E e B.

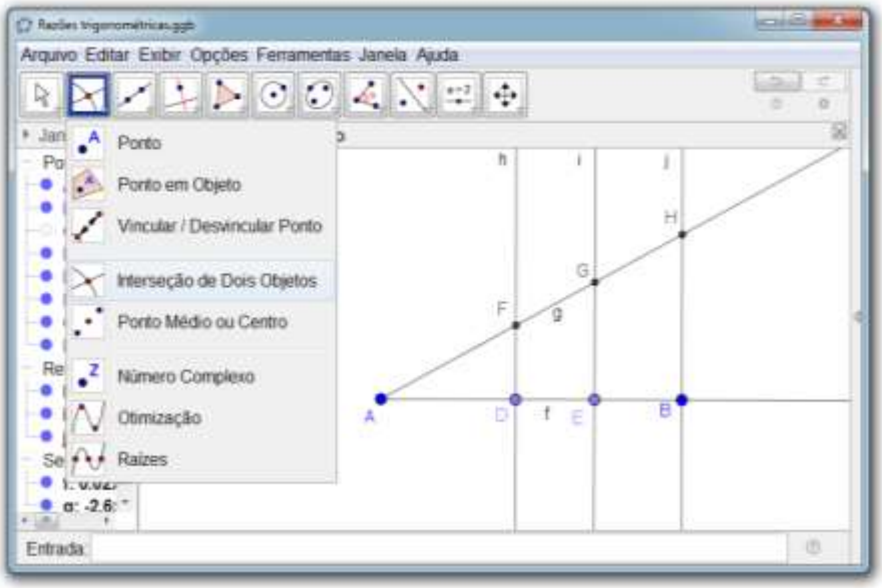
Figura 155– Inserindo retas perpendiculares à reta f



Fonte: elaboração da autora (2018).

Marcando a interseção entre retas: acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos e marque as interseções entre a semirreta g e as retas F, G e H.

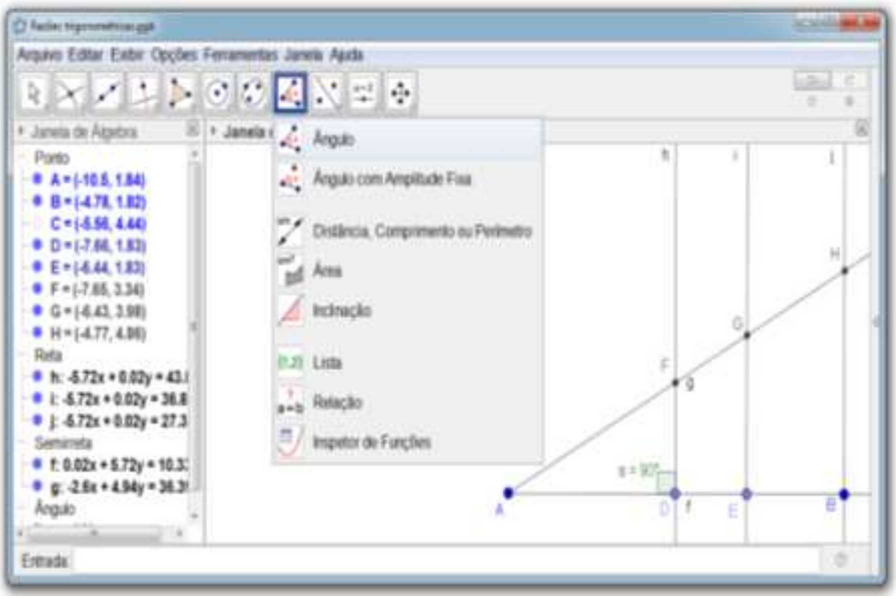
Figura 156 – Marcando a interseção entre retas



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando o ângulo reto do triângulo ADF: acesse a ferramenta Ângulo e determine o ângulo reto do triângulo ADF.

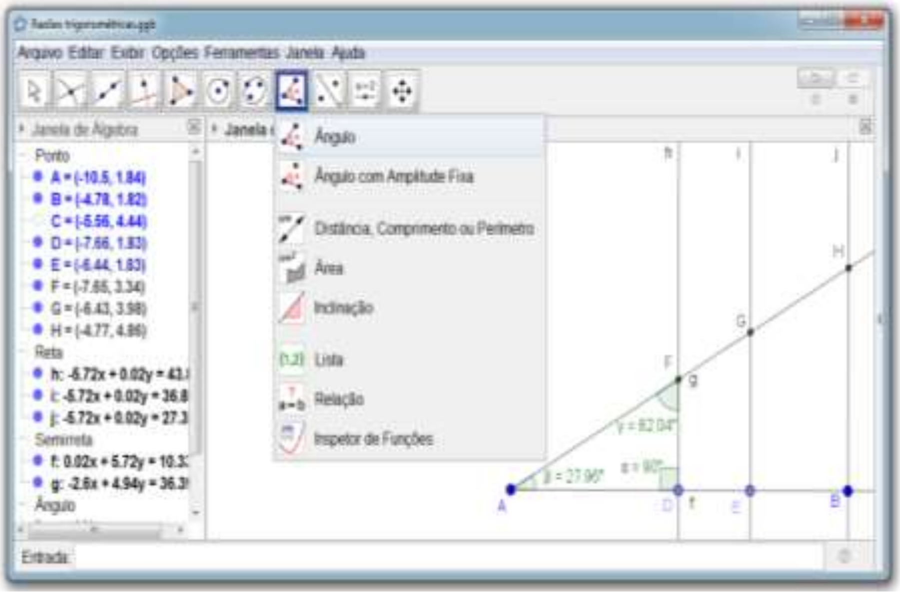
Figura 157 – Determinando o ângulo reto do triângulo ADF



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando os ângulos agudos do triângulo ADF: acesse a ferramenta Ângulo determine os ângulos agudos do triângulo ADF

Figura 158 – Determinando os ângulos agudos do triângulo ADF



Fonte: elaboração da autora (2018).

Concluída a construção da figura geométrica, os alunos moveram o ponto D, observando o comportamento dos ângulos internos do triângulo retângulo, e tentaram responder a seguinte pergunta: O que pode ser observado em relação às medidas dos ângulos internos dos triângulos ADF, AEG e ABH?

A partir de investigações, e com a mediação da professora, ou de colegas, todos os alunos identificaram que a figura apresentava três triângulos retângulos.

Ao analisar as tarefas, verificou-se que os alunos **F** e **H** não responderam à pergunta. O aluno **F** foi mediado pelo aluno **H** durante a realização da tarefa, provavelmente, esses alunos esqueceram de respondê-la, visto que as demais foram respondidas.

A seguir são apresentadas as respostas dos demais alunos[14]:

Aluno A: *Os ângulos não altera os valores.*

Aluno B: *Os ângulos internos não mudam.*

Aluno C: *As medidas dos ângulos não altera com a mudança.*

Aluno D: *A medida dos ângulos continua igual.*

Aluno E: *Os ângulos não altera sua medida.*

[14] As respostas foram transcritas das tarefas dos alunos, apenas com correções ortográficas básicas.

Aluno G: *As medidas dos ângulos não altera com a mudança.*

Aluno I: *As medidas dos ângulos continua iguais.*

Aluno J: *Os ângulos internos não mudam.*

Aluno L: *O ângulo e medidas não mudam.*

Aluno M: *Não altera as medidas internas.*

Aluno N: *Os ângulos internos não muda independente do tamanho do triângulo.*

Aluno P: *As medidas internas dos ângulos continuam iguais.*

Aluno Q: *Os ângulos internos não altera sua medida.*

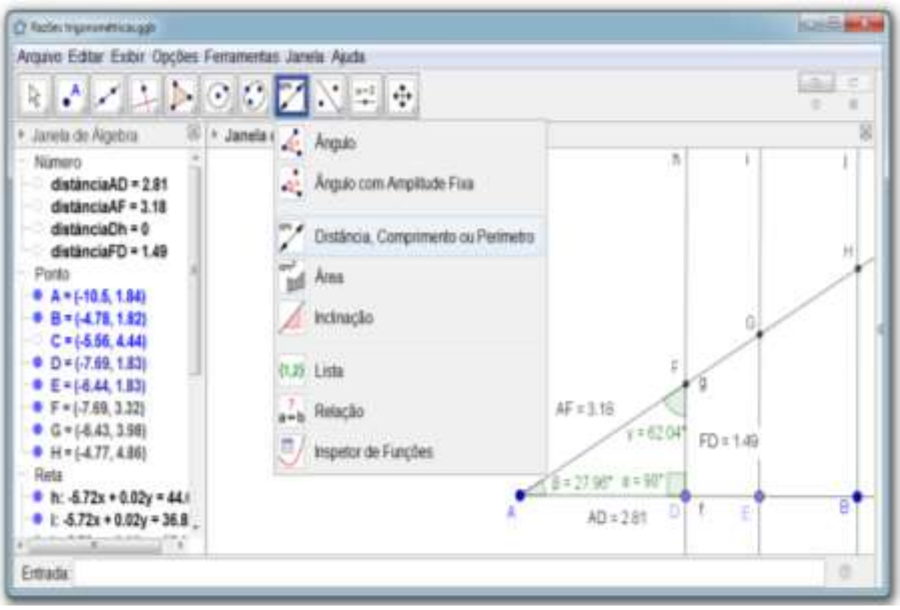
Aluno R: *Os ângulos internos não muda.*

A partir da análise das tarefas, foi verificado situações de interação ao responder à questão, já que as respostas são semelhantes.

Nesse contexto, as próximas etapas da tarefa foram realizadas no decorrer das aulas 41 e 42. Inicialmente, os alunos determinaram as medidas dos lados do triângulo ADF, e a razão entre DF e AF, de acordo com as orientações da professora.

Determinando a medidas dos lados do triângulo ADF: acesse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro determine as medidas dos lados AD, AF e DF.

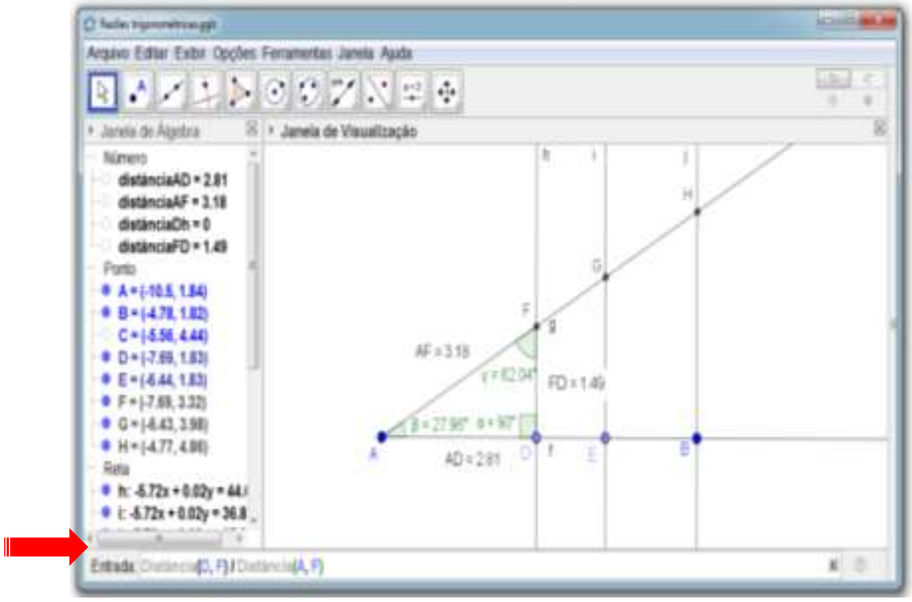
Figura 159 – Determinando a medidas dos lados do triângulo ADF



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinando a razão DF/AF: na caixa de entrada digite Distância (D, F) / Distância (A, F).

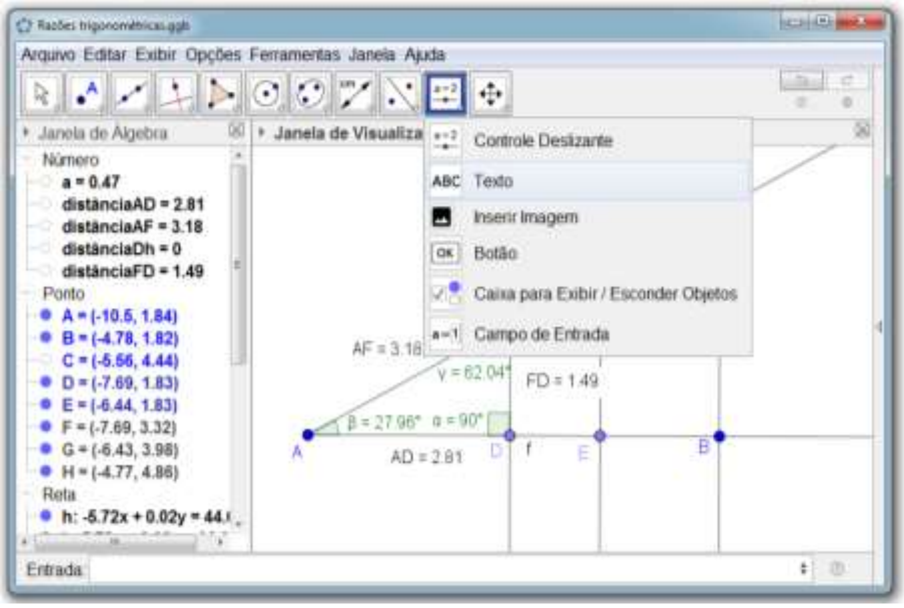
Figura 160 – Determinando a razão DF/AF



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo texto na Janela de Visualização: acesse a ferramenta Texto e digite \frac{DF}{AF}=

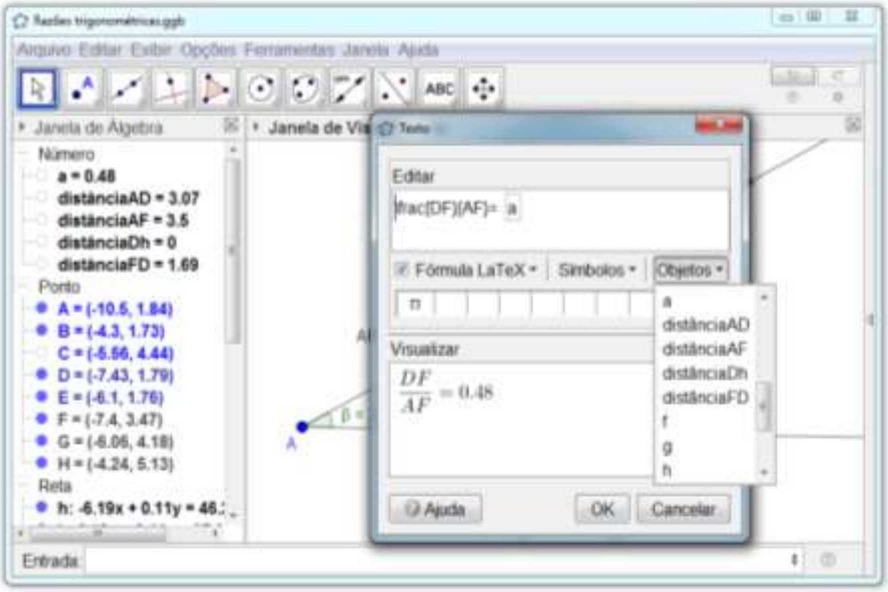
Figura 161 – Inserindo a razão DF/AF na Janela de Visualização



Fonte: elaboração da autora (2018).

Selecionando o objeto *a*: na opção Objetos selecione o objeto ***a*** que corresponde a media da razão entre DF e AF, clique no botão OK.

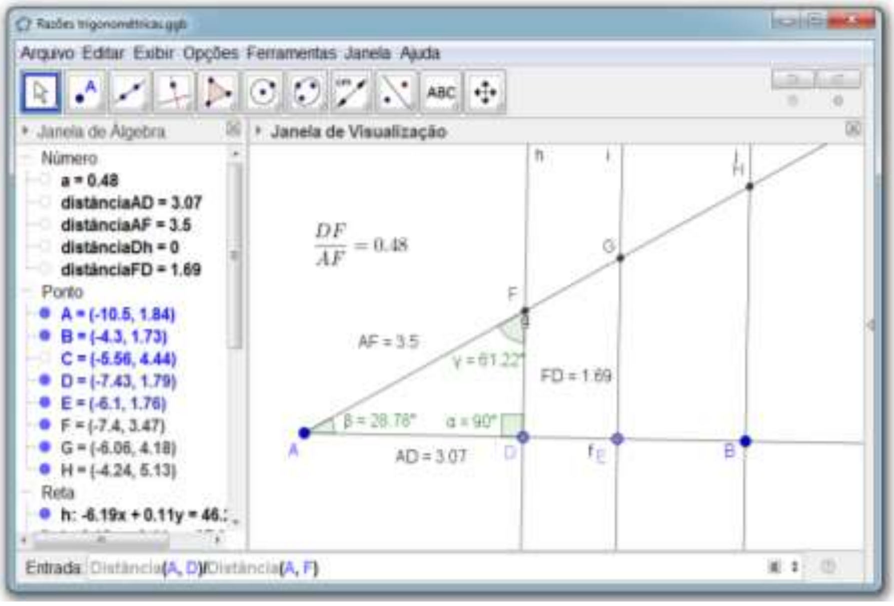
Figura 162 – Selecionando o objeto *a*



Fonte: elaboração da autora (2018).

Observe-se que a razão será inserida na Janela de Visualização, conforme apresentado na Figura 152.

Figura 163 – Razão DF/AF inserida na Janela de Visualização



Fonte: elaboração da autora (2018).

Determinadas as medidas dos lados do triângulo ADF e a razão DF/AF, os alunos investigaram a construção com o intuito de responder as seguintes questões: O que pode ser observado em relação às medidas das razões <u>DF/AF do triângulo ADF</u>, <u>EG/AG do triângulo AEG</u> e <u>BH/AH do triângulo ABH</u>? A medida das razões entre <u>DF/AF do triângulo ADF</u>, <u>EG/AG do triângulo AEG</u> e <u>BH/AH do triângulo ABH</u> é chamada de seno do ângulo β. A partir das investigações, é possível afirmar que a medida do seno do ângulo β é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

Ao realizar as investigações, os alunos observaram que ao mover o ponto E, a medida dos lados do triângulo alterava, mas o valor da razão DF/AF era sempre o mesmo. Com o auxílio de uma calculadora, os alunos determinaram os valores das razões EG/AG e BH/AH, pode-se perceber que realizando operações formais, os alunos iniciaram a transição do geral para o particular.

Nesse prisma, Davydov (1988, p. 210) leciona que

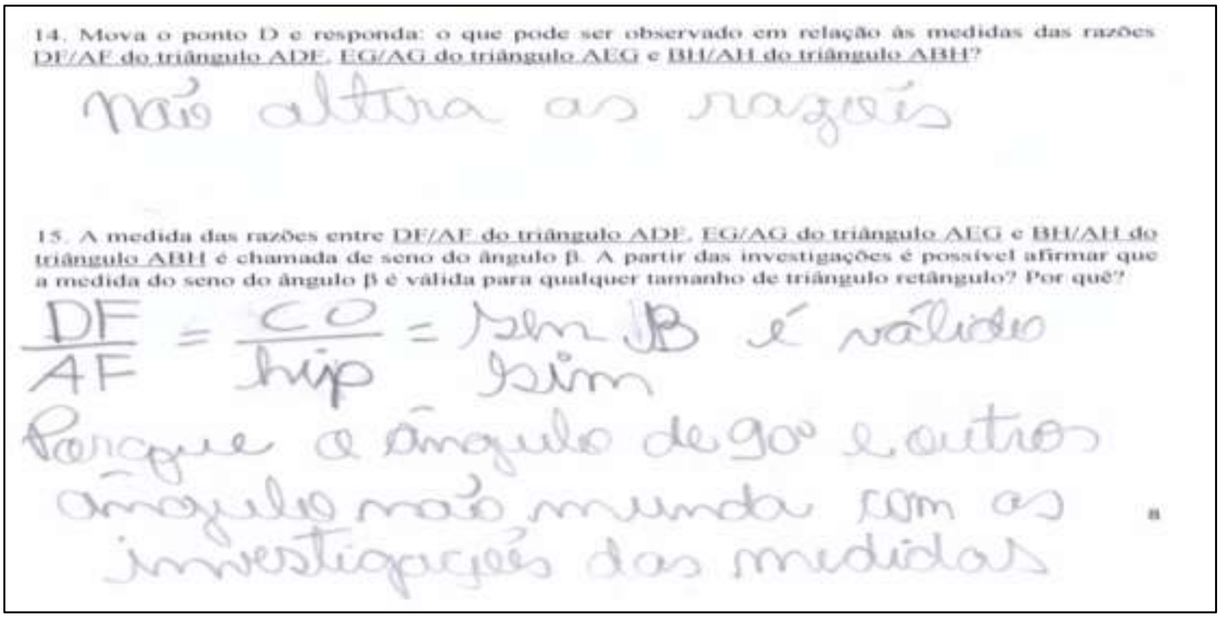
> A passagem do geral ao particular se realiza não só concretizando o conteúdo das abstrações iniciais, mas também substituindo-se os símbolos expressos pelas letras por símbolos numéricos concretos. É importante destacar que esta passagem se realiza como estruturação autêntica do concreto a partir do abstrato e sobre a base da identificação das regularidades.

Os alunos observaram que, independentemente, do tamanho do triângulo retângulo, as razões eram constantes, no entanto, não entendiam, porque isso acontecia. Então, foi solicitado que o tamanho do triângulo fosse alterado de modo que o ângulo β também mudasse, investigando o comportamento das razões a partir de diferentes amplitudes do ângulo β.

Nesse sentido, os alunos compreenderam que as razões DF/AF, EG/AG e BH/AH eram constantes para ângulos de mesma amplitude. Apesar de algumas conjecturas erradas, talvez, devido à dificuldade de transcrever o que tinha sido investigado, todos os alunos responderam as questões. Posteriormente, os resultados das investigações foram discutidos com a turma, e estabeleceu-se o conceito de seno: em um triângulo retângulo o seno de um ângulo agudo "é dado pela razão entre o cateto oposto a ele e a hipotenusa" (SOUZA, 2013, p. 269).

As Figuras 164 e 165 ilustram as respostas dos alunos **L** e **N**.

Figura 164 – Questões respondidas pelo aluno L



14. Mova o ponto D e responda: o que pode ser observado em relação às medidas das razões DF/AF do triângulo ADF, EG/AG do triângulo AEG e BH/AH do triângulo ABH?

não altra as razões

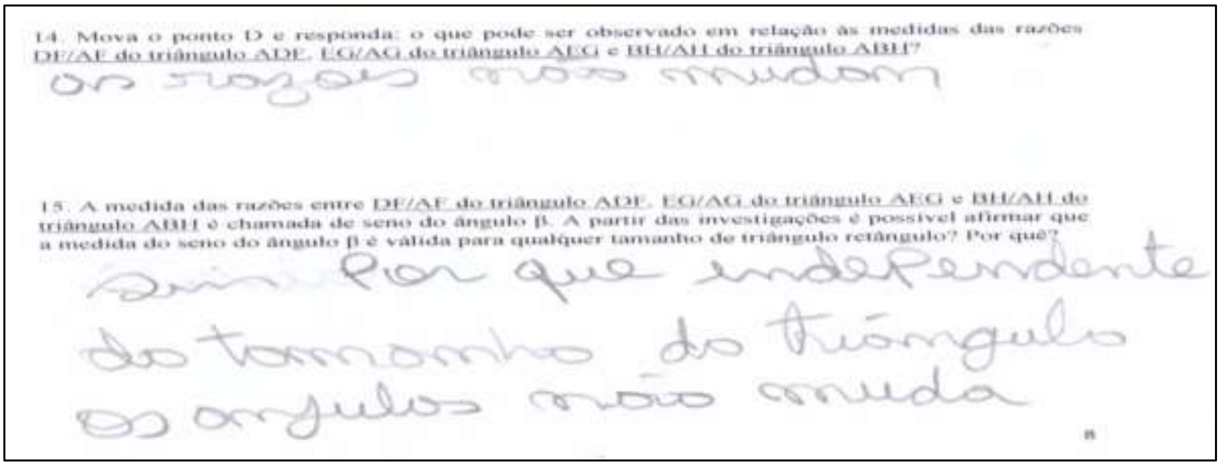
15. A medida das razões entre DF/AF do triângulo ADF, EG/AG do triângulo AEG e BH/AH do triângulo ABH é chamada de seno do ângulo β. A partir das investigações é possível afirmar que a medida do seno do ângulo β é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

$\frac{DF}{AF} = \frac{CO}{hip} =$ sen β é válido sim

Porque o ângulo de 90º e outros ângulos não munda com as investigações das medidas

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 165 – Questões respondidas pelo aluno N



14. Mova o ponto D e responda: o que pode ser observado em relação às medidas das razões DF/AF do triângulo ADF, EG/AG do triângulo AEG e BH/AH do triângulo ABH?

os razões não mudam

15. A medida das razões entre DF/AF do triângulo ADF, EG/AG do triângulo AEG e BH/AH do triângulo ABH é chamada de seno do ângulo β. A partir das investigações é possível afirmar que a medida do seno do ângulo β é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

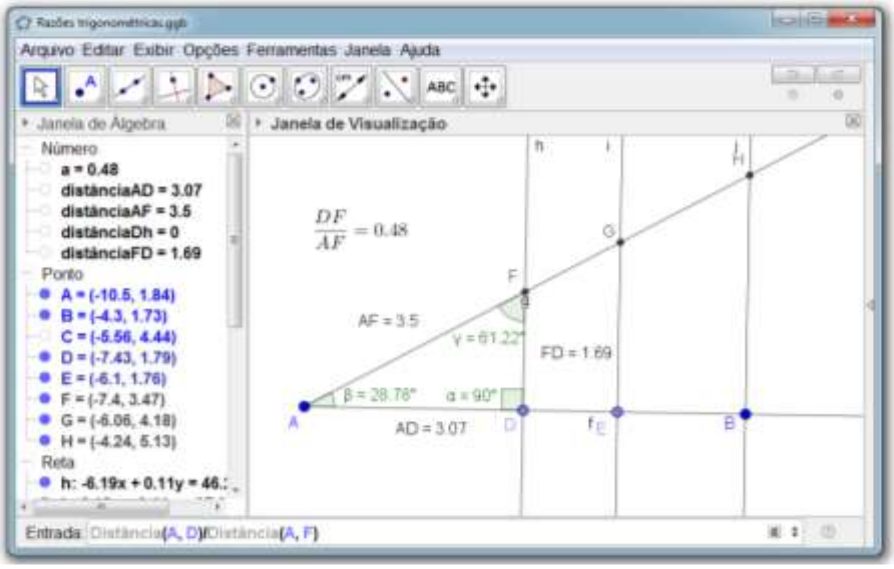
Sim Por que independente do tamanho do triângulo os angulos não muda

Fonte: dados da pesquisa (2018).

No decorrer da aula 43, os alunos determinaram a razão AD/AF, conforme as orientações, e realizaram investigações na tentativa de responder as seguintes questões: O que pode ser observado em relação às medidas das razões AD/AF do triângulo ADF se mantêm nas razões AE/AG do triângulo AEG e AB/AH do triângulo ABH? A medida das razões entre AD/AF do triângulo ADF, AE/AG do triângulo AEG e AB/AH do triângulo ABH é chamada de cosseno do ângulo β. A partir das investigações, é possível afirmar que a medida do cosseno do ângulo β é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

Determinando a razão AD/AF: caixa de entrada digite Distância (A, D)/Distância (A, F).

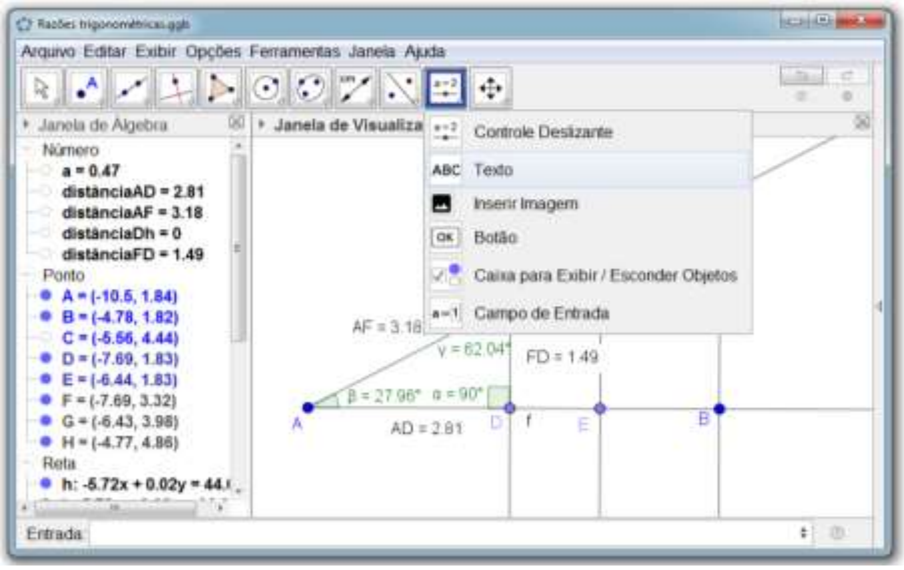
Figura 166 – Determinando a razão AD/AF



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo texto na Janela de Visualização: acesse a ferramenta Texto e digite \frac{AD}{AF}=

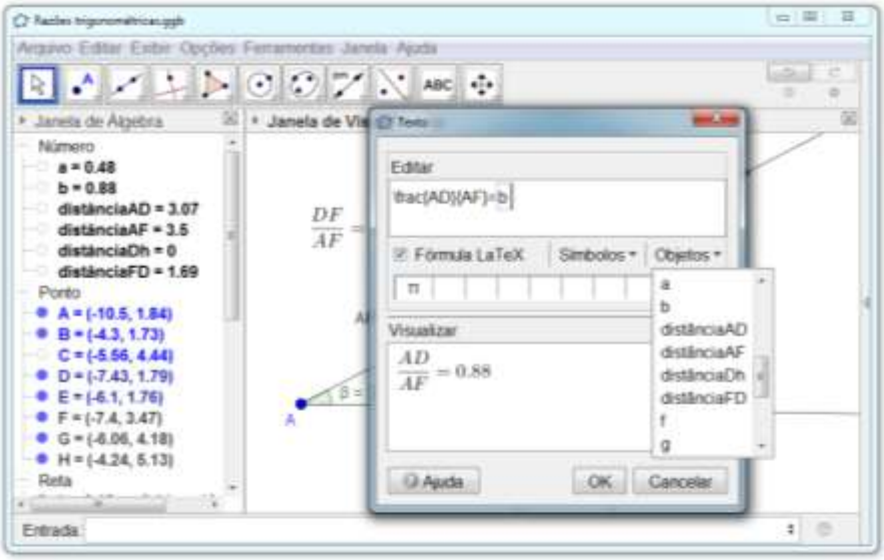
Figura 167 – Inserindo a razão AD/AF na Janela de Visualização



Fonte: elaboração da autora (2018).

Selecionando o objeto *b*: na opção Objetos selecione o objeto ***b*** que corresponde à medida da razão entre AD e AF, clique no botão OK.

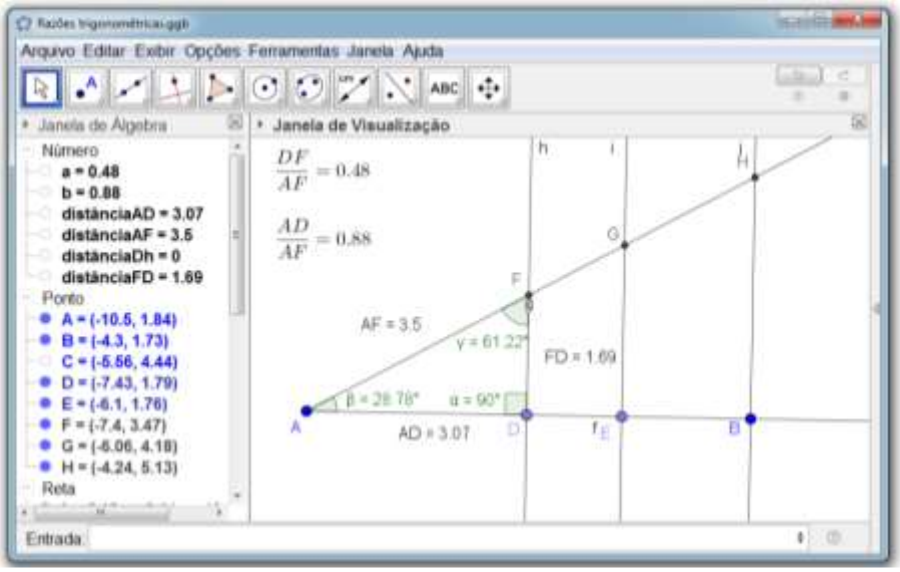
Figura 168 – Selecionando o objeto *b*



Fonte: elaboração da autora (2018).

Observe-se que a razão será inserida na Janela de Visualização, de acordo com a Figura 169.

Figura 169 – Razão AD/AF inserida na Janela de Visualização



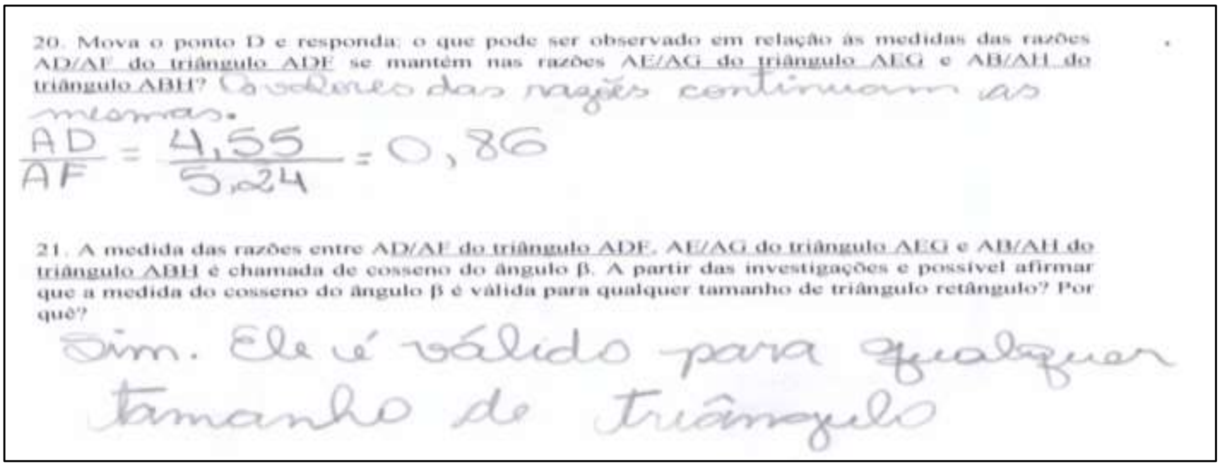
Fonte: elaboração da autora (2018).

Os procedimentos de investigação foram os mesmos realizados na etapa anterior. A maioria dos alunos apresentou facilidade na execução da tarefa. Já os que apresentaram dificuldades, foram mediados pela professora ou por alunos com mais facilidade.

Respondidas as questões e discutidos os resultados, estabeleceu-se o conceito de cosseno: em um triângulo retângulo o cosseno de um ângulo agudo "é dado pela razão entre o cateto adjacente a ele e a hipotenusa" (SOUZA, 2013, p. 269). Os alunos **P** e **N** não comparecem nas aulas 43, 44 e 45, os motivos da ausência não foram justificados.

As Figuras 170 e 171 exibem as respostas dos alunos **B** e **C**:

Figura 170 – Questões respondidas pelo aluno F


20. Mova o ponto D e responda: o que pode ser observado em relação às medidas das razões AD/AF do triângulo ADF se mantém nas razões AE/AG do triângulo AEG e AB/AH do triângulo ABH? Os valores das razões continuam as mesmas.

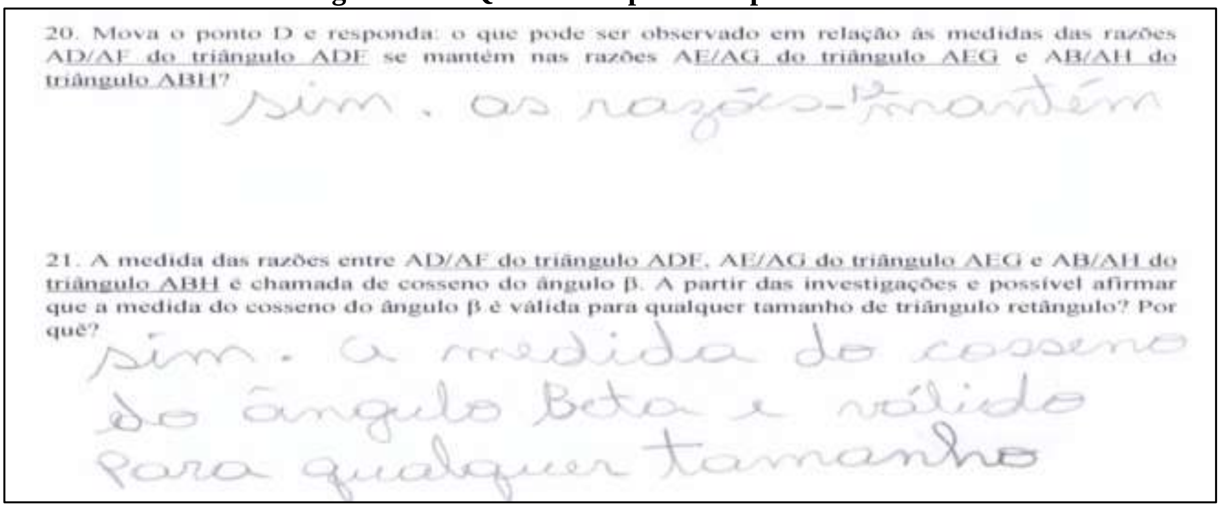
$\frac{AD}{AF} = \frac{4,55}{5,24} = 0,86$

21. A medida das razões entre AD/AF do triângulo ADF, AE/AG do triângulo AEG e AB/AH do triângulo ABH é chamada de cosseno do ângulo β. A partir das investigações é possível afirmar que a medida do cosseno do ângulo β é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

Sim. Ele é válido para qualquer tamanho de triângulo

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Figura 171 – Questões respondidas pelo aluno C


20. Mova o ponto D e responda: o que pode ser observado em relação às medidas das razões AD/AF do triângulo ADF se mantém nas razões AE/AG do triângulo AEG e AB/AH do triângulo ABH?

sim. as razões se mantém

21. A medida das razões entre AD/AF do triângulo ADF, AE/AG do triângulo AEG e AB/AH do triângulo ABH é chamada de cosseno do ângulo β. A partir das investigações é possível afirmar que a medida do cosseno do ângulo β é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

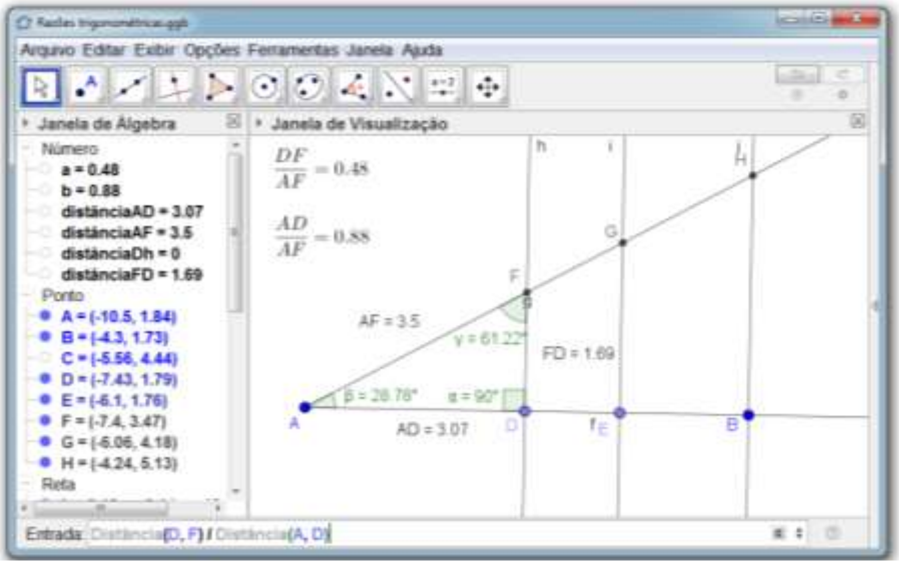
sim. a medida do cosseno do ângulo Beta e válido para qualquer tamanho

Fonte: dados da pesquisa (2018).

Nas aulas 44 e 45, os alunos determinaram a razão DF/AF, conforme orientações, posteriormente, realizaram investigações e responderam as seguintes perguntas: o que pode ser observado em relação às medidas das razões DF/AD do triângulo ADF se mantêm nas razões EG/AE do triângulo AEG e BH/AB do triângulo ABH? A medida das razões entre DF/AD do triângulo ADF, EG/AE do triângulo AEG e BH/AB do triângulo ABH é chamada de tangente do ângulo β. A partir das investigações, pode-se afirmar que a medida da tangente do ângulo β é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

Determinando a razão DF/AF: na caixa de entrada digite Distância (D, F) / Distância (A, D).

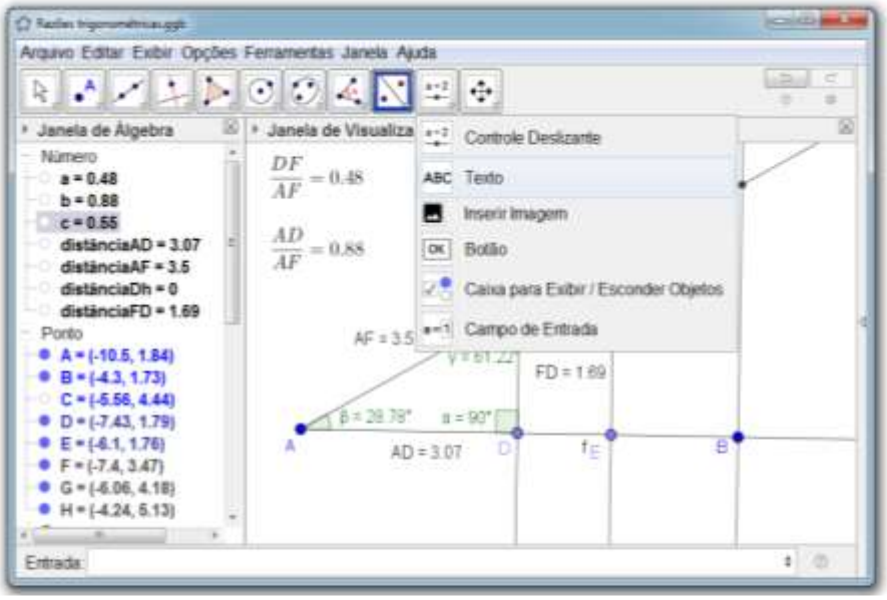
Figura 172 – Determinando a razão DF/AD



Fonte: elaboração da autora (2018).

Inserindo texto na Janela de Visualização: acesse a ferramenta Texto e digite \ frac{DF}{AD}=

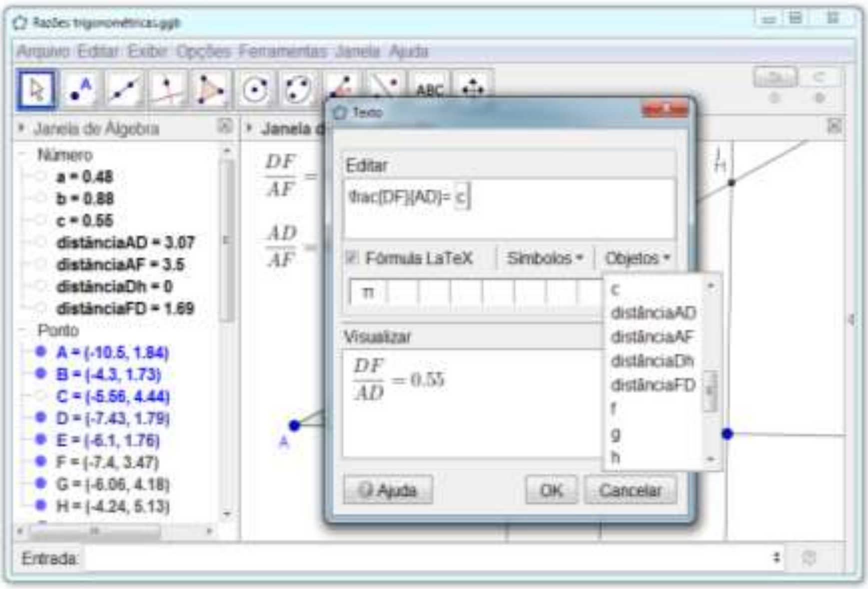
Figura 173 – Inserindo a razão DF/AD na Janela de Visualização



Fonte: elaboração da autora (2018).

Selecionando o objeto *c*: na opção Objetos selecione o objeto ***c*** que corresponde à média da razão entre DF e AD, clique no botão OK.

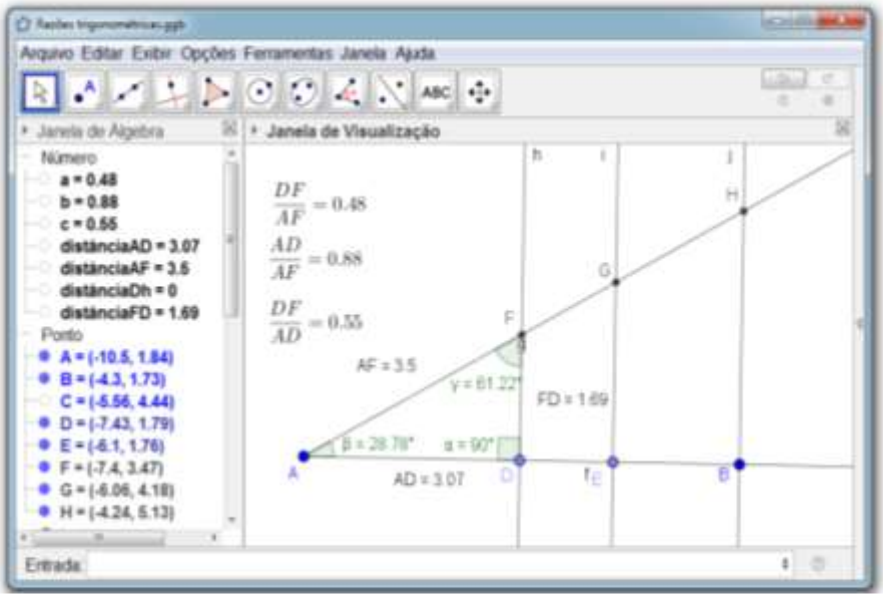
Figura 174 – Selecionando o objeto *c*



Fonte: elaboração da autora (2018).

Observe-se que a razão DF/AD será inserida na Janela de Visualização, segundo a Figura 175.

Figura 175 – Razão DF/AD inserida na Janela de Visualização



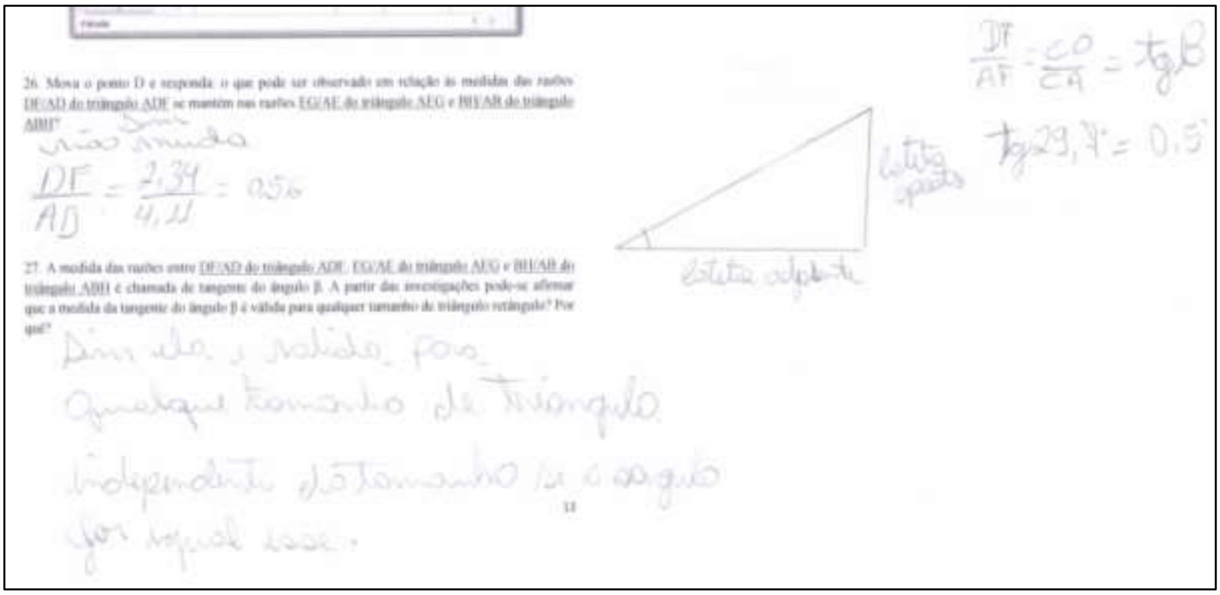
Fonte: elaboração da autora (2018).

Nessa etapa da tarefa, inicialmente, a maioria dos alunos não determinaram as medidas das razões EG/AE e BH/AB, pois se basearam nas investigações anteriores, contudo, com o intuito de despertar nos alunos a motivação para investigar, a professora questionou: Será que as relações observadas anteriormente são válidas para essas razões?

Posto o questionamento, os alunos realizaram investigações, a fim de verificar se as relações se mantinham. Após os alunos responderem as questões, os resultados foram discutidos, e estabeleceu-se o conceito de tangente: em um triângulo retângulo a tangente de um ângulo agudo “é dada pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a esse ângulo” (SOUZA, 2013, p. 269).

A Figura 176 ilustra as respostas do aluno **Q**.

Figura 176 – Questões respondidas pelo aluno Q



Fonte: dados da pesquisa (2018).

5.11 Tarefa 8: aplicações de razões trigonométricas I

A tarefa foi conduzida no decorrer das aulas 46 e 47, em consonância com o planejamento apresentado no Quadro 9.

Quadro 12 – Planejamento da oitava tarefa

Tarefa 08 – Aplicações de razões trigonométricas I	
Data:	22/06/2018
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Aplicar razões trigonométricas na resolução de situações problemas.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos, ângulos e medidas, e aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: Plano de ensino (2018) (Apêndice A).

Foram propostas seis situações-problema de aplicação das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Nove alunos compareceram à aula, a turma foi dividida em grupos de três alunos, mas cada um com sua tarefa.

Foram observadas dificuldades de interpretação dos problemas, e tentativas de realizar os cálculos apenas com os dados apresentados nas figuras. Quando não conseguiam realizar os cálculos, devido à falta de dados, os alunos solicitavam o auxílio da professora, que ao mediar à realização das atividades, solicitava a leitura dos problemas, e a análise dos dados informados.

Apesar das dificuldades apresentadas, as mediações da professora, e a interação entre os alunos, contribuíram para que as situações-problema fossem calculadas corretamente.

Em relação ao déficit de aprendizagem observado durante a realização do experimento didático-formativo, os resultados do Ideb 2017 mostram que os alunos do Ensino Médio têm nível insuficiente em Língua Portuguesa e Matemática.

> Os resultados do Ideb 2017 para escola, município, unidade da federação, região e Brasil são calculados a partir do desempenho obtido pelos alunos que participaram do SAEB 2017 e das taxas de aprovação, calculadas com base nas informações prestadas ao Censo Escolar 2017. Dessa forma, cada uma dessas unidades de agregação tem seu próprio Ideb e metas estabelecidas ao longo do horizonte do PDE, ou seja, até 2021 (MEC/INEP, 2018, p. 01) [15].

Para Luckesi (2011, p. 265) “os resultados das avaliações do sistema nacional do ensino, nos apontam para focar no desempenho do sistema e não só no desempenho do educando. Esses dados permitem tomar decisões para a melhoria do todo”.

A Tabela 2 descreve as estatísticas do Ideb 2017, onde são mostrados os indicadores de rendimento (P) referente a taxa de aprovação do Censo Escolar de 2017, as notas de Matemática, Língua Portuguesa e a nota média padronizada (N) do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) 2017, os resultados Ideb 2017, as projeções de 2017 e as projeções para 2019.

[15] Nota informativa do Ideb 2017. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/o_que_e_o_ideb/nota_informativa_ideb.pdf>. Acesso em: 09 de set. 2018.

Tabela 2 – Estatísticas do Ideb 2017

Ensino Médio Regular							
Rede	**Taxa de Aprovação – 2017**	**Nota SAEB - 2017**			**IDEB 2017 (N x P)**	**Projeções**	
	Indicador de Rendimento (P)	**Matemática**	**Língua Portuguesa**	**Nota Média Padronizada (N)**		**2017**	**2019**
Total	0,84	270,57	268,45	4,51	3,8	4,7	5,0
Estadual	0,82	259,86	260,06	4,23	3,5	4,4	4,6
Pública	0,83	260,28	260,37	4,24	3,5	4,4	4,7
Privada	0,96	329,66	314,88	6,03	5,8	6,7	6,8

Fonte: MEC/Inep (2018).

Em se tratando das classes sociais, levando em conta que o aprendizado nas escolas públicas quase sempre é de baixa qualidade, avaliar os alunos da mesma maneira é uma forma de excluir as camadas populares. A avaliação segundo Demo (2010) só é válida quando favorece o aprendizado, que é o seu compromisso formal e político. Em uma sociedade de classes é impossível retirar os processos avaliativos. Ao avaliar é impossível apagar a clivagem social, pois sabemos que nas escolas públicas, os alunos são das camadas mais excluídas. Então, não podemos imaginar a avaliação sem considerar o aspecto social.

Uma das formas de se ofertar uma educação pobre de acordo com Demo (2010) é evitar a avaliação, pois é impossível garantir a aprendizagem se não sabemos em que posição está o aluno, se está ou não aprendendo. Ou seja, temos que classificar para saber se o aprendizado está sendo eficiente. Dispensar a avaliação é uma forma de classificação prévia, fazendo de todos iguais, o que não é verdadeiro. O que temos é que encontrar uma forma verdadeiramente pedagógica e ética de avaliar, garantindo o melhor aprendizado ao aluno. Avaliando, saberemos o lugar que o aluno ocupa e qual ele deveria ocupar e assim levantar os motivos pelos quais ele não aprende e contribuir para que atinja o nível desejado.

O ideal na perspectiva de Demo (2010) é que a nota não apenas sirva para ser somada e transformada em médias, mas sim para ser instrumento utilizado para acompanhar a evolução do aluno. A qualidade da aprendizagem somente se garante sobre cuidados avaliativos, com objetivo de teor qualitativo, trabalhando a nota com devida consciência critica, deve sempre vir acompanhada de comentários e propostas para facilitar a aprendizagem.

Mesmo sendo os professores e pedagogos contrários às avaliações, Demo (2010), afirma que eles são favoráveis à prova. Presos ao comodismo, dizem que aplicam a prova porque a escola exige. Esta metodologia é uma dentre as vertentes mais frágeis. Seria melhor se o aluno pesquisasse e elaborasse semanalmente conteúdos, e os resultados seriam considerados avaliação e ao final do mês, este acerto substituiria a prova com total vantagem. É obrigação do professor e pedagogo evitar que o aluno caia em fracasso, já que repetência não favorece o aprendizado. De certa forma a aluno é empurrado para frente, ao ajuste de idade, para isso tem que avaliar para saber os problemas e intervir a favor da recuperação do aluno.

Demo (2010) afirma que é preciso evitar a prova, pois não capta a aprendizagem real do aluno, que é influenciado até por seu estado psicológico no momento. A prova deveria ser utilizada como um processo eventual, podendo optar por avaliações mais sofisticadas. O aluno deveria ser avaliado por aquilo que reconstrói como pessoa, não poderia haver hora certa de avaliar, pois na realidade está sempre sendo avaliado. A avaliação deve ser repensada, para argumentar de modo elaborado e assim ter sentido pedagógico. A avaliação deve ter duas funções básicas, de diagnóstico expondo a realidade da maneira mais precisa, pondo a fundo todos os problemas, e a função de prognóstico, enfrentando e resolvendo os problemas apresentados pelo diagnóstico.

A avaliação de forma mais simplista também deve ser evitada, pois a forma qualitativa conforme Demo (2010) depende sempre da interpretação de outra pessoa, o que dá um horizonte não mensurável, diferentemente da avaliação quantitativa. Neste contexto a nota pode ser mais precisa sem margens a interpretações errôneas. É evidenciado que o mais apropriado, seria que professor incluísse a forma quantitativa à forma qualitativa. Por exemplo, com a avaliação de um suposto texto em que o aluno não se saiu nada bem, o correto seria o professor descrever de forma crítica os erros, sugerir a forma de melhorar incentivando a percorrer o caminho correto e agregar a avaliação uma nota que exemplifique o nível alcançado pelo aluno.

O problema da avaliação segundo Demo (2010) não é a nota, mas a cabeça do professor, ou seja, a aprendizagem. Tudo se resume em saber avaliar, e avaliando ensinar, como é direito do aluno. Os professores têm de saber lidar com a forma qualitativa e quantitativa de forma a ser também pedagogos. Desta forma o aluno vai se sentir respeitado, vai se envolver, e ao receber uma nota abaixo do esperado vai ser desafiado a melhorar, abrindo os horizontes. O autor ressalta que não podemos mais esconder os problemas do aprendizado, precisamos sim solucioná-los.

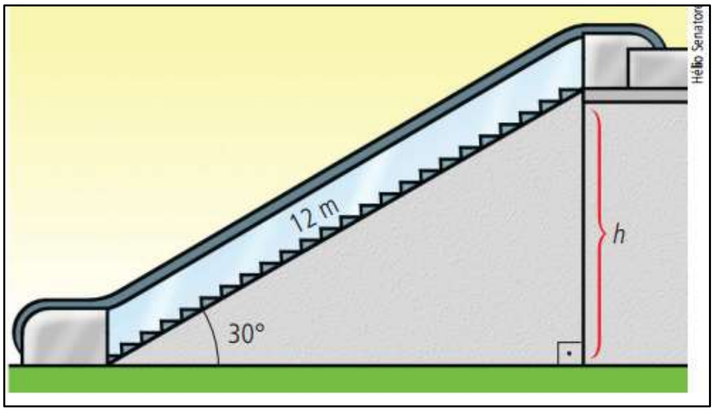
A avaliação se tornou um trauma na educação, de acordo com Demo (2010) os professores e pedagogos são de certa forma vítimas da formação inadequada, dos baixos salários e da manipulação política. Mas de forma mais inteligente, devemos procurar a transparência e sempre tentar avaliar o avaliador. Deixar de discutir a nota e focar na qualidade da aprendizagem, que é direito de todo o aluno. Fugir da classificação seria tolo, já que a sociedade é escalonada e que somos avaliados a todo o momento.

Como educadores devemos buscar novas maneiras de avaliar, não restringindo a avaliação somente a provas e testes. Mas procurar avaliar o aluno de forma contínua, analisando sua dedicação, seu desenvolvimento, suas limitações, seu comportamento em grupo, avaliar o aluno como um ser social e único. Não podemos deixar de avaliar, pois faz parte de nossa essência avaliar e ser avaliados, o que precisamos é aplicar formas corretas e justas de avaliar.

A seguir são apresentadas as situações-problema propostas no decorrer das aulas 46 e 47, e as respostas de alguns alunos. Os alunos foram autorizados a utilizar calculadora científica. O objetivo da proposição da tarefa foi avaliar se os alunos desenvolveram novos níveis de capacidade ao realizar atividades envolvendo situações-problema.

1 - Andrini e Vasconcellos (2012, p. 217) Uma escada rolante liga dois andares de um shopping e tem uma inclinação de 30º. Sabendo-se que a escada rolante tem 12 metros de comprimento, calcule e altura de um andar para o outro.

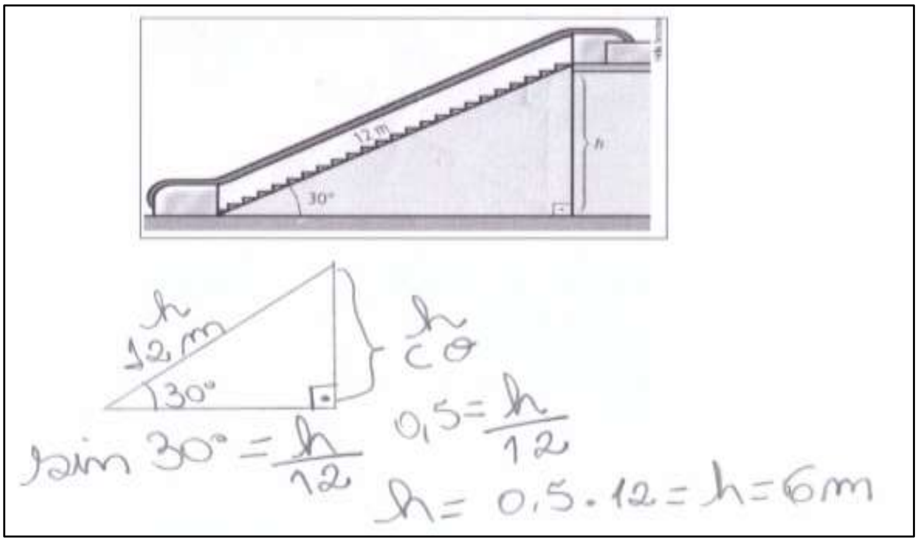
Figura 177 – Tarefa 8: ilustração da primeira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 217).

Apenas nove alunos realizaram a tarefa, a partir da segunda quinzena de junho, alguns alunos começaram a faltas às aulas de Matemática e demais disciplinas. Nesta questão os alunos apresentaram facilidade ao resolver a situação-problema, todos calcularam corretamente a altura de um andar para outro. A figura 178 ilustra a questão respondida pelo aluno L.

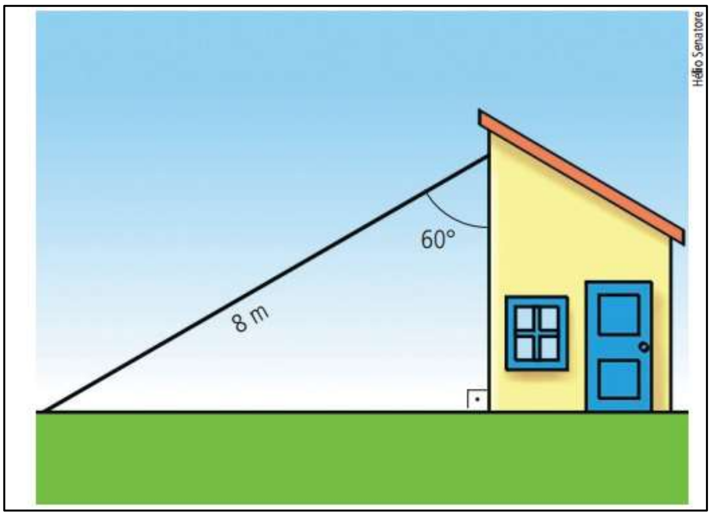
Figura 178 – Tarefa 8: situação-problema respondida pelo aluno L



Fonte: dados da pesquisa (2018).

2 - Andrini e Vasconcellos (2012, p. 216) Uma escada de 8 m é encostada em uma parede, formando com ela um ângulo de 60º. A que altura da parede a escada se apoia?

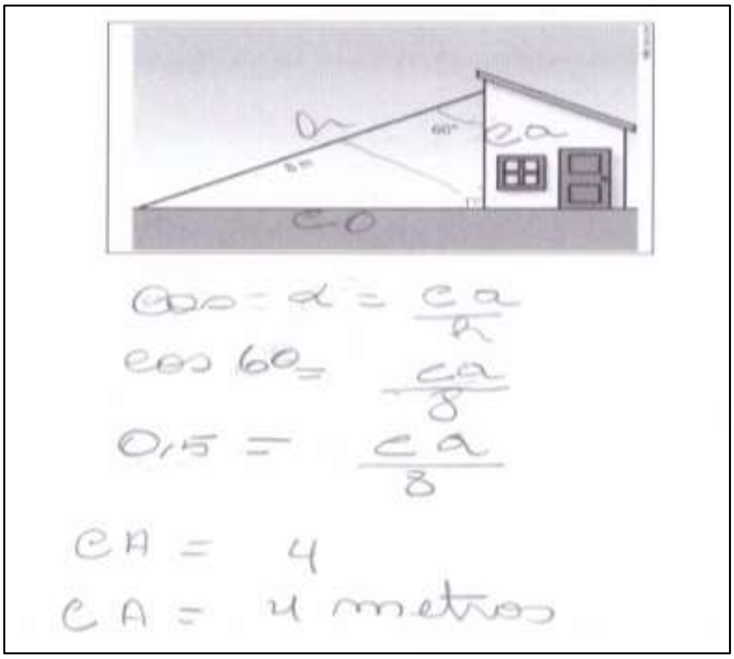
Figura 179 – Tarefa 8: ilustração da segunda situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 216).

Sete alunos responderam que a escada se apoia a 4 m de altura, um aluno apesar de ter obtido o valor de 4 m, não aplicou corretamente a razão cosseno, e um aluno calculou seno de 60º. A figura 180 ilustra a resolução feita pelo aluno N.

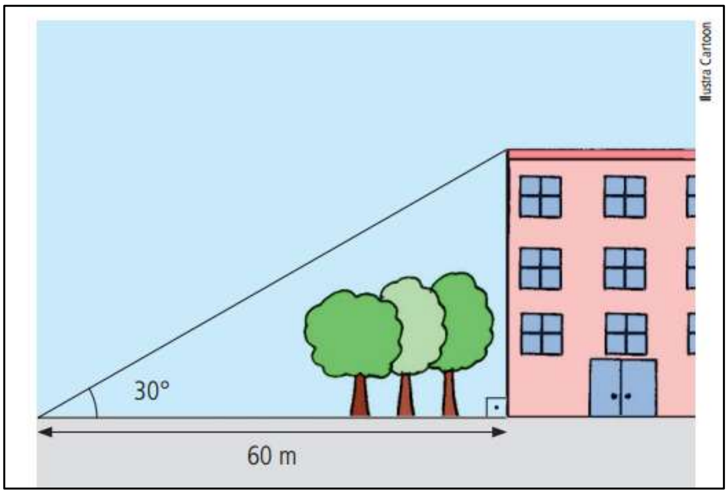
Figura 180 – Tarefa 8: situação problema respondida pelo aluno N



Fonte: dados da pesquisa (2018).

3 - Andrini e Vasconcellos (2012, p. 216) Qual é a altura do prédio?

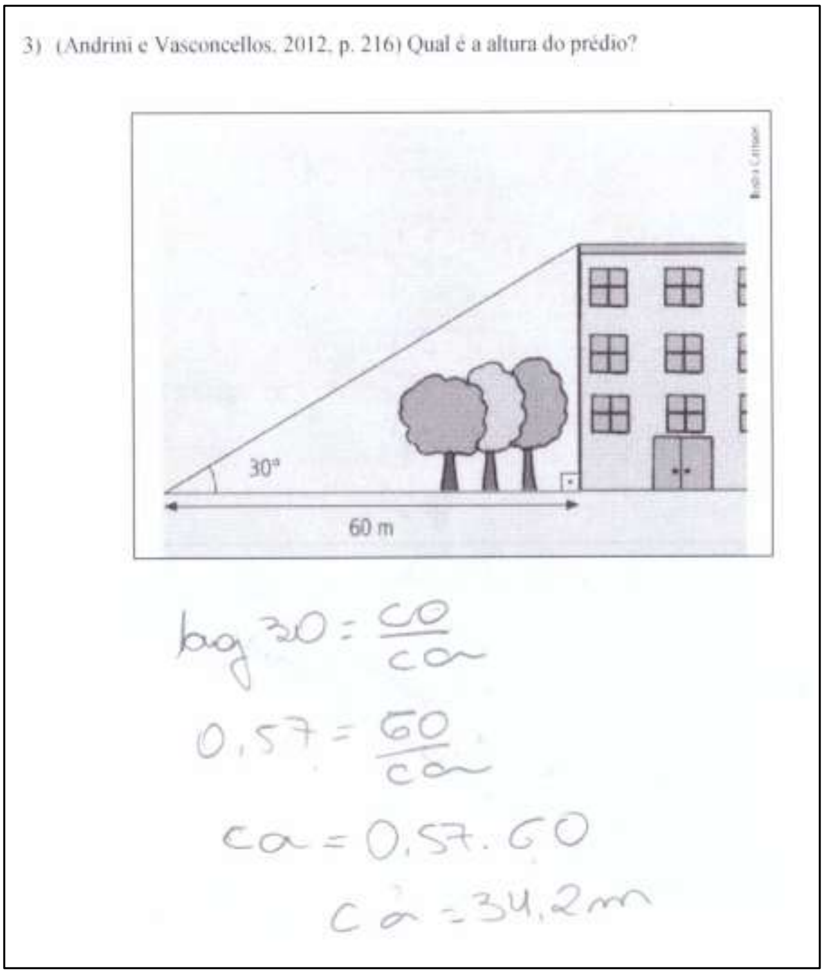
Figura 181 – Tarefa 8: ilustração da terceira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 216).

Nesta questão cinco alunos responderam corretamente que a altura do prédio era 34,20 m, dois anotaram que a tangente de 30º era 0,5 e que a altura do prédio era 30m, e um calculou seno de 30º e informou que a altura do prédio era 34,62 m. A figura 182 ilustra os cálculos efetuados pelo aluno A.

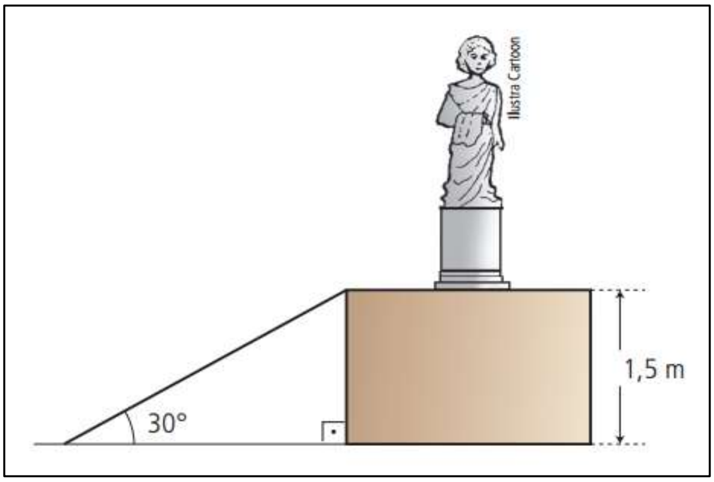
Figura 182 – Tarefa 8: situação-problema respondida pelo aluno A



Fonte: dados da pesquisa (2018).

4 - Andrini e Vasconcellos (2012, p. 216) Para permitir o acesso a um monumento que está em um pedestal de 1,5 m de altura, será construída uma rampa com inclinação de 30º com o solo, conforme a ilustração. Qual será o comprimento da rampa?

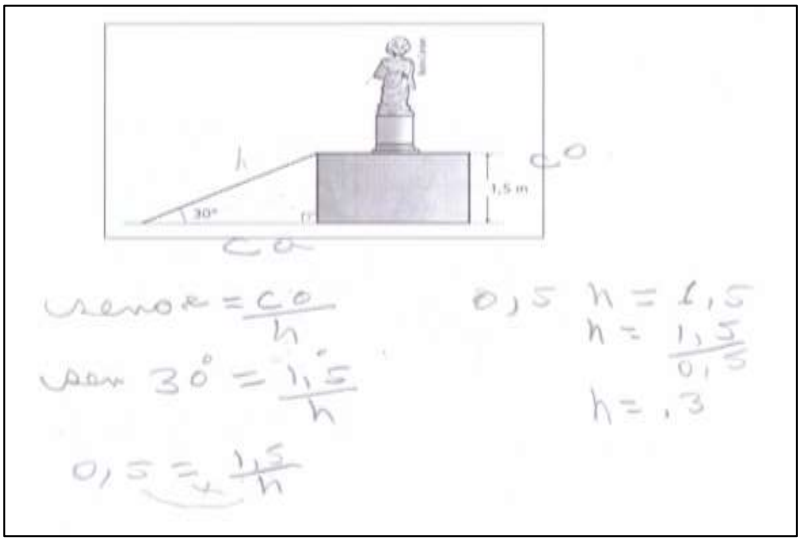
Figura 183 – Tarefa 8: ilustração da quarta situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 216).

Seis alunos calcularam corretamente o comprimento da rampa, três alunos aplicaram a razão trigonométrica seno de 30º, mas que a medida era de 0,75 m. A maior dificuldade dos alunos ao realizar a tarefa não foi em relação à quais razões trigonométricas aplicar para resolver as situações-problema, mas efetuar os cálculos de maneira correta. A figura 184 apresenta a resolução feita pelo aluno M.

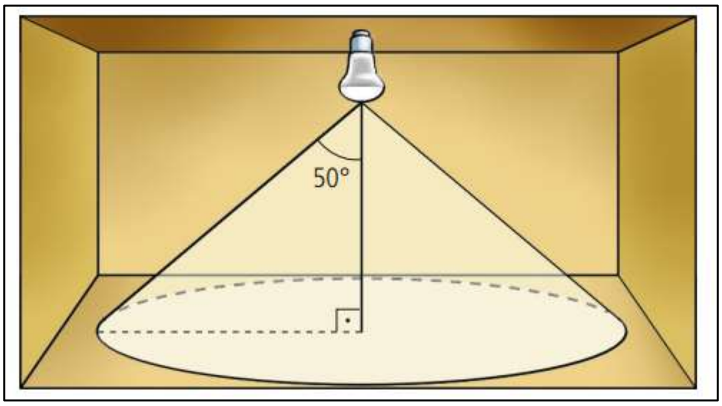
Figura 184 – Tarefa 8: situação-problema respondida pelo aluno M



Fonte: dados da pesquisa (2018).

5 - Andrini e Vasconcellos (2012, p. 212) Veja a figura abaixo. A lâmpada está a 3 m do chão e lança um cone de luz de “abertura” igual a 50º. Qual é a medida do raio do círculo de luz no chão?

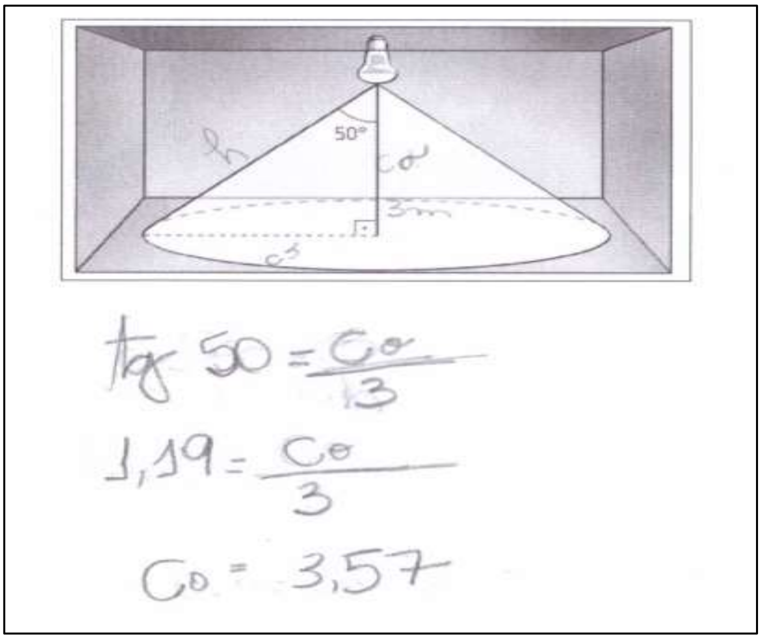
Figura 185 – Tarefa 8: ilustração da quinta situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 212).

Todos os alunos que realizaram a tarefa responderam corretamente esta questão. A figura 186 ilustra a questão respondida pelo aluno F.

Figura 186 – Tarefa 8: situação-problema respondida pelo aluno F

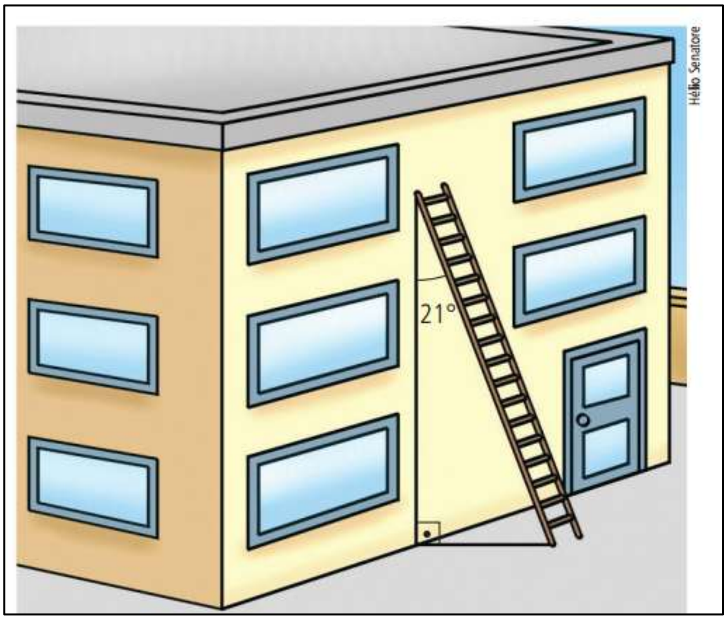


Fonte: dados da pesquisa (2018).

6 - Andrini e Vasconcellos (2012, p. 218) Uma escada apoiada em uma parede de um prédio, num ponto que dista 8 m do solo, forma com essa parede um ângulo de 21º.

a) A que distância do prédio está o pé da escada?
b) Qual é o comprimento da escada?

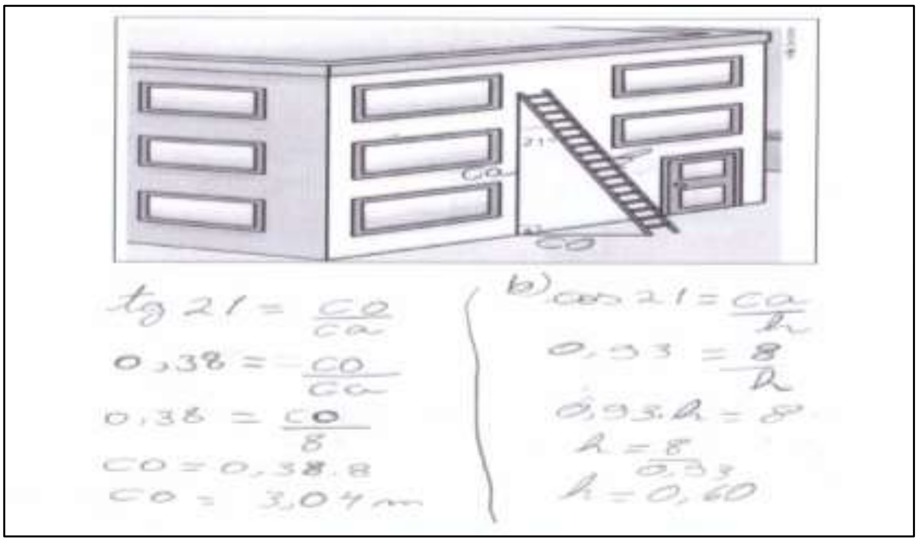
Figura 187 – Tarefa 8: ilustração da terceira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 218).

Quanto à distância entre o pé da escada e o prédio, oito alunos responderam que era de 3,04 m, um aluno apesar de informar que a tangente de 21º era 0,38, calculou que a distância era de 21,05 m. Referente ao comprimento da escada, sete alunos calcularam corretamente a medida, 8,60 m, um aluno não tentou calcular. Um calculou que se tratava de 0,60 m, foi observado que apenas a última etapa do cálculo estava errada, é provável que tenha calculado 8,60 m e anotado 0,60 m, a figura 188 ilustra a questão respondida pelo aluno.

Figura 188 – Tarefa 8: situação-problema respondida pelo aluno D



Fonte: elaboração da autora (2018).

5.12 Tarefa 9: aplicações de razões trigonométricas II

Esta tarefa foi proposta no decorrer da aula 48, conforme planejamento apresentado no Quadro 13.

Quadro 13 – Planejamento da nona tarefa

Tarefa 09 – Aplicações de razões trigonométricas II	
Período:	28/06/2018
Carga horária	1 hora-aula de 50 minutos
Conteúdo	Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Aplicar razões trigonométricas na resolução de situações problemas.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos, ângulos e medidas, e aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

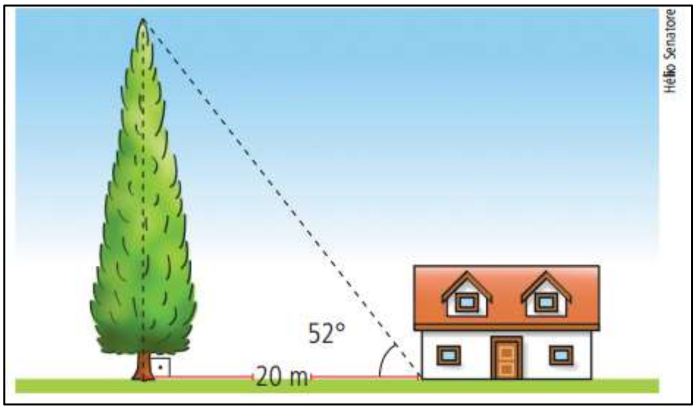
Fonte: Plano de ensino (2018) (Apêndice A).

Foram propostas três situações-problema, que quinze alunos responderam, com a mediação da professora, quando necessário. Os resultados obtidos possibilitaram a avaliar o desenvolvimento dos alunos.

A seguir são apresentadas as situações-problema propostas no decorrer da aula 48, e as resoluções de alguns alunos.

1 - Andrini e Vasconcellos (2012, p. 211) Veja a figura abaixo. Pode-se tombar a árvore em direção a casa, sem atingir a construção?

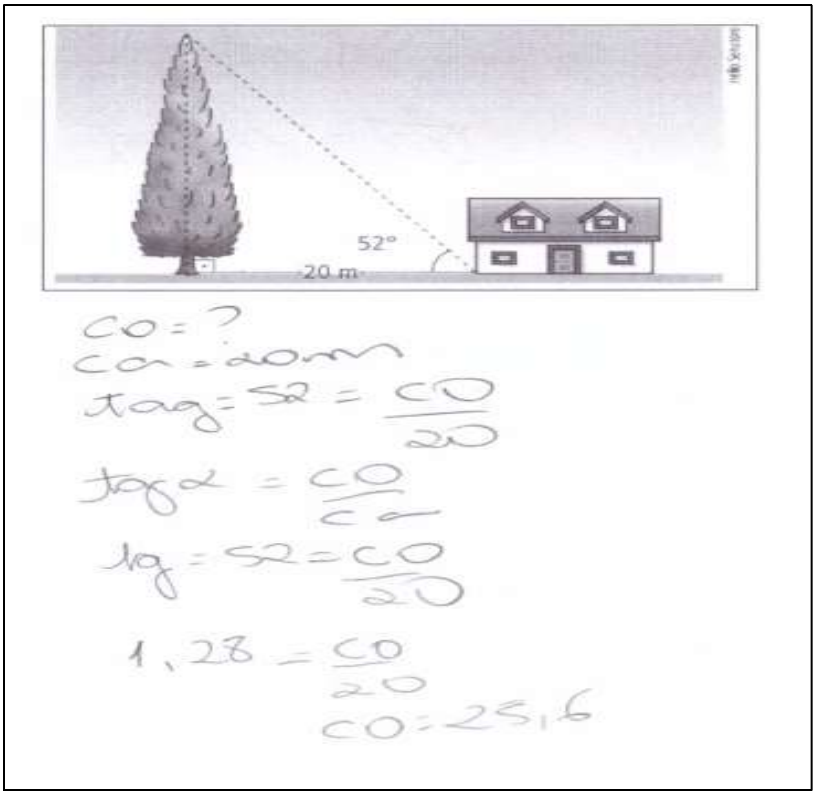
Figura 189 – Tarefa 9: ilustração da primeira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 211.

Quinze alunos calcularam que a altura da árvore era de 25,6 m, oito afirmaram que não seria possível tombar a árvore em direção da casa, pois era maior que a distância entre a árvore a casa. A figura 190 apresenta os cálculos do aluno A.

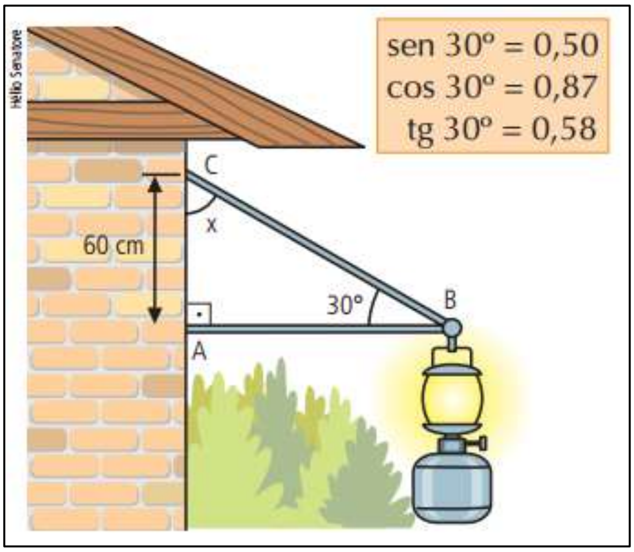
Figura 190 – Tarefa 9: situação-problema respondida pelo aluno A



Fonte: elaboração da autora (2018).

2 - Andrini e Vasconcellos (2012, p. 220) (Ceeteps – SP) Numa pousada isolada, instalada na floresta, um lampião está suspenso na parede conforme a figura a seguir:

Figura 191 – Tarefa 9: ilustração da segunda situação-problema



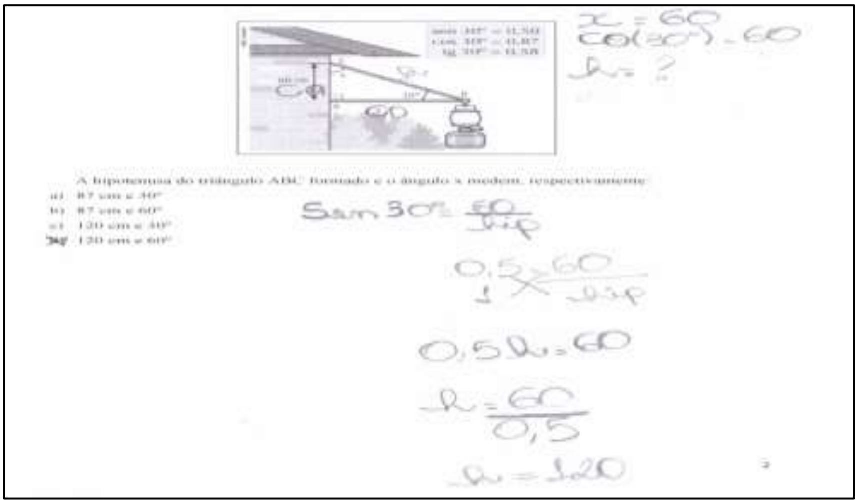
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 220).

A hipotenusa do triângulo ABC formado e o ângulo x medem, respectivamente:

a) 87 cm e 30º
b) 87 cm e 60º
c) 120 cm e 30º
d) 120 cm e 60º

Os quinze alunos calcularam corretamente a medida da hipotenusa do triângulo ABC, e informaram que o ângulo x era de 60º. A figura 192 apresenta a resolução feita pelo aluno R.

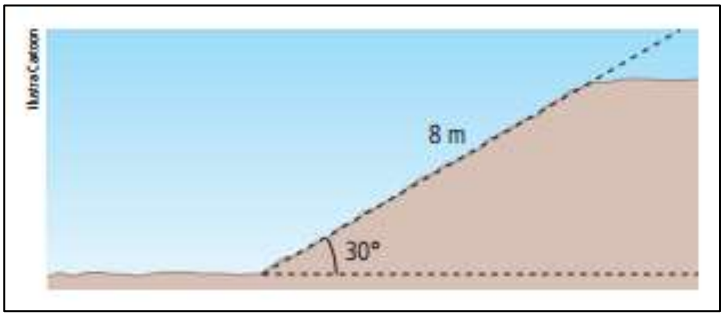
Figura 192 – Tarefa 9: situação-problema respondida pelo aluno R



Fonte: elaboração da autora (2018).

3 - Andrini e Vasconcellos (2012, p. 218) Uma pessoa tem um terreno com o seguinte declive:

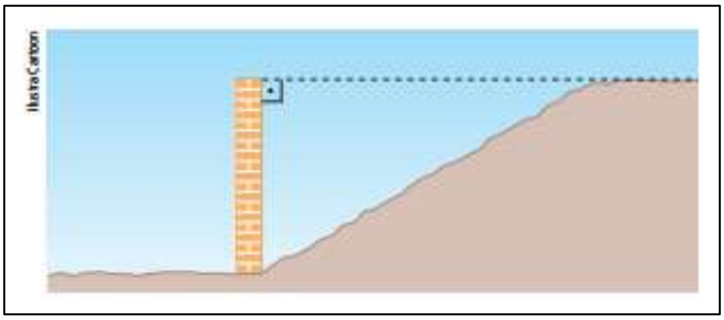
Figura 193 – Tarefa 9: ilustração do terreno



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 218).

Ela quer construir um muro para nivelar o terreno. Que altura deverá ter o muro?

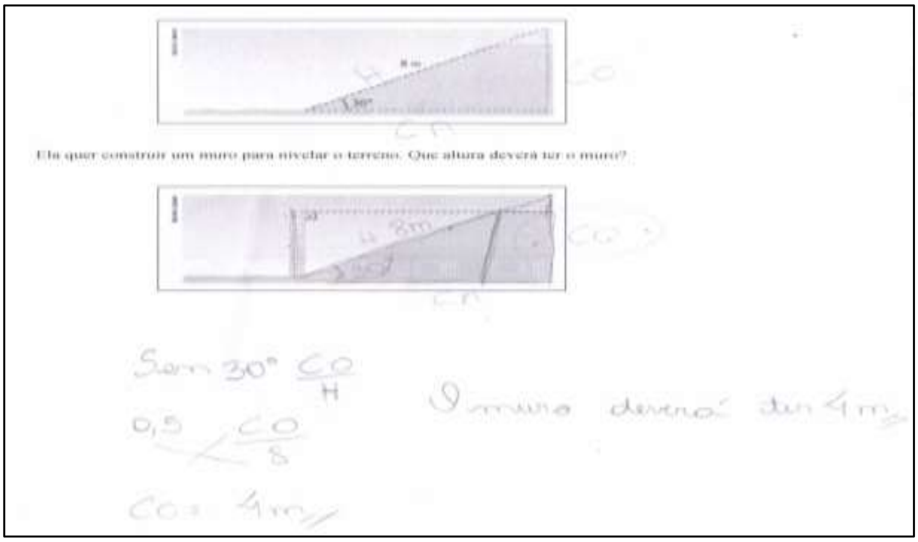
Figura 194 – Tarefa 9: Ilustração do muro



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 218).

Nesta questão a maioria dos alunos precisou de mediação, pois não conseguiram relacionar as duas imagens, no entanto todos calcularam corretamente a medida a altura que o muro deveria ter. A figura 195 ilustra os cálculos feitos pelo aluno H.

Figura 195 – Tarefa 9: situação-problema respondida pelo aluno H



Fonte: dados da pesquisa (2018).

As observações, mediações e as resoluções das tarefas permitiram analisar que os alunos apresentaram desenvolvimento das capacidades de responder situações-problemas, e internalizaram os conceitos de razões trigonométricas, “chamamos de internalização a reconstrução interna de uma operação externa” (VIGOTSKY, 2007, p. 56). Apesar da internalização observada, as dificuldades de realizar cálculos básicos de multiplicação dos meios pelos extremos se mantiveram, sobretudo quando tinham que calcular medidas que correspondiam à hipotenusa das razões trigonométricas seno e cosseno.

Durante a realização das tarefas uma situação chamou a atenção, o fato dos alunos não questionarem porque estudar os conteúdos abordados no decorrer da realização do experimento didático-formativo, fato comum no ensino-aprendizagem de Matemática. Pode-se afirmar que a realização de atividades com situações-problema tenha contribuído para compreensão da aplicação dos conteúdos.

Em relação ao método de ensino-aprendizagem proposto no decorrer do experimento didático-formativo, Vygotsky (2007, p. 64) afirmava que "o método pode ser chamado de método 'desenvolvimento-experimental' no sentido que provoca ou cria artificialmente um processo de desenvolvimento psicológico", e apontava a importância do aluno relacionar o que aprende na escola com a vida cotidiana.

5.13 Avaliação do experimento didático-formativo

Com o intuito dos alunos avaliarem a realização do experimento didático-formativo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo, aplicou-se no decorrer das aulas 49 e 50, uma avaliação composta com perguntas objetivas e subjetivas, que possibilitou aos alunos entre outras coisas, classificar etapas e ações propostas, apontando pontos positivos e negativos, bem como apresentar sugestões. O quadro 14 apresenta o planejamento da avaliação.

Quadro 14 – Planejamento da avaliação do experimento didático-formativo

Avaliação do experimento didático formativo	
Período:	29/06/2018
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Trigonometria no triângulo retângulo.
Objeto Geral	Obter dados a respeito da opinião dos alunos referente à organização do processo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo.
Recursos	Avaliação do experimento didático formativo.
Procedimentos	Os alunos deverão responder as questões objetivas e objetivas de forma individual.

Avaliação/instrumentos	Análise das respostas das questões/monitoramento, observação, avaliação e registro em diário pessoal.

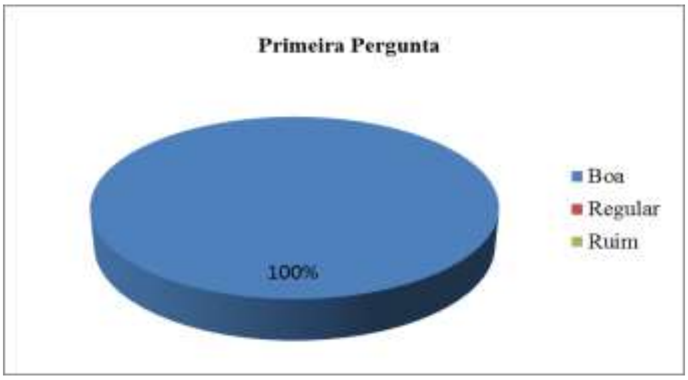
Fonte: Plano de ensino (2018) (Apêndice A).

Foi proposto aos alunos que respondessem a avaliação de forma anônima, com o intuito de garantir o sigilo das respostas. Apesar de a avaliação ser composta com perguntas objetivas e subjetivas, a maioria dos alunos responderam apenas as perguntas objetivas. A seguir, são apresentadas as perguntas da avaliação, as respostas subjetivas de alguns alunos[16] e gráficos que apresentam o percentual de resposta das perguntas subjetivas.

Primeira pergunta

Em relação à pesquisa e apresentação do seminário referente à história dos principais matemáticos que contribuíram com o desenvolvimento da trigonometria, na sua opinião, essa experiência foi:

Gráfico 3 – Resultado da primeira pergunta



Fonte: elaborado pela autora (2018).

Quando questionado referente aos pontos positivos, alguns alunos responderam: “foi muito boa, pois conseguimos aprender bastante coisa”; “Aprendi bastante, gostei muito de toda matéria”; “Aprendemos coisas que nunca imaginava aprender”; e “As aulas foram descontraídas, e tive facilidade em aprender”.

No tocante aos pontos negativos, as respostas foram: “Seria não ter matéria no caderno, mais tivemos matéria no caderno também”; “No inicio um pouco de dificuldade

[16] As respostas subjetivas foram transcritas literalmente das avaliações dos alunos.

mais logo aprendemos”; “Algumas dificuldades, porém tudo se resolveu”; e “Não vi nem um”.

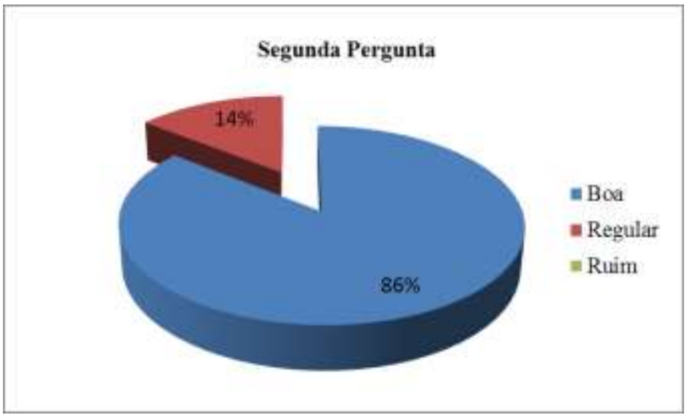
Apenas dois alunos apresentaram sugestões: “Acredito que alguns monitores”; e “Mais auxílio de monitor”. Provavelmente, essa sugestão de monitores, deve-se, em virtude, a dificuldade que os alunos apresentaram ao manusear as ferramentas do *software* Geogebra, pois não era possível atender em tempo hábil a todos os alunos que solicitavam mediação.

Embora a possibilidade de solicitar monitores de laboratório, optou-se por realizar o experimento didático-formativo apenas com a mediação da professora, e de alunos que apresentaram facilidade.

Segunda pergunta

No que tange ao questionário perfil do aluno, aplicado no início das aulas, na sua opinião, essa experiência foi:

Gráfico 4 – Resultado da segunda pergunta



Fonte: elaborado pela autora (2018).

Apenas um aluno respondeu as questões subjetivas, conforme apresentado a seguir, pontos positivos: “Bom para professora conhecer o aluno”. Os pontos negativos: “Algumas pessoas não gostaram”. Sugestão: “Algumas perguntas a menos”.

Terceira pergunta

No que se refere à avaliação diagnóstica aplicada no início das aulas, na sua opinião, essa experiência foi:

Gráfico 5 – Resultado da terceira pergunta

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Somente uma avaliação apresentou respostas para as questões subjetivas. Pontos positivos: “Método maravilhoso”; e “Alguns de início foram difíceis”.

Quarta pergunta

Concernente à atividade “Retas, ângulo e triângulos”, na sua opinião, essa tarefa foi:

Gráfico 6 – Resultado da quarta pergunta

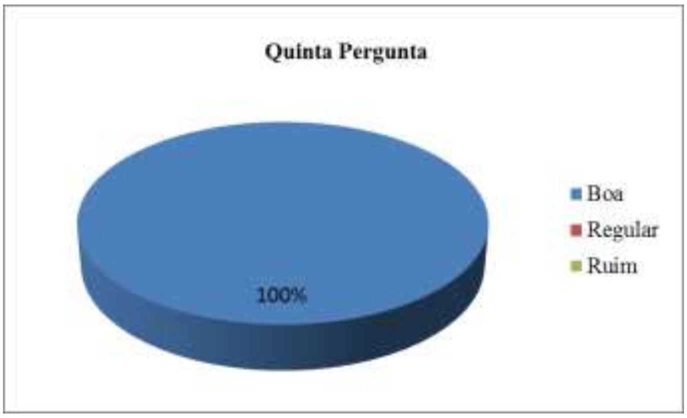
Fonte: elaborado pela autora (2018).

Quanto aos pontos positivos da atividade, dois alunos responderam: “Adorei no início”; e “Aprendemos muitas coisas”. Um aluno mencionou como ponto negativo: “As orientações de início não é fácil”, e como sugestão: “Colocar as orientações mais explicada”.

Quinta pergunta

Pertinente à construção de figuras geométricas, utilizando as ferramentas do *software* Geogebra, na sua opinião, essa experiência foi:

Gráfico 7 – Resultado da quinta pergunta



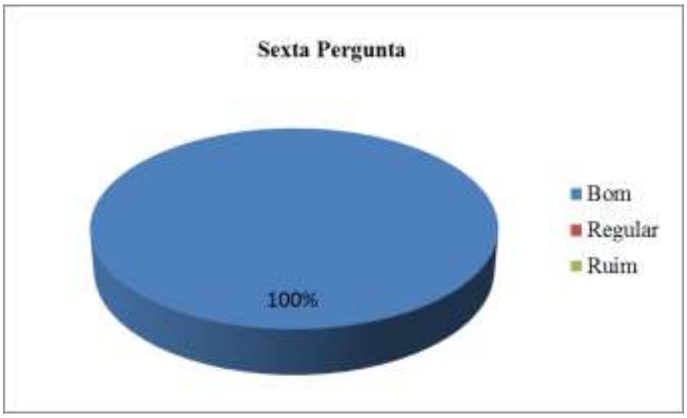
Fonte: elaborado pela autora (2018).

Nesta pergunta, apenas um aluno apontou como ponto positivo: “Aprendi a trabalhar no computador”.

Sexta pergunta

No que se refere às tarefas propostas no decorrer das aulas, dê a sua opinião em relação às orientações de construção das figuras, tamanho das figuras e tamanho da fonte dos textos:

Gráfico 8 – Resultado da sexta pergunta



Fonte: elaborado pela autora (2018).

Sétima pergunta

No tocante às tarefas propostas no decorrer das aulas, dê sua opinião quanto à clareza dos conceitos e as perguntas realizadas:

Gráfico 9 – Resultado da sétima pergunta

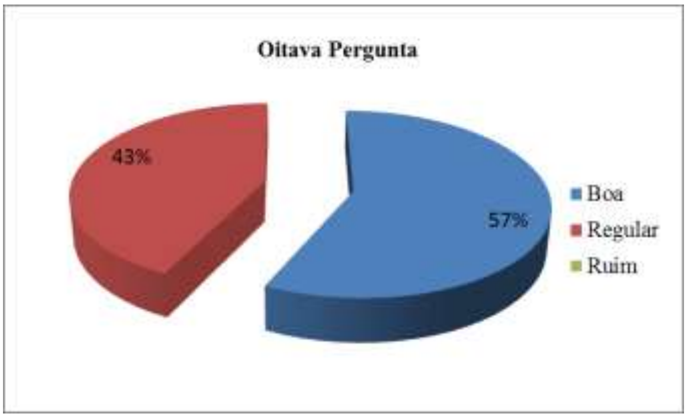
Fonte: elaborado pela autora (2018).

Como ponto positivo das tarefas, um aluno citou: “Tirou todas as nossas dúvidas”.

Oitava pergunta

Referente às investigações propostas no decorrer das aulas, na sua opinião, essa experiência foi:

Gráfico 10 – Resultado da oitava pergunta

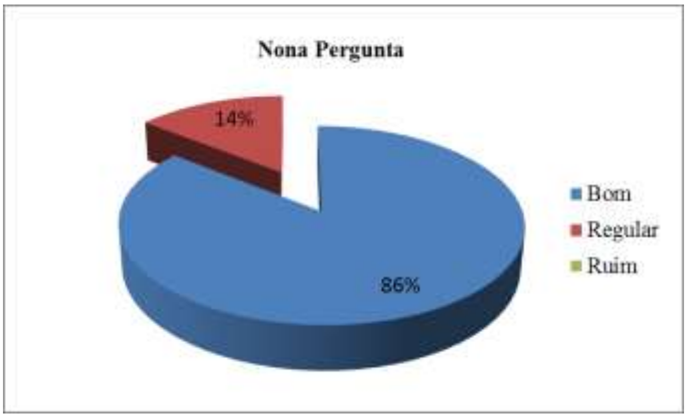


Fonte: elaborado pela autora (2018).

Nona pergunta

Concernente aos laboratórios de informática e computadores utilizados no decorrer das aulas, dê sua opinião:

Gráfico 11 – Resultado da nona pergunta



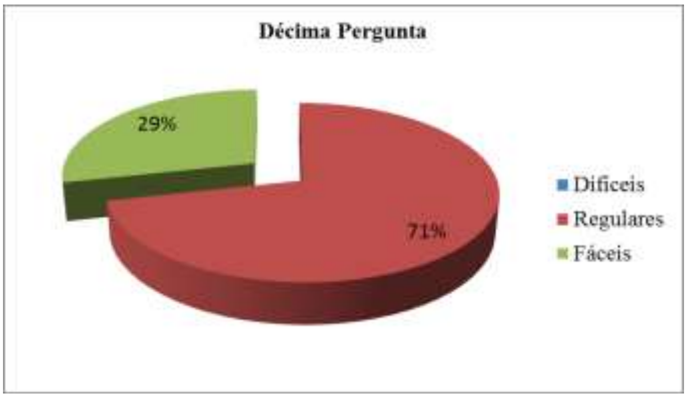
Fonte: elaborado pela autora (2018).

Quanto aos pontos positivos, dois alunos responderam: “As aulas ficaram mais interessantes e passava muito rápido o tempo”; e “Foi ótimo gostei muito”. Como ponto negativo, um aluno citou: “Foi que alguns alunos não tinham experiência em computação, por isso era ruim alguns contratempo que aconteceu”.

Décima pergunta

Em relação aos conteúdos ministrados no decorrer das aulas, você classifica como:

Gráfico 12 – Resultado da décima pergunta

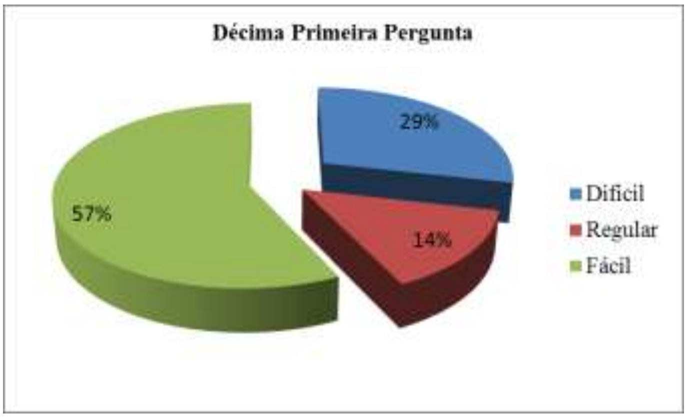


Fonte: elaborado pela autora (2018).

Décima primeira pergunta

Quanto à utilização das ferramentas do *software* Geogebra, você classifica como:

Gráfico 13 – Resultado da décima primeira pergunta

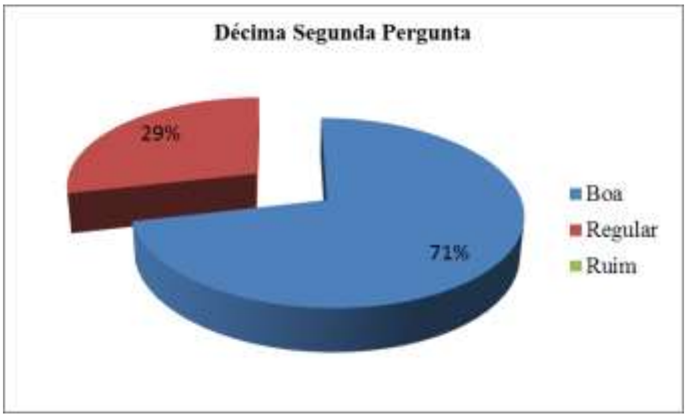


Fonte: elaborado pela autora (2018).

Décima segunda pergunta

Referente à mediação da professora, dê sua opinião:

Gráfico 14 – Resultado da décima segunda pergunta



Fonte: elaborado pela autora (2018).

Concernente à mediação da professora, um aluno respondeu como ponto positivo: “Muito dedicada e compromissada com o aprendizado dos alunos”.

Décima terceira pergunta

Quanto à sua aprendizagem, você classifica que foi:

Gráfico 15 – Resultado da décima terceira pergunta

Fonte: elaborado pela autora (2018).

No que tange à avaliação do experimento didático-formativo, apesar da maioria dos alunos não ter apontado pontos positivos, negativos e sugestões, os resultados possibilitaram examinar que, a metodologia de ensino-aprendizagem foi aprovada pelos alunos.

Em relação à dificuldade dos alunos em responder as perguntas subjetivas, os resultados de avaliações da educação brasileira apontam que a maioria dos alunos que conclui o Ensino Médio tem nível insuficiente de aprendizagem em matemática e português, portanto, apresentam dificuldades ao realizar cálculos, fazer leitura e redigir textos.

Em relação à avaliação da aprendizagem, Luckesi (2011, p. 82) ressalta que

> A atual prática da avaliação escolar estipulou como função do ato de avaliar a *classificação* e não o *diagnóstico*, como deveria ser constitutivamente. Ou seja, o julgamento de valor, que teria a função de possibilitar uma nova tomada de decisão sobre o objeto avaliado, passa a ter a função de possibilitar uma tomada de decisão sobre o objeto avaliado, passa a ter a função estática de classificar um objeto ou um ser humano histórico num padrão definitivamente determinado. Do ponto de vista da aprendizagem escolar, poderá ser *definitivamente* classificação como *inferior*, *médio* ou *superior*. Classificações essas que são registradas e podem ser transformadas em números e, por isso, adquirem a possibilidade de serem somadas e divididas em médias. Será que o inferior não pode atingir o nível médio ou superior? Todos os educadores sabem que isso é possível, até mesmo defendem a ideia do crescimento. Todavia, parece que todos preferem que isto não ocorra, uma vez que optam por, definitivamente, deixar os alunos com as notas obtidas, como forma de “castigo” pelo seu desempenho possivelmente inadequado.

No decorrer da realização do experimento didático-formativo, o ato de avaliar não foi classificatório, embora os registros terem sido transformados em números, não foram avaliados erros ou acertos, mas o desenvolvimento dos alunos.

Nesse contexto, como o aproveitamento em cada componente curricular deveria ser expresso por nota de 0 (zero) a 10,0 (dez), calculou-se a razão entre 10,0 (dez) e a quantidade de atividades realizadas pelo aluno no componente curricular. Foi considerado aprovado no componente curricular, o aluno que obteve média igual ou superior a 6,0 (seis) e frequência igual ou superior a 75%.

Referente ao papel da avaliação da aprendizagem escolar, Luckesi (2011, p. 89) cita que

> Para que a avaliação educacional escolar assuma o seu verdadeiro papel de instrumento dialético de diagnóstico para o crescimento, terá de se situar e estar a serviço de uma pedagogia que esteja preocupada com a transformação social e não com a sua conservação. A avaliação deixará de ser autoritária se o modelo social e a concepção teórico-prática da educação também não forem autoritários. Se as aspirações socializantes da humanidade se traduzem num modelo socializante e democrático, a pedagogia e a avaliação em seu interior também se transformarão na perspectiva de encaminhamentos democráticos.

Dos alunos que compunham a turma, apenas dois reprovaram. O aluno **O** por não obter a frequência mínima, devido à desistência do curso, e o aluno **P**, em virtude de não alcançar a média mínima, pois faltou a muitas aulas e, portanto, deixou de realizar várias tarefas.

Luckesi (2011, p. 93) se referindo ao papel do professor ao avaliar cita que

> Um educador que se preocupe com que a prática educacional esteja voltada para a transformação, não poderá agir inconsciente e irrefletidamente. Cada passo de sua ação deverá estar marcado por uma decisão clara e explícita do que está fazendo e para onde possivelmente está encaminhando os resultados de sua ação. A avaliação, neste contexto, não poderá ser uma ação mecânica. Ao contrário, terá de ser uma atividade racionalmente definida, dentro de um encaminhamento político e decisório a favor da competência de todos para a participação democrática da vida social.

Durante a realização do experimento didático-formativo, os objetivos da avaliação foram diagnosticar dificuldades, etapas da aprendizagem e o nível de desenvolvimento dos alunos.

Assim, a avaliação não foi usada como instrumento de punição ou de classificação, não se preocupou com o mínimo ou com o máximo de nota para aprovação, mas avaliar o processo de ensino-aprendizagem, conforme leciona Davydov (1988, p. 176)

> A ação de avaliação possibilita determinar se está assimilado, ou não, e em que medida, o procedimento geral de solução da tarefa de aprendizagem, se o resultado das ações de aprendizagem corresponde, ou não, e em que medida, ao objetivo final. Desta forma, a avaliação não consiste na simples constatação destes momentos, mas no exame qualitativo substantivo do resultado da assimilação (do procedimento geral da ação e do conceito correspondente), em sua confrontação com a finalidade. É justamente a avaliação que "informa" aos escolares se resolveram ou não determinada tarefa de aprendizagem.

No decorrer do experimento didático-formativo a ação de avaliação, entre outras análises, possibilitou examinar se as tarefas propostas estavam sendo efetuadas e se os conteúdos ensinados estavam sendo assimilados pelos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa organizou e realizou um experimento didático-formativo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo, fundamentado nas perspectivas do ensino desenvolvimental, integrando o uso do *software* Geogebra e proposições da investigação matemática. Como citado no início deste trabalho, uma das dificuldades iniciais foi encontrar uma escola para realizar o experimento didático-formativo, pois as instituições públicas pesquisadas não possuíam laboratório de informática. Esse fato possibilitou identificar um dos problemas da educação pública municipal e estadual da região, políticas públicas educacionais para integração de tecnologias da informação e comunicação ao ensino.

Nesse diapasão, desse modo, a organização do experimento foi possível a partir do primeiro semestre de 2018, quando assumi a disciplina de Matemática dos cursos de educação profissional integrado ao Ensino Médio na modalidade de educação de jovens e adultos do Instituto Federal Goiano – Campus Rio Verde.

Embora o projeto inicial da pesquisa não ter sido desenvolvido para o PROEJA, a realização do experimento didático-formativo com os sujeitos dessa área da educação permitiu a coleta de dados importantes para análise da organização do ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo.

Ademais, os estudos sobre a teoria histórico-cultural de Vygotsky (2007) contribuíram de forma positiva, porque ajudaram a compreender os motivos do déficit de aprendizagem dos alunos, isso a partir do conhecimento de suas histórias culturais e, sobretudo, de suas trajetórias estudantis.

Assim, os desafios da pesquisa contribuíram para reflexão da própria prática como professora, já que os sujeitos eram alunos da pesquisadora.

Ao iniciar o experimento parecia impossível o desenvolvimento dos sujeitos, devido às dificuldades. Ao aplicar a avaliação diagnóstica, foi possível analisar que a maioria dos alunos apresentava apenas conhecimentos empíricos em relação aos conteúdos abordados nas situações-problema.

Em relação à construção de figuras geométricas com ferramentas do Geogebra, a reação inicial dos sujeitos foi de rejeição, não acreditavam que seria possível aprender matemática utilizando um *software*. Todavia, após as primeiras tarefas, a maioria dos alunos desejava as aulas de matemática no laboratório de informática.

No que se refere às tarefas de estudo propostas durante a realização do experimento didático-formativo, as dificuldades apresentadas em relação à construção de figuras geométricas, utilizando ferramentas do Geogebra, as quais se estenderam para as investigações.

Nesse sentido, foram momentos difíceis, os sujeitos da pesquisa com dificuldades de investigar, responder as questões propostas e a professora tentando mediar os alunos durante a realização das tarefas. Alunos chegando atrasado, saindo mais cedo, ou faltando às aulas, o que dificultou em muitos momentos a realização do experimento didático-formativo.

No entanto, a mediação de alunos com mais facilidade, as ações propostas durante a realização das atividades propostas no tutorial do Geogebra que possibilitaram a construção, e reconstrução de figuras geométricas e a apropriação de ferramentas do *software*, contribuíram para superação das dificuldades iniciais.

As investigações realizadas pelos alunos, na tentativa de responder as questões propostas no tutorial, contribuíram para internalização dos signos e permitiram aos alunos identificar o conceito geral de retas, ângulos e triângulos.

Assim, a tarefa de investigação de ângulos internos de um triângulo permitiu o movimento do abstrato ao concreto e apropriação dos conceitos teóricos de triângulo retângulo. As tarefas de investigação de relações entre as áreas de polígonos possibilitaram apresentar e formalizar o Teorema de Pitágoras. As atividades propostas a partir de investigações com triângulos retângulos semelhantes possibilitaram identificar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. As tarefas de aplicação do Teorema de Pitágoras, e das razões trigonométricas, possibilitaram identificar que os alunos transitaram dos conceitos empíricos, empregados pela maioria dos alunos durante a resolução das questões propostas na avaliação diagnóstica, para os conceitos científicos.

Embora os alunos tenham apresentado um desenvolvimento considerável em relação à apropriação dos conceitos dos objetos, os alunos B e J mantiveram as dificuldades de construção de figuras geométricas com as ferramentas do *software* Geogebra. Estes alunos no decorrer da realização do experimento didático-formativo se recusaram a ser mediados pelos colegas de classe e optaram por realizar as ações e as atividades propostas, mediados apenas pela professora. Desse modo, esses alunos apresentaram dificuldades ao manusear as ferramentas do *software* Geogebra. Portanto, é possível que a interação com outros alunos, poderia ter contribuído com a aprendizagem e o desenvolvimento desses alunos.

Esse fato possibilitou analisar que, a ausência de interação entre os alunos durante a realização das tarefas propostas, pode afetar a aprendizagem, o desenvolvimento dos alunos e comprometer a realização do experimento didático-formativo, o qual “visa justamente investigar os processos de surgimento de novas formações mentais nos alunos durante a atividade de estudo" (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 340).

Contudo, considerando que aquilo que os alunos podem fazer hoje com mediação amanhã serão capazes de fazer sozinhos, considera-se que a aprendizagem dos alunos J e B não foi totalmente comprometida, pois apesar das dificuldades, conseguiram realizar as tarefas com a mediação da professora. Além disso, o aluno B apresentou um excelente desenvolvimento em relação às tarefas de aplicação dos conteúdos.

Analisando todas as etapas do experimento didático-formativo realizado, pode-se afirmar que organizar o ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo, na perspectiva do ensino desenvolvimental, é complexo, pois requer intenso planejamento e mudança de atitudes. O professor tem que reaprender a ensinar, deixar de centro ser o centro do processo de ensino e passar a mediar à situação de aprendizagem.

Apesar do experimento didático-formativo ter sido realizado no decorrer de um semestre letivo, considera-se que este foi um piloto, visto que ainda a muito a aprender. Porém, ressalta-se que as ações propostas no decorrer das aulas da disciplina de Matemática IV contribuíram com o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de trigonometria no triângulo retângulo. Os dados obtidos possibilitaram analisar que os alunos apresentaram desenvolvimento das capacidades de aprendizagem.

No entanto, a necessidade de pesquisas complementares e estudar a respeito do ensino desenvolvimental proposto por Vygotsky e aprimorado por Davydov. Deve-se salientar que a realização desta pesquisa contribuiu de forma positiva para minha formação e atuação como professora de matemática, aprendi muito com a organização no experimento didático-formativo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo-retângulo, mas tenho ainda que aprender muito a respeito de como contribuir com a aprendizagem e desenvolvimento dos alunos.

Acredito que apesar dos problemas enfrentados pela educação brasileira, preciso como professora, investigar e colocar em prática metodologias que possam vir a contribuir com as mudanças que almejo para a educação. Aos professores de todos os níveis de ensino deixo aqui uma rogativa "não desistam da educação enquanto profissionais desta área". Digo isto, pois mesmo antes de começar a lecionar, quando ainda estava cumprindo o estágio obrigatório, graduanda, observei por inúmeras vezes o desânimo, e a desmotivação de muitos profissionais da educação. Reconheço que são inúmeros os fatores que contribuem para o cenário atual da educação brasileira, alguns citados neste trabalho e que os desafios são muitos, mas não podemos desistir de acreditar na melhoria do ensino-aprendizagem no contexto das escolas.

Por fim, espero que este estudo possa motivar professores, e profissionais da área da educação a pesquisar a respeito das contribuições do ensino desenvolvimental para o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos escolares, para o desenvolvimento das capacitadas dos alunos.

REFERÊNCIAS

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira; COTIC, Norma Susana. **Geogebra**: na produção do conhecimento matemático. São Paulo: Iglu, 2014.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. Praticando Matemática, 9. **Coleção praticando matemática**. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

______. Praticando Matemática, 9. **Coleção praticando matemática**. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Aprendendo matemática com o Geogebra**. São Paulo: Editora Exato, 2010.

BALDISSERA, Adelina. Pesquisa-ação: uma metodologia do "conhecer" e do "agir" coletivo. **Revista Sociedade em Debate**. Pelotas. Universidade Católica, 2001. p. 05-25.

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática aula por aula.** Volume único. Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2009.

BARROS, Kliver Moreira; VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. A teoria do ensino desenvolvimental: o papel do professor na estruturação e aplicação de atividades de estudo. **Anais da XIII Semana de Licenciatura**. Goiás: IFG, 2016.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini.** 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

______. Ministério da Educação (MEC). **Portaria Normativa n. 17, de 28 de dezembro de 2009.** Diário Oficial da União. Seção 1. IMPRENSA NACIONAL, 29 de dezembro de 2009.

______. Ministério da Educação (MEC). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Nota normativa do Ideb 2017**. Disponível em:

<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/o_que_e_o_ideb/nota_informativa_ideb.pdf>. Acesso em: 08 set. 2018.

______. Ministério da Educação (MEC). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Estatísticas do Ideb 2017**. Ensino médio. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/o_que_e_o_ideb/nota_informativa_ideb.pdf>. Acesso em: 08 set. 2018.

______. Ministério da Educação (MEC). Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **IDEB – Resultados e Metas**. Disponível em:< http://ideb.inep.gov.br/resultado/>. Acesso em: 07 set. 2018.

______. Ministério da Educação. Inep. Diretoria de Estatísticas Educacionais (DEED). Diretoria de Avaliação da Educação Básica (DAEB). **Resumo Técnico IDEB**. Resultados do índice de desenvolvimento da educação básica. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/ResumoTecnico_Ideb_2005-2017.pdf>>. Acesso em: 07 de set. 2018.

______. Ministério da Educação (MEC). Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja). Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/encceja >. Acesso em: 05 ag. de 2018.

COSTA, Váldina Gonçalves da. **Geometria**: semelhança, circunferência, polígonos regulares, áreas e geometria de posição. Uberaba: Universidade de Uberaba, 2011.

DANIELS, Harry (Org.). **Uma introdução a Vygotsky**. Tradução Marcos Bagno. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

DAVYDOV, Vasily. Vasilovich. **Problemas do Ensino Desenvolvimental**: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Textos publicados na Revista Soviet Education, August/VOL XXX, N° 8, sob o título "Problems of Developmental Teaching. The Experience of Thbeoretical and Experimental Psycholgogical Research – Excerpts", de V.V. Davydov. EDUCAÇÃO SOVIÉTICA. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas (1988).

DEMO, Pedro. **Mitologias da educação:** de como ignorar, em vez de enfrentar problemas. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2010.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP. Editora: Unicamp, 2004.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Coleção formação de professores. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2012.

FLOOD; Raymond; WILSON, Robin . A História dos Grandes Matemáticos: as descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos. Coleção História da Matemática. São Paulo: M. Books do Brasil, 2013.

FONSECA, Laerte. **Aprendizagem em trigonometria**: obstáculos, sentidos e mobilizações. São Cristóvão: Editora UFS; Aracaju: Fundação Oviêdo Teixeira, 2010.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (org.). **Métodos de pesquisa.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GOIÁS. **Projeto Pedagógico do Curso Técnico em Edificações Integrado ao Ensino Médio na modalidade de Educação de Jovens e Adultos PROEJA.** Goiás: Instituto Federal Goiano, 2015.

______. Projeto Pedagógico de Curso Técnico em Administração Integrado na Modalidade PROEJA. Goiás: Instituto Federal Goiano, 2018.
KOORO, Méri Bello; LOPES, Celi Espasandin. **O conhecimento matemático na educação de jovens e adultos.** São Paulo: UNICSUL, 2013.

LIBÂNEO, José Carlos; FREITAS, Raquel A. Marra da Madeira. Valisy Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés. **Ensino Desenvolvimental**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. 2. ed. Uberlândia: EDUFU, 2015. p. 327-362.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar**: estudos e proposições. 22 ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MOTA, Ermerson Ferreira Batista; MAIA, Fernanda Alves; ALMEIDA, Maria Tereza Carvalho; FRANÇA, Silvana Diamantino. **Geometria Dinâmica/PIBID/Unimontes:** contribuições do Geogebra para a Matemática na educação básica. Curitiba: Prismas, 2013.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática.** Campinas, SP: Papirus, 2012.

PITOMBEIRA, João Bosco (Coord.). **Matemática, primeira série, ensino médio**. Multicurso v. 1. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2004.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigação matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

OLIVEIRA, Marta Kohl. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico. 5. ed. São Paulo: Scipione, 2010. (Coleção Pensamento e ação na sala de aula)

REGO, Tereza Cristina. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da educação. 25 ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de História da Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANCHO, Juana María. De tecnologias da informação e comunicação a recursos didáticos. In: SANCHO, Juana Maria; HERNÁNDEZ, Fernando; e colaboradores. **Tecnologias para transformar a educação.** Tradução: Valério Campos. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SBPC. Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC). **A SBPC**: Quem somos. Disponível em <http://portal.sbpcnet.org.br/a-sbpc/quem-somos/>. Acesso em: 19 ago. 2018.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar**: matemática. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática, 9º ano**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2013.

TARDIF, Maurice. **Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários**: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. Revista Brasileira de Educação. Jan/Fev/ Mar/Abr. 2000. p. 5-24.

TRIVINÕS, Augusto N.S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação – o positivismo – a fenomenologia – o marxismo. São Paulo: Atlas S. A, 1987.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. Experimentando, Conjecturando, Formalizando e Generalizando: articulando investigação matemática com o Geogebra. **Revista Educativa**, v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. Goiânia: Educativa, 2012.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas; JESUS, Cesar Cruvinel de. Uma Sequência Didática Para o Ensino de Matemática com o *Software* Geogebra. **Revista Estudos**, v. 41, n. 1, p. 59-75, jan./mar. Goiânia: UCG, 2014.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. COLE, Michael; JOHN-STEINER, Vera; SCRIBNER, Sylvia; SOUBERMAN, Ellen (Orgs.). Tradução: NETO, José Cipolla Neto; BARRETO, Luís Silveira Menna; AFECHE, Solange Castro. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

WESCHENFELDER, Maria Helena. **A matemática na educação de pessoas jovens, adultas e idosas**. Passo Fundo: UPF, 2003.

YIN, Robert K. **Pesquisa qualitativa**: do início ao fim. Revisão técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Plano de Ensino

PLANO DE ENSINO	
Instituição: Instituto Federal Goiano – Campus Rio Verde	
Curso: Técnico em Administração e Técnico em Edificações – Cursos integrados ao Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos – PROEJA	
Professora: Kelen Helena de Oliveira	**Disciplina:** Matemática IV
Turma: IV Período	**Turno:** Noturno
Conteúdo: Trigonometria no triângulo retângulo	**Carga horária:** 44 horas aulas de 50 minutos
Período: 22/02/2018	
Objetivo Geral: analisar o desenvolvimento do pensamento cognitivo dos alunos.	
Metodologia: realizar tarefas de estudo de trigonometria no triângulo retângulo construindo e investigando figuras geométricas, experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar, quando possível. Aplicar os conteúdos estudados a situações problemas.	
Recursos didáticos: quadro, pincel, apagador, Datashow, notebook, computadores, s*oftware* Geogebra, calculadora, material impresso (questionários, avaliações, tarefas de estudo).	
Instrumentos/procedimentos de coleta de dados: observações, filmagens, fotos, diário pessoal, questionário, avaliações, tarefas e atividades de estudo.	

Avaliação diagnóstica	
Data:	23/02/2018
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Trigonometria no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras. Razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º.
Objeto Geral	Reconhecer o nível de desenvolvimento real dos alunos referente aos conteúdos abordados na avaliação.
Recursos	Calculadora e avaliação diagnóstica.
Procedimentos	Os alunos deverão ilustrar e resolver as situações problemas de forma individual.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Tarefa: retas, ângulos e triângulos	
Data:	01/03/2018
Carga horária	6 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Retas, ângulos e triângulos.
Objeto Geral	Analisar o nível de conhecimento dos alunos quando apresentadas figuras geométricas e suas respectivas denominações.
Recursos	Tarefa de estudo.
Procedimentos	Relacionar figuras geométricas a suas respectivas nomeações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Tutorial do *software* Geogebra	
Data:	16/03/2018
Carga horária	6 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Ponto, reta, semirreta, segmento de reta, retas perpendiculares, retas paralelas, retas coincidentes, retas concorrentes, classificação de ângulos e triângulos.
Objeto Geral	Reconhecer as ferramentas do *software* Geogebra. Apropriação de conceitos de reta, ângulos e triângulos.
Recursos	Computadores, Calculadora, *Software* Geogebra e Tutorial.
Procedimentos	Construir retas, ângulos e triângulos utilizando ferramentas do Geogebra, e investigar as propriedades das figuras geométricas construídas.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Tarefa 01 – Investigando ângulos internos de um triângulo retângulo	
Data:	12/04/2018
Carga horária	4 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Ângulos internos de um triângulo retângulo.
Objeto Geral	Reconhecer um triângulo como retângulo.
Recursos	Computadores, tarefa de estudo, calculadora e *Software* Geogebra.
Procedimentos	Construir um triângulo a partir das instruções da tarefa.

	Determinar as medidas dos ângulos internos do triângulo. Investigar as relações existentes entre os ângulos internos do triângulo.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Tarefa 02 - Investigando relações entre áreas de polígonos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo	
Data:	20/04/2018
Carga horária	5 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Triângulo retângulo, polígonos regulares, medidas de comprimento e áreas, Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Reconhecer, formalizar e generalizar o Teorema de Pitágoras.
Recursos	Tarefa de estudo, calculadora, computadores e *Software* Geogebra.
Procedimentos	Construir e determinar as medidas dos lados de um triângulo retângulo, construir polígonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo, determinar a área dos polígonos regulares, investigar relações existentes entre as áreas dos polígonos construídos.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Tarefa 03 – Formalizando o Teorema de Pitágoras	
Data:	04/05/2018
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Formalizar o Teorema de Pitágoras.
Recursos	Tarefa de estudo, *software* Geogebra.
Procedimentos	Construir, investigar uma demonstração do Teorema de Pitágoras.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Tarefa 04 - Aplicando o Teorema de Pitágoras na resolução de situações problemas	

Data:	10/05/2018
Carga horária	3 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de situações problemas.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar situações propostas e aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução dos problemas.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Tarefa 05 - Aplicação do Teorema de Pitágoras	
Data:	18/05/2018
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de situações problemas.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos e aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Tarefa 06 – Investigando relações entre elementos de um triângulo retângulo	
Data:	24/05/2018
Carga horária	3 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Triângulo retângulo, hipotenusa, cateto oposto e adjacente.
Objeto Geral	Investigar relações entre as medidas do cateto oposto e adjacente de triângulos retângulos.
Recursos	*Software* Geogebra e tarefa de estudo.
Procedimentos	Construir um triângulo retângulo, determinar as medidas de seus ângulos e lados, anotar as medidas da hipotenusa e dos catetos. Investigar as relações entre os catetos oposto e adjacente.

Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Tarefa 07 – Investigando razões trigonométricas em triângulos retângulos semelhantes	
Data:	07/06/2018
Carga horária	7 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Semelhança entre triângulos retângulos, razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Reconhecer as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente a partir de investigações em triângulos retângulos semelhantes.
Recursos	*Software* Geogebra e tarefa de estudo.
Procedimentos	Construir triângulos retângulos semelhantes a partir de semirretas, retas perpendiculares e pontos, determinar as medidas dos lados, e a amplitude dos ângulos do triângulo ADF. Calcular as razões entre os lados do triângulo ADF. Investigar as relações entre as razões dos triângulos construídos.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Tarefa 08 – Aplicação de razões trigonométricas I	
Data:	22/06/2018
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Aplicar razões trigonométricas na resolução de situações problemas.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos, ângulos e medidas e aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Tarefa 09 – Aplicação de razões trigonométricas II	

Data:	28/06/2018
Carga horária	1 hora-aula de 50 minutos
Conteúdo	Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Aplicar razões trigonométricas na resolução de situações problemas.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos, ângulos e medidas, e aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.
Avaliação do experimento didático formativo	
Período:	29/06/2018
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Trigonometria no triângulo retângulo.
Objeto Geral	Obter dados a respeito da opinião dos alunos referente à organização do processo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo.
Recursos	Avaliação do experimento didático formativo.
Procedimentos	Os alunos deverão responder as questões objetivas e objetivas de forma individual.
Avaliação/instrumentos	Análise das respostas das questões.

REFERÊNCIAS

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira; COTIC, Norma Susana. Geogebra: na produção do conhecimento matemático. São Paulo: Iglu, 2014.

ANDRINI, Álvaro. **Praticando matemática 9.** 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática 9**. 4 ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática aula por aula:** versão com trigonometria, 2: ensino médio. São Paulo: FTD, 2009.

LIBÂNEO, José Carlos; FREITAS, Raquel A. Marra da Madeira. Valisy Vasilyevich

Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés. **Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. 2. ed. Uberlândia: EDUFU, 2015. p. 327-362.

MOTA, Ermerson Ferreira Batista; MAIA, Fernanda Alves; ALMEIDA, Maria Tereza Carvalho; FRANÇA, Silvana Diamantino. **Geometria Dinâmica/PIBID/Unimontes:** contribuições do Geogebra para a Matemática na educação básica. Curitiba: Prismas, 2013.

PITOMBEIRA, João Bosco (Coord.). **Matemática, primeira série, ensino médio.** Multicurso v. 1. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2004.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigação Matemáticas na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática, 9º ano**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar:** matemática: 1. 2. Ed. São Paulo: FTD, 2013.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. Experimentando, Conjecturando, Formalizando e Generalizando: articulando investigação matemática com o Geogebra. **Revista Educativa,** v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. Goiânia: Educativa, 2012.

APÊNDICE B – Questionário perfil do estudante

QUESTIONÁRIO PERFIL DO ESTUDANTE	
Disciplina: MATEMÁTICA IV Professora: KELEN HELENA DE OLIVEIRA Data: ____/ ____/ _____	Turma: IV PROEJA Técnico em Administração ( ) Técnico em Edificações ( )
1. Nome completo:	
2. Sexo: Feminino ( ) Masculino ( )	3. Idade:
4. Estado Civil: Solteiro ( ) Casado ( ) Divorciado ( )	5. Tem filhos? Não ( ) Sim ( ) Quantos? _______
6. Qual a sua profissão?	7. Atualmente você trabalha? Sim ( ) Não ( )
8. Tipo de trabalho: Autônomo ( ) Empregado ( ) Voluntário ( ) Estágio ( )	9. Em qual turno trabalha? Matutino ( ) Vespertino ( ) Noturno ( )
10. Quais dias da semana você trabalha? Segunda ( ) Terça ( ) Quarta ( ) Quinta ( ) Sexta ( ) Sábado ( ) Domingo ( )	11. Você reside na zona: Urbana ( ) Rural ( )
12. Município de residência: Rio Verde ( ) Outro ____________________	13. Onde você reside é: Próprio ( ) Alugado ( ) Cedido ( )
14. Quantas pessoas moram na residência?	15. Quantas pessoas da residência trabalham?
16. Qual a renda mensal familiar? Menos de um salário mínimo ( ) Um salário mínimo ( ) Entre um salário e dois salários mínimos ( ) Mais de dois salários mínimos ( )	17. Na residência tem computador: Sim ( ) Não ( )
18. Na residência tem internet? Sim ( ) Não ( )	19. Você tem notebook? Sim ( ) Não ( )
20. Você tem celular?	21. Você tem acesso à internet via

<table>
<tr><td>Sim (   )   Não (   )</td><td>celular?
Sim (   )   Não (   )</td></tr>
<tr><td colspan="2">22. Você utiliza computador com que frequência?
Sempre utilizo (   )   raramente utilizo (   )   nunca utilizo (   )</td></tr>
<tr><td colspan="2">23. Onde você utiliza computador?
Na residência (   )   Na escola (   )   Na LAN House (   ) No trabalho (   )   nunca utilizo (   )</td></tr>
<tr><td colspan="2">24. Você utiliza tecnologia (celular, computador, internet) para estudar?
Sempre utilizo (   )   raramente utilizo (   )   nunca utilizo (   )</td></tr>
<tr><td colspan="2">25. Você utiliza tecnologia (celular, computador, internet) para estudar matemática?
Sempre utilizo (   )   raramente utilizo (   )   nunca utilizo (   )</td></tr>
<tr><td colspan="2">26. Você estudou do 1º ao 5º ano em:
Escola Pública (   ) Escola Particular (   )</td></tr>
<tr><td colspan="2">27. Você estudou do 6º ao 9º ano em:
Escola Pública (   ) Escola Particular (   )</td></tr>
<tr><td colspan="2">28. Sua formação do 1º ao 5º ano foi no:
Ensino regular (   ) Educação de Jovens e Adultos (   )</td></tr>
<tr><td colspan="2">29. Sua formação do 6º ao 9º ano foi no:
Ensino regular (   ) Educação de Jovens e Adultos (   )</td></tr>
<tr><td colspan="2">30. Você cursou algum ano do ensino médio regular? Não (   )   Sim (   )
Escola Pública (   ) Escola Particular (   ) Qual ano cursou?
______________________________</td></tr>
<tr><td colspan="2">31. Você ficou quanto tempo sem estudar formalmente antes de iniciar os estudos no PROEJA?</td></tr>
<tr><td colspan="2">32. Quais conteúdos matemáticos você estudou no I, II e III período?
____
____
____
____</td></tr>
<tr><td colspan="2">33. Quais motivos levaram você a cursar o PROEJA?
____
____</td></tr>
</table>

____ ____
34. Você gosta de estudar matemática? Sim(   )   Não(   ) Justifique sua resposta: ____ ____ ____ ____

Obrigada por responder este questionário!

APÊNDICE C – Avaliação diagnóstica

DISCIPLINA: MATEMÁTICA IV

PROFESSORA: KELEN HELENA DE OLIVEIRA

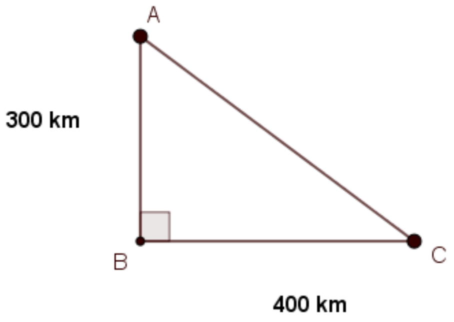
TURMA: 4º PERÍODO ____

ALUNO (A): ____

DATA: ____/ _____/ 2018

Avaliação Diagnóstica

Questão 1 – (Bianchini, 2015, p. 138) Um avião sai da cidade A e vai até a cidade B, que está à distância de 300 quilômetros. Depois, decola em direção à cidade C, a 400 quilômetros. Se o avião fosse em linha reta da cidade A para a C, quantos quilômetros percorreria?



Questão 2 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 197 - adaptada) Um marceneiro pretende construir uma estrutura de telhado com a forma de um triângulo isósceles, sabendo que a estrutura tem 6 m de base e que a altura máxima da estrutura é de 4 m, qual será a inclinação do telhado? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada. Obs.: a inclinação refere-se aos lados do telhado que ficam inclinados, e não a medida em ângulos que determinou a inclinação (condição informada aos alunos durante a realização da avaliação, pois ao adaptar a questão o enunciado ficou errado).

Questão 3 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 219) Uma escada de 8 m é encostada em uma parede, formando com ela um ângulo de 60º. A que altura da parede a escada se apoia? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

Questão 4 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 219) Para permitir o acesso a um monumento que está em um pedestal de 1,5 m de altura, será construída uma rampa com inclinação de 30º com o solo, qual será o comprimento da rampa? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

Questão 5 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 219) Um avião levanta voo sob um ângulo de 30º em relação à pista. Qual será a altura do avião quando este percorrer 4000 m em linha reta? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

Questão 6 - (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 223) Um prédio projeta uma sombra de 40 m quando os raios solares formam um ângulo de 45º com o solo. Qual a altura desse prédio? Dica: para resolver a questão desenhe a situação apresentada.

REFERÊNCIAS:

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática, 9**. Coleção praticando matemática; v. 9. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini.** 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

APÊNDICE D – Atividade: Retas, ângulos e triângulos

DISCIPLINA: MATEMÁTICA IV

PROFESSORA: KELEN HELENA DE OLIVEIRA

TURMA: 4º PERÍODO ____

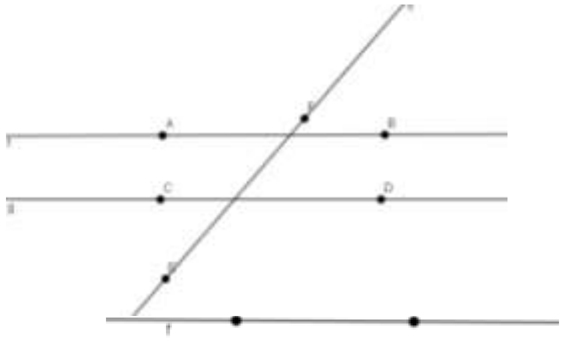
ALUNO (A): ____

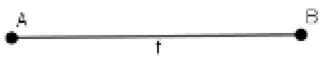
DATA: ____/ _____/ 2018

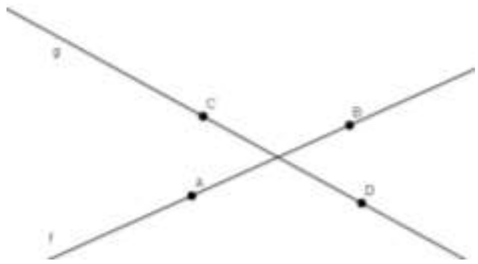
ATIVIDADE: RETAS, ÂNGULOS E TRIÂNGULOS

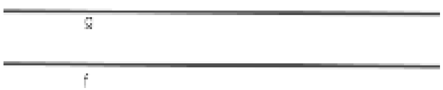
1) Classifique as seguintes figuras geométricas fundamentais:

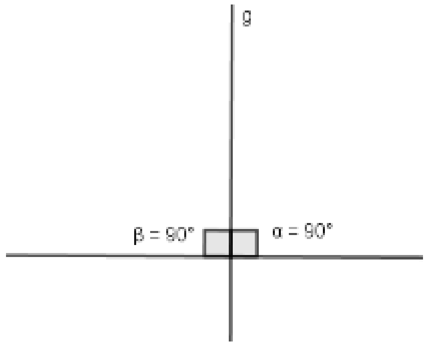
a) Semirreta
b) Segmento de reta
c) Reta
d) Retas paralelas
e) Retas perpendiculares
f) Retas concorrentes
g) Retas coincidentes
h) Reta transversal





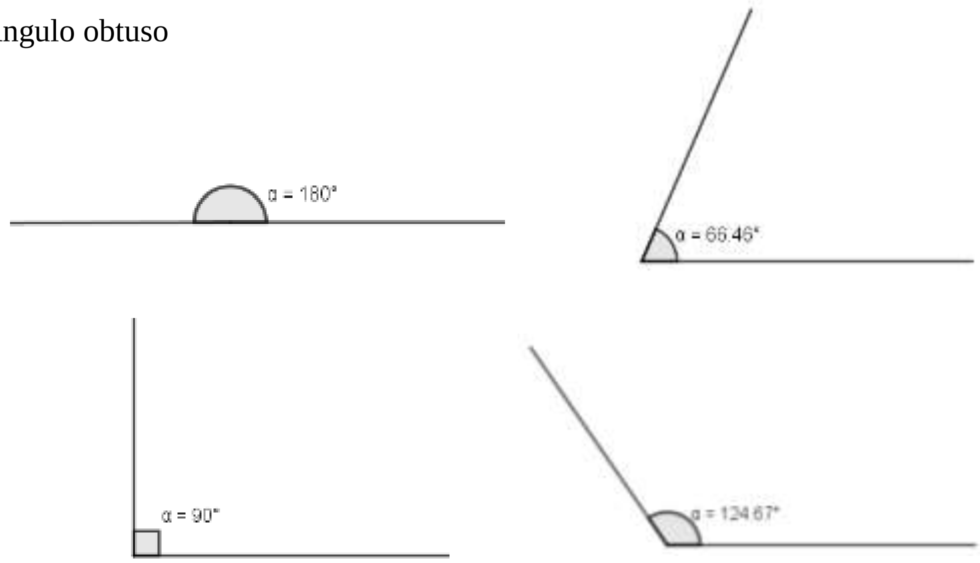






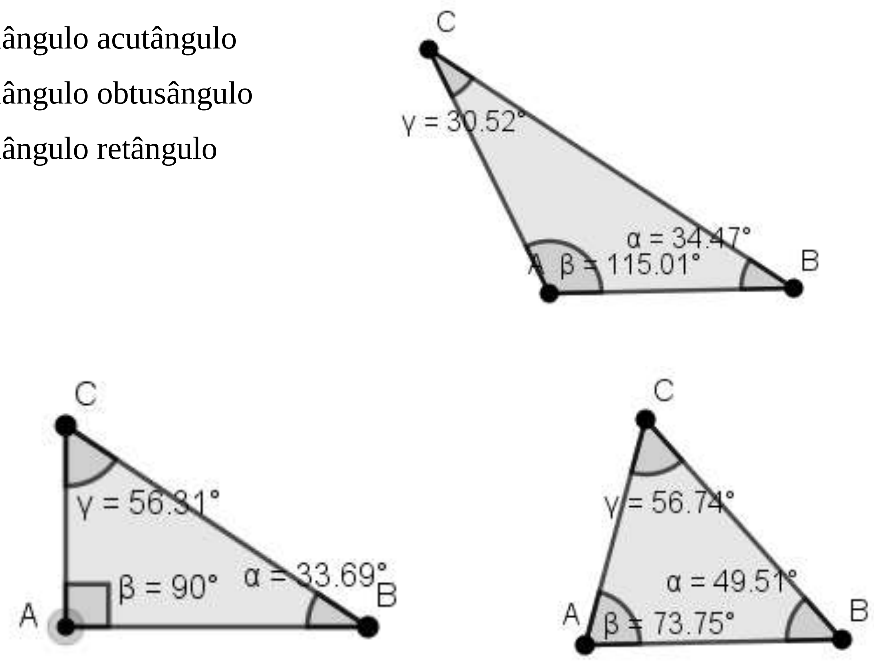
2) Classifique os ângulos de acordo com suas medidas:

a) Ângulo agudo
b) Ângulo reto
c) Ângulo raso
d) Ângulo obtuso



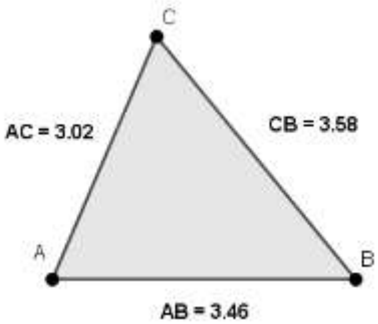
3) Observe os triângulos abaixo e classifique-os quanto aos ângulos:

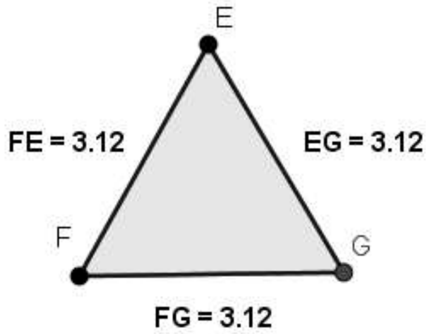
a) Triângulo acutângulo
b) Triângulo obtusângulo
c) Triângulo retângulo

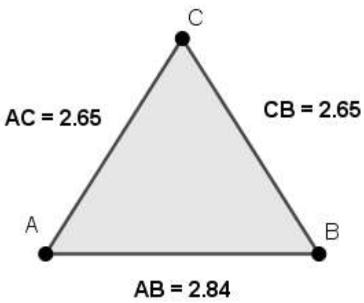


4) Classifique os triângulos abaixo quanto aos lados.

a) Triângulo equilátero
b) Triângulo isósceles
c) Triângulo escaleno







APÊNDICE E – Termo de consentimento de participação do aluno como sujeito da pesquisa

CONSENTIMENTO DE PARTICIPAÇÃO DO ALUNO COMO SUJEITO DA PESQUISA: TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO FUNDAMENTADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Eu, ____, aluno (a) no IV Período do Curso Técnico em Administração (   ) Edificações (   ) do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional à Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA), do Instituto Federal Goiano – Campus Rio Verde, matrícula n. ________________________________, autorizo minha participação como sujeito da pesquisa de mestrado intitulada: Trigonometria no Triângulo Retângulo: um experimento didático-formativo fundamentado na teoria do ensino desenvolvimental, realizada pela professora/pesquisadora Kelen Helena de Oliveira, matrícula mestrado n. 20162020280110, sob a orientação do Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz. Declaro que fui devidamente informado (a) que a participação nesta pesquisa é inteiramente voluntária, portanto não haverá nenhuma forma de pagamento de ambas as partes. Fui esclarecido (a) que participação na pesquisa se dará de forma anônima, que serão respondidas perguntas à pesquisadora em forma de entrevistas e/ou questionários, realizadas tarefas de estudo e avaliações. Fui informado (a) que as aulas serão monitoradas com filmagens, fotografias, gravação de áudio, e que todo material produto do monitoramento será usado para fins de análise e divulgação dos resultados do desenvolvimento da pesquisa. Foi garantido que posso retirar o consentimento de participação como sujeito da pesquisa a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Fui orientado (a) a entrar em contato com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Câmpus Jataí, pelo telefone (64) 3632-8650, para esclarecimento de eventuais dúvidas em relação à pesquisa e/ou referente à participação como sujeito da pesquisa. Confirmo que recebi uma cópia deste consentimento de participação como sujeito da pesquisa.

Rio Verde – GO, __ de ________ de 2018.

____

Assinatura do sujeito

Presenciamos a solicitação de consentimento de participação na pesquisa, os esclarecimentos sobre a pesquisa e o aceite da participação do sujeito.

____

Testemunha 1

____

Testemunha 2

APÊNDICE F – Avaliação do experimento didático-formativo

AVALIAÇÃO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO-FORMATIVO

Prezado (a) aluno (a),

Você participou de um experimento didático-formativo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo no decorrer das aulas da disciplina de Matemática IV 2018/1, agora responda essa avaliação, sua opinião é importante, portanto aponte os pontos positivos, negativos e dê sugestões.

Então vamos às perguntas:

1) Em relação à pesquisa e apresentação do seminário referente à história dos principais matemáticos que contribuíram com o desenvolvimento da trigonometria, na sua opinião essa experiência foi:
   a) (   ) Boa
   b) (   ) Regular
   c) (   ) Ruim
   d) Pontos positivos:

      ____
      ____
      ____
      ____

   e) Pontos negativos:

      ____
      ____
      ____
      ____

   f) Sugestões:

      ____
      ____
      ____
      ____

2) No que tange ao questionário perfil do aluno, aplicado no início das aulas, na sua opinião, essa experiência foi:

   a) (   ) Boa
   b) (   ) Regular
   c) (   ) Ruim
   d) Pontos positivos:
   ____
   ____
   ____
   ____
   e) Pontos negativos:
   ____
   ____
   ____
   ____
   f) Sugestões:
   ____
   ____
   ____
   ____

3) No que se refere à avaliação diagnóstica aplicada no início das aulas, na sua opinião, essa experiência foi:

   a) (   ) Boa
   b) (   ) Regular
   c) (   ) Ruim
   d) Pontos positivos:
   ____
   ____
   ____
   ____

e) Pontos negativos:

____

____

____

____

f) Sugestões:

____

____

____

____

4) Concernente à atividade “Retas, ângulo e triângulos”, na sua opinião, essa tarefa foi:

a) (   ) Boa
b) (   ) Regular
c) (   ) Ruim
d) Pontos positivos:

____

____

____

____

e) Pontos negativos:

____

____

____

____

f) Sugestões:

____

____

____

____

5) Pertinente à construção de figuras geométricas utilizando as ferramentas do *software* Geogebra, na sua opinião, essa experiência foi:

a) ( ) Boa
b) ( ) Regular
c) ( ) Ruim

d) Pontos positivos:
____
e) Pontos negativos:
____
f) Sugestões:
____

6) No que se refere às tarefas propostas no decorrer das aulas, dê sua opinião em relação às orientações de construção das figuras, tamanho das figuras, tamanho da fonte dos textos:

a) ( ) Bom
b) ( ) Regular
c) ( ) Ruim
d) Pontos positivos:
____

e) Pontos negativos:

____

f) Sugestões:

____

7) No tocante às tarefas propostas no decorrer das aulas, dê sua opinião quanto à clareza dos conceitos e das perguntas realizadas:

g) ( ) Bom
h) ( ) Regular
i) ( ) Ruim
j) Pontos positivos:

____

k) Pontos negativos:

____

l) Sugestões:

____

8) Referente às investigações propostas no decorrer das aulas, na sua opinião, essa experiência foi:

a) (   ) Boa
b) (   ) Regular
c) (   ) Ruim
d) Pontos positivos:

____

____

____

____

e) Pontos negativos:

____

____

____

____

f) Sugestões:

____

____

____

____

9) Concernente aos laboratórios de informática e computadores utilizados no decorrer das aulas, dê sua opinião:

a) (   ) Bom
b) (   ) Regular
c) (   ) Ruim
d) Pontos positivos:

____

____

____

____

e) Pontos negativos:

____

____

____

____

f) Sugestões:

____

____

____

____

10) Em relação aos conteúdos ministrados no decorrer das aulas, você classifica como:

a) ( ) Difíceis
b) ( ) Regulares
c) ( ) Fáceis
d) Pontos positivos:

____

____

____

____

e) Pontos negativos:

____

____

____

____

f) Sugestões:

____

____

____

____

11) Quanto à utilização das ferramentas do *software* Geogebra, você classifica como:

a) (   ) Difícil
b) (   ) Regular
c) (   ) Fácil
d) Pontos positivos:

____
____
____
____

e) Pontos negativos:

____
____
____
____

f) Sugestões:

____
____
____
____

12) Referente à mediação da professora, dê sua opinião:

a) (   ) Boa
b) (   ) Regular
c) (   ) Ruim
d) Pontos positivos:

____
____
____
____

e) Pontos negativos:

f) Sugestões:

13) Quanto a sua aprendizagem, você classifica que foi:

a) ( ) Boa
b) ( ) Regular
c) ( ) Ruim
d) Pontos positivos:

e) Pontos negativos:

f) Sugestões:

Obrigada por responder essa avaliação!

APÊNDICE G – (Produto educacional)
Caderno de atividades: trigonometria no triângulo retângulo com o *software* Geogebra

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Goiás

Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática

CADERNO DE ATIVIDADES

Trigonometria no triângulo retângulo com o *software* Geogebra

KELEN HELENA DE OLIVEIRA

DUELCI APARECIDO DE FREITAS VAZ

JATAÍ

2018

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Goiás

Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática

CADERNO DE ATIVIDADES

Trigonometria no triângulo retângulo com o *software* Geogebra

Produto Educacional vinculado à dissertação < Trigonometria no triângulo retângulo: um experimento didático-formativo fundamentado na teoria do ensino desenvolvimental>

KELEN HELENA DE OLIVEIRA
DUELCI APARECIDO DE FREITAS VAZ

JATAÍ
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

OLI/cad	Oliveira, Kelen Helena de. Caderno de atividades: Trigonometria no triângulo retângulo com o *software* Geogebra: Produto Educacional vinculado à dissertação ... [manuscrito] / Kelen Helena de Oliveira, Duelci Aparecido de Freitas Vaz, -- 2018. 396 f.; il. Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz. Produto Educacional (Mestrado). IFG – Câmpus Jataí, Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2018. Bibliografias. 1. Ensino desenvolvimental. 2. Experimento didático-formativo. 3. Trigonometria. 4. *Software* Geogebra. 5. Produto Educacional. I. Vaz, Duelci Aparecido Freitas. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título. CDD 372.7

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Rosy Cristina Oliveira Barbosa – CRB 1/2380 – Campus Jataí. Cód. F074/18

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este caderno de atividade está vinculado à dissertação de mestrado intitulada: Trigonometria no triângulo retângulo: um experimento didático-formativo fundamentado na teoria do ensino desenvolvimental, disponível na página do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática (PPGECM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Campus Jataí <http://www.ifg.edu.br/jatai/campus/pesquisa/pos-graduacao>.

Acesse vídeos com tutoriais de construção de figuras geométricas, propostas nas tarefas que compõem esse caderno de atividades, no canal Matemática com Geogebra pelo link: <https://www.youtube.com/channel/UCf8RsYLo1ICm5HeZhTGoq3A>

Figura 1 – Canal Matemática com Geogebra

Fonte: Canal Matemática com Geogebra (2018).

As tarefas apresentadas nesse caderno de atividades foram planejadas para serem realizadas utilizando ferramentas do Geogebra. Para baixar o software gratuitamente acesse o link: <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>.

Apesar de ser um excelente software educacional de matemática dinâmica, desenvolvido para sala de aula, a utilização do Geogebra como recurso didático, requer metodologias de ensino que permitam a aquisição de conhecimentos. Assim sendo, foi organizado um experimento didático-formativo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo baseado nas perspectivas do ensino desenvolvimental de Vygotsky e Davydov.

Vygotsky nasceu na cidade de Orsha, na Bielo-Rússia, em 17 de novembro de 1896, e faleceu de tuberculose em 1934, aos 37 anos. Filho de mãe professora, o pai trabalha em um banco e em uma corretora de seguros. Vygotsky estudou em casa até os 15 anos, com tutores particulares, aos 17 anos concluiu o curso secundário em um colégio privado. Graduou-se em Direito pela Universidade de Moscou, estudou história e filosofia, na Universidade Popular de Shanyavskii, fez cursos na Faculdade de Medicina de Moscou e de Kharkov, estudou "diversos assuntos, desde artes, literatura, linguística, antropologia, cultura, ciências sociais, psicologia, filosofia e, posteriormente, ate medicina" (REGO, 2014, p. 22). A teoria histórico-cultural de Vygotsky "baseando-se no pressuposto de que não há essência humana a *priori* imutável, investiga a construção do sujeito na interação com o mundo, sua relação com os demais indivíduos, a gênese das estruturas de seu pensamento, a construção do conhecimento" (REGO, 2014, p. 100).

A pesquisa de Davydov sobre o ensino desenvolvimental baseava-se na "teoria histórico-cultural fundada por Vygotsky e desenvolvida por Luria, Leontiev, Galperin, Elkonin, Zaporojets, entre outros colaboradores" (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 327). Davydov nasceu em Moscou, em 31 de agosto de 1930. Graduou-se em Filosofia e Psicologia em 1953, pela Faculdade de Filosofia da Universidade Estadual de Moscou. Em 1958 conclui a pós-graduação em Filosofia, e em 1970 o doutorado em ao estudo e pesquisa de teorias de ensino-aprendizagem que impulsionasse o desenvolvimento dos alunos. Estudiosos da pedagogia russa consideravam Davydov um grande pedagogo, apesar de a psicologia ter sido à base de sua carreira teórica e investigativa. Segundo Libâneo e Freitas (2015, p. 329), "o trabalho de Davydov foi reconhecido tanto no campo da epistemologia e da teoria da educação como no da pesquisa experimental sobre o ensino e aprendizagem na escola".

> Ele considerava insuficiente à escola que passava aos alunos apenas informação e fatos isolados. Dentro do projeto de formação do novo homem na sociedade socialista soviética, esperava da escola que ensinasse os alunos a orientarem-se com autonomia na informação científica e em qualquer outra esfera de conhecimentos, ou seja, que os ensinasse a pensar dialeticamente mediante um ensino que impulsionasse o desenvolvimento mental. [...] defendeu que o ensino mais compatível com o mundo contemporâneo, da ciência, da tecnologia, dos meios de comunicação, da cultura, aquele compromissado com a transformação pessoal e social do aluno, que o ajude a desenvolver a análise dos objetos de estudo por uma forma de pensamento abstrata, generalizada, dialética (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 327-328).

Davydov favoreceu, como base para a formulação do pensamento-científico, o método de generalização e conceitos teóricos, mantendo as formulações básicas da teoria da atividade de Leontiev. A iminência da sua teoria do ensino desenvolvimental iniciou-se com a articulação de questões filosóficas, sobre o método de pensamento do abstrato ao concreto, com a teoria da atividade e com o tema generalização em sua relação com a aprendizagem (LIBÂNEO; FREITAS, 2015). A teoria do ensino desenvolvimental de Davydov tinha como foco a atividade e estudo, e era um desdobramento e aplicação pedagógica da teoria histórico-cultural de Vygotsky, tendo o conhecimento teórico como base.

De acordo com Libâneo e Freitas (2015, p. 332), Davydov denominou de pensamento teórico o processo em que,

> primeiro os alunos devem aprender o aspecto genético e essencial dos objetos, ligados ao modo próprio de operar da ciência, como um método geral para análise e solução de problemas envolvendo tais objetos. Depois, utilizando o método geral, os alunos resolvem tarefas concretas, compreendendo a articulação entre o todo e as partes e vice-versa.

Por volta de 1970, Davydov desenvolveu pesquisas empíricas sobre formação do pensamento teórico dos alunos com abordagem em diversas disciplinas, entre elas, a de Matemática. Deste modo, foi formalizando a teoria do ensino desenvolvimental, com a contribuição de Elkonin, com quem trabalhou no período de 1959 - 1983, no Instituto de Psicologia Geral e Pedagógica da Academia de Ciências Pedagógicas da União Soviética. (LIBÂNEO; FREITAS, 2015). Davydov defendia que os conteúdos ensinados na escola têm por finalidade contribuir com o desenvolvimento intelectual dos alunos. Sendo imprescindível que o professor tenha intenso conhecimento teórico dos conteúdos, porque só assim, serão capazes de planejar aulas que realmente contribuam com o aprendizado dos alunos.

Nesse prisma, em suas pesquisas, Davydov incorporou conceitos da zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky.

> Ela é distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VIGOTSKI, 2007, p. 97).

O principal instrumento investigativo de Davydov foi o experimento didático formativo que “visa investigar os processos de surgimento de novas formações mentais nos alunos durante a atividade de estudo, mediante orientação para se atingir determinados objetivos” (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 340). Para organização adequada do ensino-aprendizagem por meio do experimento didático formativo, Davydov formulou condições e ações a serem realizadas pelo professor e pelos alunos. “Dessa forma, realizar o ensino desenvolvimental significa utilizar meios de organização do ensino que levem os alunos a formarem, ativamente, novo nível de desenvolvimento de suas capacidades intelectuais” (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 356).

Nesse sentido, Libâneo e Freitas (2015) descrevem três condições formuladas por Davydov para a organização do processo de ensino-aprendizagem,

> A primeira é a orientação das necessidades e motivos dos alunos para a apropriação das riquezas culturas da espécie humana; a segunda é a formulação de tarefas de estudo cuja solução exija dos alunos a realização de experimentos com o objetivo a ser apropriado; a terceira é que estas tarefas requeiram dos alunos a análise das condições dos conceitos específicos do conhecimento teórico e se apropriem das ações ou modos generalizados correspondentes (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 354).

Durante a atividade de estudo os alunos devem realizar tarefas planejadas pelo professor, isso requer do aluno a realização de cinco ações:

> A primeira ação é a transformação dos dados da tarefa e identificação da relação universal do objeto estudado. [...] A segunda ação de estudo é a modelação desta relação universal descoberta. Consiste na criação de um “modelo” representativo da relação universal, de suas conexões internas. [...] Na terceira ação de estudo, os alunos devem transformar o modelo. Esta transformação visa o estudo das propriedades da relação universal. [...] A quarta ação é a realização de várias tarefas particulares que podem ser resolvidas pelo procedimento geral descoberto pelos alunos. [...] Uma quinta ação refere-se ao controle (ou monitoramento) da realização de todas as ações anteriores (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 355).

A compreensão das condições e ações propostas na organização do experimento didático-formativo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo requer a leitura da dissertação citada no começo dessa apresentação, acesse a dissertação pelo link:

.

1 BREVE HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Desde os primórdios, o homem sempre teve aguçada sua curiosidade e capacidade de descobrir o novo, de superar dificuldades e avançar rumo à evolução. Caminhando a passos árduos as civilizações chegaram era da comunicação e informação (EVE, 2004).

Essa evolução foi possível, devido à persistência do homem em resolver problemas, superar desafios, conquistar mais conforto, segurança e estabilidade. Essa superação fez com que as todas as ciências evoluíssem, não em um piscar de olhos, mas em milhões de anos (EVE, 2004).

Segundo Eves (2004), a idade da pedra pode ter se iniciado em 5.000.000 a.C. e durado até por volta de 3.000 a.C. e, desde então, a evolução nunca cessou. Entre tantas descobertas, das mais simples e básicas às mais importantes e surpreendentes, a linguagem pode ter sido uma das primeiras formas de registrar os passos seguidos pelas civilizações. O raciocínio foi se ampliando e os horizontes se expandindo. As ciências humanas, as tecnologias e a matemática evoluíram.

A evolução da matemática caminhou sempre junto a tudo que era prático, tangível e possível de se quantificar e acompanhou o homem durante todos os milênios, impulsionando, auxiliando em suas descobertas. As artes rupestres, deixadas para a posteridade no interior de cavernas, são um exemplo de como nossos antepassados de forma simples pareciam registrar além de suas histórias, as suas propriedades. Registraram os animais, os grupos familiares, a simples quantificação das coisas, por meio de riscos e figuras diversas (EVE, 2004).

De forma geral, a matemática evoluiu junto com a humanidade, a esse respeito, Eves (2004, p. 25) declara:

> Como usualmente se considera como a matemática mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número, é por aí que começaremos, focalizando de início o surgimento no homem primitivo do conceito de número e do processo de contar.

Não podemos aqui discorrer sobre toda evolução do homem e da matemática, pois essa temática não é o ponto principal. Mas ressaltamos que passo a passo o homem foi caminhando, aprendendo a contar, a racionalizar os pertences, buscou novas formas de resolver problemas e realizar contagens. Problemas relacionados ao plantio, irrigação, colheita, armazenagem, clima. O homem passou de simples coletor e caçador, àquele que plantava, cultivava o solo para conseguir seu sustento, passou a criar animais e a viver em sociedade, o que lhe trazia grandes e novos desafios.

Nesse contexto, essa evolução não se deu em épocas iguais nas diferentes regiões do mundo, todavia, em épocas muito distintas em se tratando de povos e regiões diferentes. Ao passo que em alguns lugares, o homem ainda vivia na idade da pedra, ao mesmo tempo em outras regiões, o homem trabalhava os metais para fazer instrumentos. Contudo, a história aponta que em todas as regiões e épocas, a matemática acompanhou a evolução humana (EVE, 2004).

Em dado momento, apenas sobreviver não era mais o foco, o homem aguçava sua curiosidade, começava a olhar a sua volta e tentar descobrir o que havia além do que era palpável. E uma das curiosidades era os astros, sobre o firmamento, o homem sabia que de alguma forma a posição dos astros influenciavam sua vida aqui na terra, conforme esclarece Eve (2004).

O clima, o plantio, as águas, tudo era influenciado pelo diferente alinhamento dos planetas. Nesse sentido, o surgimento da astronomia teve o intuito de estudar o comportamento dos planetas, estrelas, da lua e do sol. E lá estavam os cálculos, as medições, os ângulos e uma parte da matemática surgia nesta nova curiosidade. A trigonometria, que até então, era apenas uma parte da geometria, destacou-se no estudo da astronomia. Desse modo, essa parte importante da matemática que falaremos nos próximos tópicos (EVE, 2004).

Assim como a história da Matemática, a Trigonometria se mistura a história da própria humanidade e não tem como se dizer qual foi o ponto culminante de sua criação. Sua história é obscura, e não se pode precisar quando foi inventada, e nem tão pouco quem foi o responsável, pois não foi criada em uma época apenas, nem em um dado momento, e nem tão pouco por uma única pessoa. A história da Trigonometria é um quebra-cabeça com inúmeras peças, algumas destruídas pelo tempo e por falta de registros. O que fazemos é tentar juntar essas partes fragmentadas para se criar todo um contexto e as partes que não temos certezas, tentamos preencher com os estudos e as mensurações das possíveis causas (FONSECA, 2010).

De acordo com a referência bibliográfica consultada, relataremos nos próximos parágrafos a sua possível evolução, ao longo dos tempos, das várias contribuições e avanços relativos à Trigonometria.

Antes de adentrarmos no caminho da evolução da trigonometria, talvez, seja importante deixarmos claro sua definição. A Trigonometria é a parte da matemática que estuda os cálculos dos ângulos constantes nos polígonos. Estes, por sua vez, são figuras geométricas formadas por segmentos de retas, podendo ser sempre divididos em vários triângulos e, assim, calcular seus ângulos, distâncias e áreas. Temos a divisão em trigonometria plana, a qual relaciona as medidas em um plano e a trigonometria esférica retratar as medidas no espaço tridimensional (FONSECA, 2010).

A trigonometria esteve vinculada à geometria durante séculos, e somente a partir do século XVI foi considerada como parte independente dentro da matemática (FONSECA, 2010).

A etimologia da palavra trigonometria tem origem na língua grega, onde *tri* significa três, *gonía* significa ângulo e *metrón* significa medida. No latim, tem o mesmo significado, medidas feitas no triângulo. O termo usual ficou definido, em 1595, quando Bartolomeu Pitiscus, publicou o seu trabalho "*Trigonometriae Sive de Solutione Triangulo Rum Tractaus Brevis et Perspicuus*", que traduzindo significa "Trigonometria, ou uma solução para o triângulo executar Tratado curto e Transparência" (FONSECA, 2010).

Esse trabalho teve uma nova edição em 1600 com o título "*Trigonometrae Sive de Dimensione Triangulorum Libri Quinque*", que significa "Trigonometria, ou um triângulo Tamanho Cinco", de suma importância para os matemáticos vindouros após esta época, porém, a trigonometria não teve sua origem nesta data (FONSECA, 2010).

Complementa Fonseca (2010), muito antes do ano 1600 d.C., como citado anteriormente, a evolução da humanidade e a busca pela solução de seus problemas usuais, fez com que a Trigonometria surgisse e evoluísse. Assim como aconteceu com outras áreas de estudos, a própria matemática como um todo evoluiu, devido à necessidade e a busca por melhorias e a própria evolução dos saberes (FONSECA, 2010).

A trigonometria tinha uma relação mais intima com a curiosidade do homem em relação à cartografia, astronomia e agrimensura. Foi utilizada por vários estudiosos para este fim.

Nas grandes navegações marítimas, uma das principais preocupações era com o tempo que seria gasto, para se preparar com mantimentos e recursos para tão dispendiosa viagem. Para esse cálculo, era necessário saber a distância entre as cidades portuárias, o que estava intimamente ligado ao tamanho da Terra.

Além de ter que se preocupar com as estações do ano para preverem o clima mais assertivo para a empreitada, isto se dava pelo cálculo da distância entre a Terra, a Lua e o Sol, o que foi feito em tempos remotos pelo início da Trigonometria.

Diante do exposto, vamos remontar de acordo com as referências bibliográficas, os possíveis usos iniciais para a Trigonometria.

1.1 Os mesopotâmios

A Mesopotâmia era a região compreendida entre os rios Eufrates e Tigre, onde atualmente, situam-se o Iraque, Kwait parte da Síria. Foi uma região invadida e colonizada por povos distintos, Sumérios, Assírios, Babilônicos entre tantos outros. Por volta dos anos 4000-3000 a.C., os babilônios utilizavam muitos recursos matemáticos para usos do dia-a-dia, drenando pântanos, construindo cidades com arquitetura bem evoluída, com sistema de irrigação, cultivo de alimentos bem definidos. Tudo isto, devido ao fato de conhecerem bem as estações do ano, as fases da lua, um calendário bem estruturado, indicando um uso sistemático dos conhecimentos adquiridos por eles em busca do progresso e comprovam que faziam uso de uma Trigonometria nesta evolução (EVES, 2004).

Complementa, ademais, Eves (2004), os mesopotâmios deixaram muitas informações acerca de seus estudos matemáticos, pois faziam uso de placas de argila onde registravam seus saberes. Milhares dessas placas sobreviveram ao passar dos tempos, baseando-se nas traduções e comentários de alguns matemáticos, foram extraídos vários conceitos. Contudo, a confiabilidade das traduções e comentários não são tão fieis, cabendo inúmeras margens para especulações. Tinham três tipos de placas com registros matemáticos, para cálculos, resolução de problemas e rascunho dos aprendizes.

Nesse contexto, uma dessas placas, datada de aproximadamente 1900-1600 a.C., podemos extrair os conceitos usados por eles naquela época. Muitos deles relativos à trigonometria em seus primeiros passos. Em quatro colunas e quinze linhas, está uma tabela que indica a primeira forma de Trigonometria, associada a um triângulo retângulo. Inferiu-se que eles se preocupavam em controlar medidas de áreas de quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Essa tabela traz informações que trabalhavam já naquela época com Trigonometria inversiva, buscando soluções aos problemas de áreas (FONSECA, 2010).

1.2 Os egípcios

Os egípcios faziam uso de papiros para registrar seus saberes, feitos de junco praticamente todos se deterioraram com o tempo. Porém, “o papiro de Rhind” datado de 1650 a.C. e o “papiro de Moscou” datado de 1850 a.C., foram conservados e guardados em museus. Neles estão registradas tabelas de frações, soluções de vários problemas do cotidiano da vida egípcia, problemas de geometria e aritmética. O sistema de contagem deles está bem específico nos papiros, além de relatos de usos bem comuns da matemática (EVES, 2004).

Construídas a cerca de 2.700 a.C., as pirâmides no Egito antigo são uma prova da existência dos saberes egípcios acerca dos triângulos e seus ângulos. Nestes papiros antigos, existem cálculos de problemas relacionados à inclinação das pirâmides, em relação à altura de suas bases, prova do uso de alguns conceitos de Trigonometria (FONSECA, 2010).

Segundo Fonseca (2010, p. 41), "algumas necessidades são precisas, como a de manter constante a inclinação das faces, e a coincidência do seu vértice com o centro da base". Nessa linha, os egípcios empregavam em seus relatos uma unidade de medida chamada de cúbito ou mãos, para calcular o *seqt*, que significa o afastamento vertical de uma parede em relação ao seu vértice, de acordo com Fonseca (2010).

Os egípcios edificaram a base da Trigonometria para resolver problemas voltados ao cotidiano, à agricultura, ao clima, as estações do ano, e devido às enchentes do Rio Nilo, pois tinham de encontrar meios de prevê-las. Utilizando os conceitos em Trigonometria, eles criaram um calendário bem semelhante dos dias atuais, onde continha doze meses e mais cinco dias para as festas. A Trigonometria não era apenas uma fonte e interesse de estudo, possuía um caráter pragmático e utilitário no uso do cotidiano (FONSECA, 2010).

Um destes usos no cotidiano, é a visita de Tales de Mileto ao Egito por volta do século VI a.C., onde ele conseguiu determinar a altura da grande pirâmide de Queops, a partir do principio de semelhança entre triângulo, utilizando sua sombra. Utilizando a medida da sombra, com uma vareta ele marcou quando a sombra ficou exatamente do tamanho da própria vareta. Neste momento, marcou também a sombra da pirâmide. A esta medida pediu que somassem o valor da metade do lado da base e assim definiu a altura exata da pirâmide (FONSECA, 2010).

1.3 Os gregos

Os gregos contribuíram muito com o avanço da Trigonometria, em épocas distintas e estudos diversos. Desenvolveram a trigonometria a partir do uso das retas e dos círculos em sua geometria. Vários foram os matemáticos gregos que contribuíram para deixar registradas suas descobertas. Hiparco, considerado o pai da Trigonometria, foi um destes matemáticos gregos. Mas assim como os Egípcios, os primeiros matemáticos gregos registravam seus saberes em papiros de junco e muito se perdeu ao longo dos anos (EVES, 2004).

Assim como em outros povos, segundo Eves (2004), a Trigonometria foi sendo aprimorada pelos gregos para resolver problemas do cotidiano, como agricultura, navegação, estudo da astronomia, entre outros. A astronomia despertou muito o interesse dos gregos, pois por meio de seus estudos descobriam relação com a vida cotidiana. Para desvendar os movimentos dos astros em torno da Terra, fizeram uso da Trigonometria Esférica.

1.4 Os indianos

Muitos indianos contribuíram, reafirmaram e complementaram os trabalhos em Trigonometria. Seus registros foram feitos em livros, material de mais fácil preservação, e por isto, considerados fontes mais confiáveis (FONSECA, 2010).

Nos livros mais antigos, datados 300-500 d.C., continham frações sexagesimais, tabelas de senos, contribuições bastante expressivas em ciências exatas, operações com epiciclos. Nesse contexto, Fonseca (2010) relata a observância da influência grega e babilônica, o que pode ser facilmente explicado pelo contato cultural entre esses povos.

Em relação à influência cultural sobre a Matemática Indiana, Eves (2004, p. 249) reitera:

> O grau de influência da matemática grega, da babilônica e da chinesa sobre a matemática hindu e vice-versa, ainda é uma questão não esclarecida, mas há evidências de que ambos os sentidos ela foi apreciável. Um dos benefícios claros da Pax Romana foi o intercâmbio de conhecimento entre Oriente e Ocidente e desde muito cedo a Índia enviou diplomatas para o Ocidente e o Extremo Oriente.

Um dos matemáticos indianos mais conhecidos foi Aryabhata que viveu por volta de 476-550 d. C., tinha contato com a Grécia, Babilônia e China. Seu trabalho datado de 499 d.C. tinham a inclinação para as equações indeterminadas e fazia incursões no campo da medição e da Trigonometria. Foram os indianos que criaram a função seno, apesar de outros povos terem apresentado pensamentos similares. Também contribuíram com solução de equações e o significado do zero. O uso prático era feito ao usar cálculos para construção de seus altares (EVES, 2004).

Entretanto, a Trigonometria para os indianos, assim como para os gregos servia à astronomia, apesar de terem dificuldade para a observação, tendo então como resultado uma astronomia de baixa qualidade. Eles utilizavam tábuas de acordo com o conhecimento de hoje, graus, minutos e segundos, calculavam o equivalente de senos e co-senos e senos reversos e resolviam em triângulos planos e esféricos (EVES, 2004).

Historicamente, de acordo com Eves (2004), uma Trigonometria com mais aritmética do que geometria.

1.5 Outros povos

Outras tantas civilizações contribuíram para o avanço e os conceitos, atualmente, aplicados em Trigonometria. Sabe-se que as culturas se relacionavam e os conhecimentos eram repassados. Mas também existiram avanços autônomos e que alguns povos trilharam seus próprios caminhos, talvez traçados por uma evolução natural, chegaram ao mesmo ponto comum (FONSECA, 2010).

Nesse sentido, complementa Fonseca (2010), os Maias, Árabes, Chineses, Europeus, todos deixaram sua contribuição para a Trigonometria. A grande maioria deles inspirados pela Astronomia, que era o grande interesse dos povos antigos. Queriam desvendar o mundo à sua volta.

Em se tratando dos Maias, civilização que data por volta de 2000 a.C., o conhecimento em Matemática e Trigonometria e evolução, tanto em sua arquitetura, agricultura, organização cultural, calendário bem definido e seus interesses astronômicos (FONSECA, 2010).

Os Árabes muito contribuíram para a Trigonometria, Abû'l-Wefâ (940-998 d. C.) se tornou conhecido por traduzir Diofanto, elaborou uma tábua de senos e tangentes de 15', aperfeiçoando o método de Ptolomeu e escreveu muitos tópicos matemáticos (FONSECA, 2010).

Fonseca (2010) leciona que o primeiro trabalho de Trigonometria plana e esférica independente da astronomia é de um árabe, Nasîr Ed-dîn, datado de 250 d.C. É importante citar também que o Almagesto foi traduzido para o Árabe. Assim como tantos outros clássicos gregos, com as traduções para o Árabe patrocinados e incentivados pelos califas antigos, que eram considerados patronos do saber.

Tantos outros povos contribuíram nesta Trigonometria embrionária. Mas somente, a partir do século XV, a Trigonometria passa a ser sistematizada, disciplina autônoma e independente da Astronomia. Obras importantes e estudos marcaram a era moderna da Trigonometria, que atingiu sua maioridade e independente participou do período de transição entre o Renascimento e a Idade Moderna. Neste movimento, os matemáticos europeus deram sua parcela de contribuição a esta nova Trigonometria, trazendo avanços tecnológicos.

Grandes matemáticos da Alemanha, França, Escócia, Suíça e Inglaterra, aos quais suas contribuições serão relatadas mais adiante (FONSECA, 2010).

1.6 Principais matemáticos

1.6.1 Hiparco

O astrônomo, cartógrafo e matemático grego Hiparco de Bitínia (190-120 a.C), natural de Alexandria deu sua contribuição em diversos estudos. Para muitos, foi considerado como pai da Trigonometria. Há um teorema com seu nome. Compilou tabelas e funções trigonométricas que se relacionam com as tabelas que temos hoje dos senos e cossenos. Em um de seus estudos, dividiu um círculo em 120 partes, determinando por cálculos as medidas de cordas e diversas partes dos ângulos. Um de seus interesses era traçar triângulos imaginários sobre a esfera imaginária do céu e, assim, calculava a distância entre os astros. Ele aproximou a medida do raio da Terra em 8.800 km, e por esta medida, fez estimativas da medida da distância entre a Terra e a Lua, como o cálculo da distância entre outros planetas (FLOOD; WILSON, 2013).

1.6.2 Tales

Intitulado um dos setes sábios da Grécia, Tales foi considerado o primeiro matemático grego importante. Viveu entre os anos de 624-546 a.C., nascido na cidade grega de Mileto, hoje, a cidade da Turquia. Há em sua história a sua passagem pelo Egito, quando calculou o tamanho da grande pirâmide de Queops e previu o eclipse solar em 585 a. C., além de ensinar a produzir eletricidade esfregando penas em uma pedra (FLOOD; WILSON, 2013).

Os comentadores atribuíram a Tales com alguns cálculos geométricos, e Teoremas foram nomeados em sua homenagem. Flood e Wilson (2013, p. 21) citam estes teoremas

> O ângulo inscrito num semicírculo: Se AB é o diâmetro de um círculo e P é qualquer outro ponto do círculo, então o ângulo APB é reto. O teorema da intercessão: Que duas retas se cruzem no ponto P e que duas retas paralelas as cortem nos pontos A, B e C, D. Então PA/AB = PC/CD. Os ângulos da base de um triângulo Isósceles: Um triângulo é isósceles quando tem dois lados iguais. O comentarista Eudemo atribuiu a Tales a descoberta de que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

1.6.3 Pitágoras

Pitágoras viveu entre *c.* 570 – *c.* 490 a. C., nasceu na ilha de Samos no Mar Egeu, estudava Matemática, Astronomia, Filosofia e Música. No ano de 520 a. C., foi para a cidade que, nos dias atuais, situa-se ao sul da Itália, na época chamada de Crotona, e fundou uma escola filosófica chamada de pitagórica. Seus adeptos eram vegetarianos, desfaziam de suas posses pessoais, eram aceitos homens e mulheres, que estudavam a Matemática, Astronomia e Filosofia. Os pitagóricos acreditavam que tudo merecia ser quantificado e dividiam a Matemática em aritmética, geometria, astronomia e música e compunham as artes liberais (FLOOD; WILSON, 2013).

> A palavra Matemática (*Mathematike*, em grego) surgiu com Pitágoras, que foi o primeiro a concebê-la com um sistema de pensamento, sustentando provas dedutivas. Existem, no entanto, indícios de que o chamado Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2$ já era conhecido dos babilônios, em 1600 a. C., de forma empírica. Ele acreditava que todas as coisas eram números e o processo de libertação da alma seria resultante de um esforço basicamente intelectual (COSTA, 2011, p. 73).

Apesar dos babilônios terem conhecimento do teorema, mais de um milênio antes de Pitágoras, o teorema recebeu o nome do matemático, porque a primeira demonstração do teorema pode ter sido feita por Pitágoras (EVES, 2004). São várias as demonstrações do teorema de Pitágoras, “E. S. Loomis na segunda edição de seu livro *The Pythagorean Proposition,* coletou e classificou nada menos que 370 dessas demonstrações” (EVES, 2004, p. 104).

1.6.4 Ptolomeu

Claudio Ptolomeu viveu em Alexandria entre os anos de 100-168 d.C., contribuiu para a Matemática, Geografia e Astronomia, que trazia inserida a Trigonometria, baseou-se no trabalho de Hiparco para produzir uma de suas grandes obras, o Almagesto. Além desta grande obra, teve inúmeras outras obras que contribuíram para tantos outros campos de pesquisas (FLOOD; WILSON, 2013).

Apesar de Hiparco criar a Trigonometria, Ptolomeu foi quem desenvolveu com base em seus estudos. Ele foi a mais importante fonte de informação do Pai da Trigonometria. O Almagesto foi a sua obra mais importante no que diz respeito à Trigonometria. Contendo treze volumes, a obra intitulada por Ptolomeu como Sintaxe e somente posteriormente recebeu dos árabes o nome de Almagesto, que significa “o maior” (FLOOD; WILSON, 2013).

Essa obra foi tão importante, que dominou a Astronomia por cerca de 1500 anos. Nela está descrito o movimento do Sol, da Lua e dos planetas, até então conhecidos. Nesta época, consideravam a Terra fixa e imóvel com o Sol e os planetas girando em torno dela. Criou então os epiciclos, que são pequenos círculos centrados na Terra que para eles eram a principal órbita. Neste trabalho, em Astronomia, considerava o comprimento das cordas e círculos, “corda é o segmento de reta que une dois pontos do círculo; corresponde a calcular para vários ângulos a razão trigonométrica chamada seno” (FLOOD; WILSON, 2013, p.32).

2 TUTORIAL DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Quadro 1 – Planejamento[*] da aplicação do Tutorial do *software* Geogebra

Tutorial do *software* Geogebra	
Carga horária	4 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Ponto, reta, semirreta, segmento de reta, retas perpendiculares, retas paralelas, retas coincidentes, retas concorrentes, classificação de ângulos e triângulos.
Objeto Geral	Reconhecer as ferramentas do *software* Geogebra. Apropriação de conceitos de reta, ângulos e triângulos.
Recursos	Computadores, *Software* Geogebra e Tutorial.
Procedimentos	Construir retas, ângulos e triângulos utilizando ferramentas do Geogebra, e investigar as propriedades das figuras geométricas construídas.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora (2018).

O Geogebra é um *software* de matemática que possibilita a construção de demonstrações que envolvam álgebra e geometria. O programa possui ferramentas que permitem a movimentação e alteração das construções. O sucesso na construção de demonstrações exige conhecimento do conteúdo estudado e correta manipulação das ferramentas disponibilizadas pelo programa. O Geogebra apresenta caixas de mensagens com instruções de uso quando uma ferramenta básica é selecionada, contudo a construção de ângulos de um triângulo, por exemplo, depende de manipulações que não são informadas pelo *software* (ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010). Portanto esse tutorial foi organizado com o objetivo de proporcionar conhecimentos básicos necessários para a construção de figuras geométricas.

[*] Os planejamentos apresentados neste caderno de atividades são sugestão e podem ser adaptados.

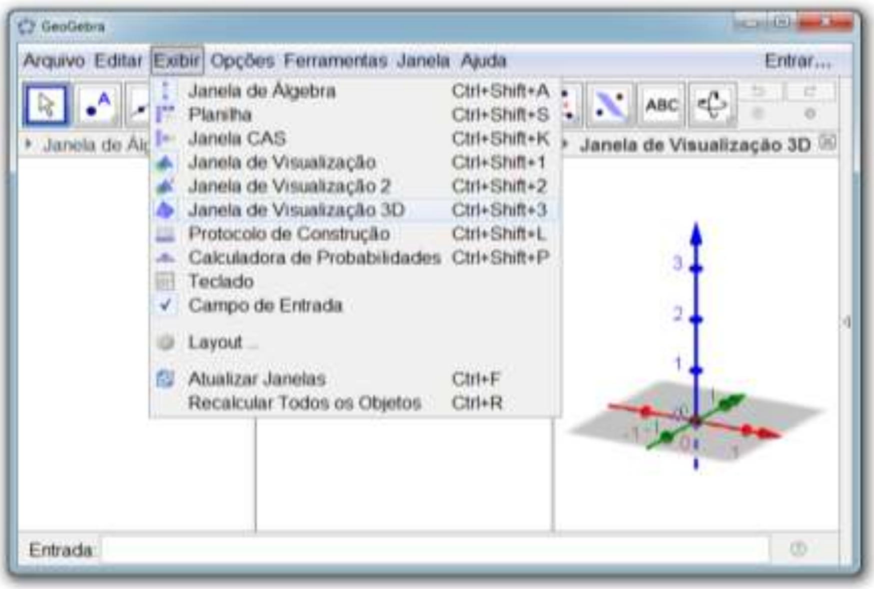
Etapas da tarefa

Janelas do Geogebra

O *software* apresenta duas janelas básicas: à esquerda a Janela de Álgebra e direita a Janela de Visualização.

1. **Exibindo ou ocultando janelas:** acesse o menu Exibir e selecione Janela de Visualização, Janela de Visualização 2 ou Janela de Visualização 3D.

Figura 02 – Exibindo e ocultando janelas



Fonte: elaboração da autora (2018).

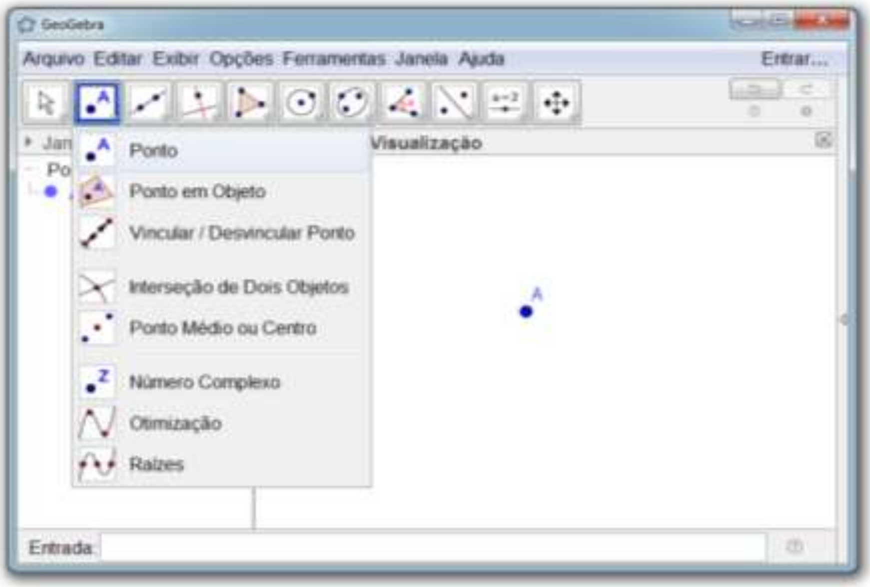
Espaço para anotações:

Ponto

Ponto é uma noção primitiva que determina uma posição no espaço.

2. **Inserindo um ponto:** acesse a ferramenta Ponto, selecione uma posição, reta, função ou curva.

Figura 03 – Inserindo um ponto



Fonte: elaboração da autora (2018).

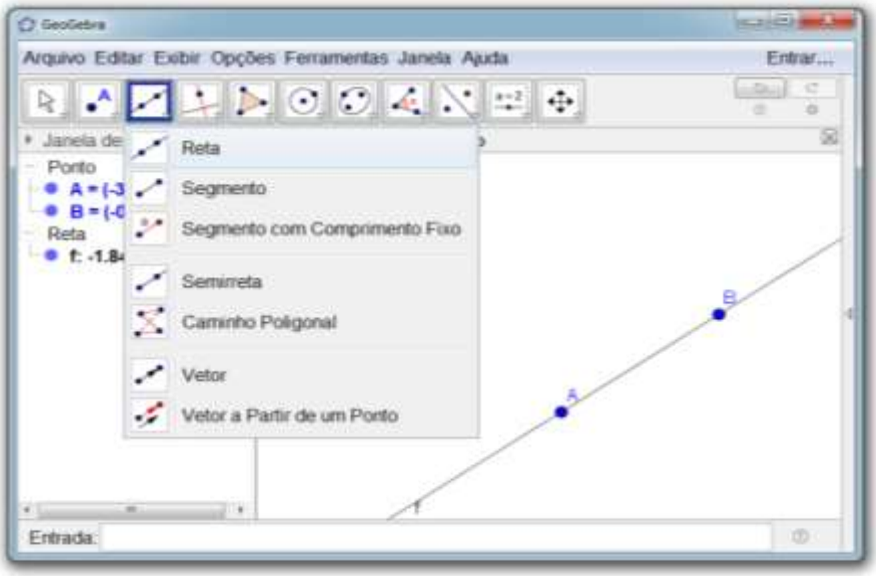
Espaço para anotações:

Reta

Reta é um conjunto de pontos que não têm extremidades. Por um ponto podem passar infinitas retas. Dados dois pontos existe uma única reta que os contém.

3. **Inserindo uma reta:** acesse a ferramenta Reta, selecione dois pontos ou duas posições.

Figura 04 – Inserindo uma reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

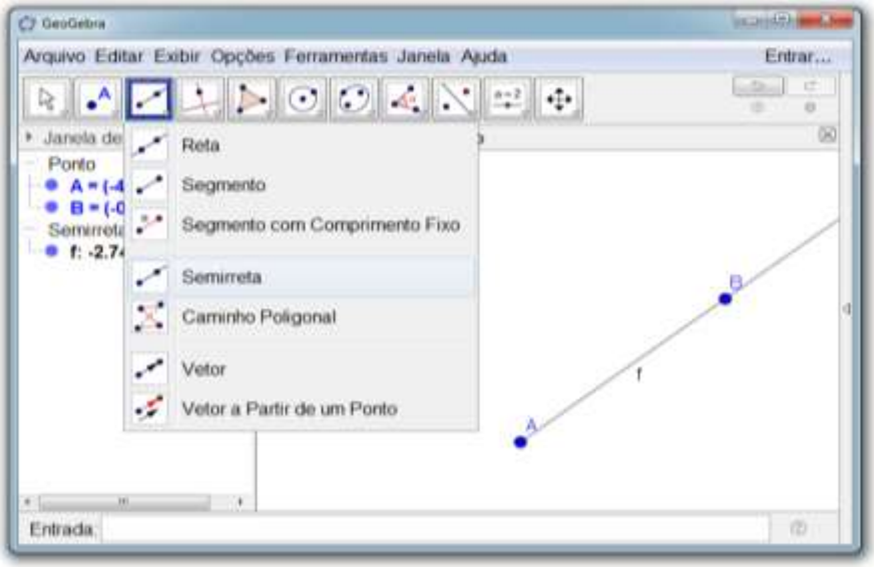
Espaço para anotações:

Semirreta

Semirreta é um conjunto de pontos que tem origem.

4. **Inserindo uma semirreta:** acesse a ferramenta Semirreta e clique em dois locais da janela de visualização.

Figura 05 – Inserindo uma semirreta



Fonte: elaboração da autora (2018).

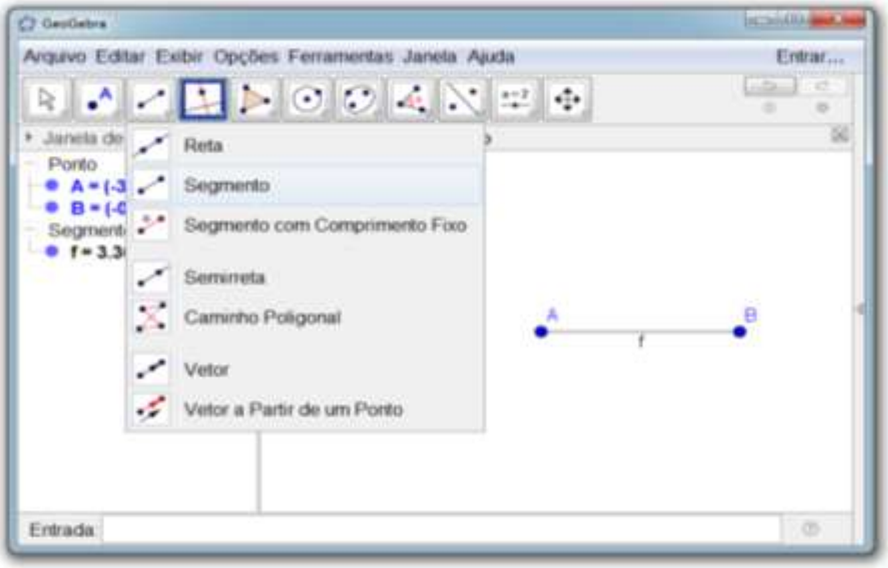
Espaço para anotações:

Segmento de reta

Segmento de reta é um conjunto de pontos que têm extremos, ou seja, tem início e fim.

5. **Inserindo um segmento de reta:** acesse a ferramenta Segmento e clique em dois locais da janela de visualização.

Figura 06 – Inserindo um segmento de reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

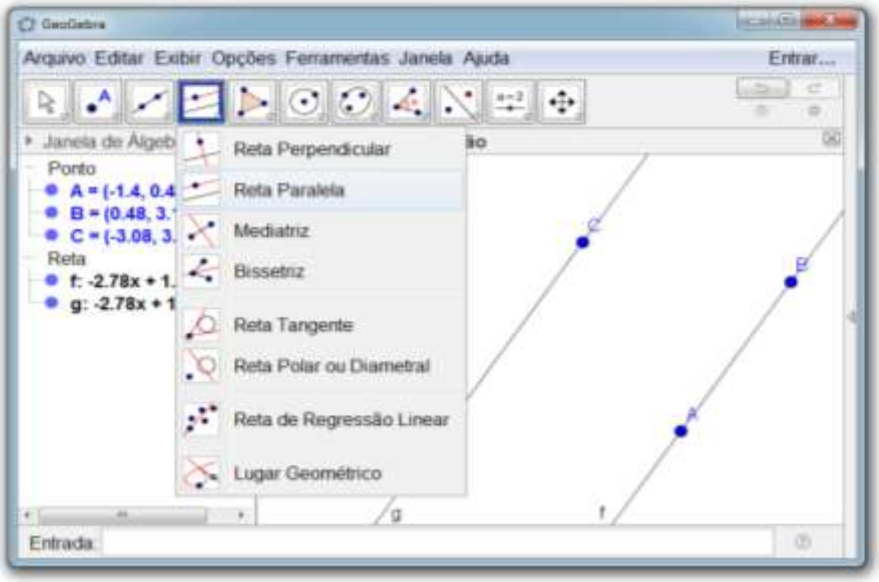
Espaço para anotações:

Retas paralelas

Retas paralelas são retas de um plano que não possuem ponto comum e apresentam a mesma distância em toda a extensão.

6. **Inserindo uma reta paralela:** acesse a ferramenta Reta e insira uma reta f, em seguida acesse a ferramenta Reta Paralela, insira primeiro o ponto C e, depois selecione a reta f.

Figura 07 – Inserindo uma reta paralela



Fonte: elaboração da autora (2018).

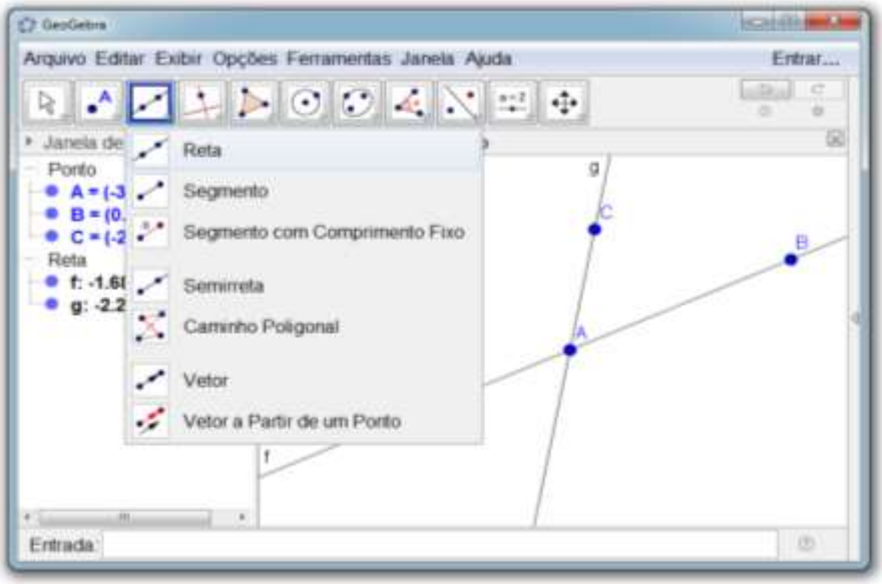
Espaço para anotações:

Retas concorrentes

Retas concorrentes possuem um ponto em comum.

7. **Inserindo retas concorrentes:** acesse a ferramenta Reta e insira uma reta f, selecione um ponto da reta f e insira uma reta g.

Figura 08 – Inserindo retas concorrentes



Fonte: elaboração da autora (2018).

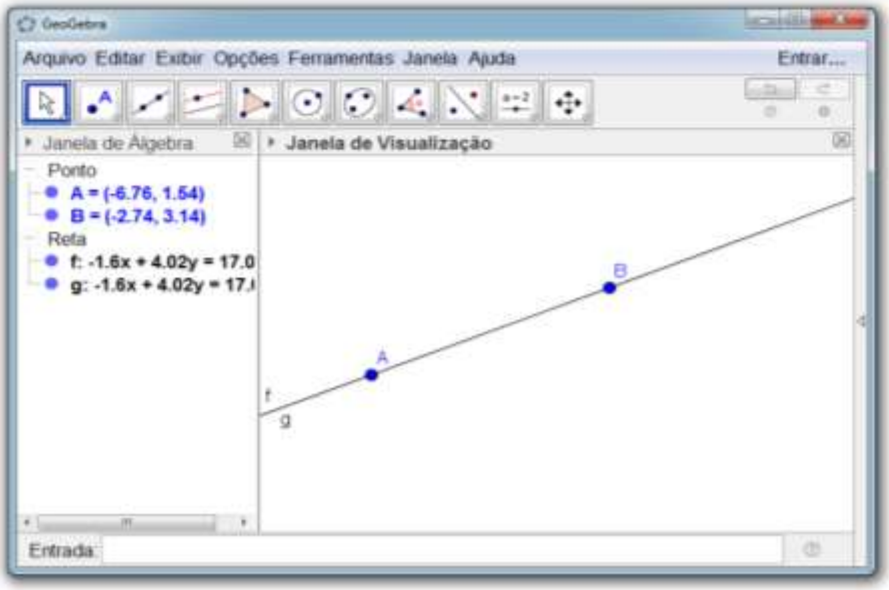
Espaço para anotações:

Retas coincidentes

Retas coincidentes são formadas pelos mesmos pontos.

8. **Inserindo retas coincidentes:** acesse a ferramenta Reta e insira uma reta f, selecione os pontos da reta f e insira uma reta g.

Figura 09 – Inserindo retas coincidentes



Fonte: elaboração da autora (2018).

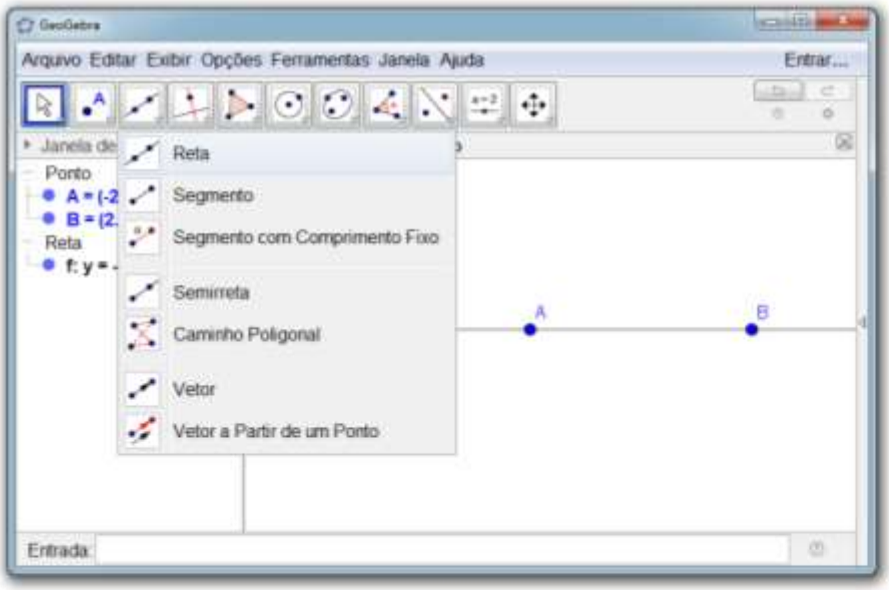
Espaço para anotações:

Retas perpendiculares

Retas perpendiculares são retas concorrentes que formam um ângulo de 90º no ponto que concorrem.

9. **Inserindo uma reta:** acesse a ferramenta Reta e insira uma reta f**.**

Figura 10 – Inserindo uma reta

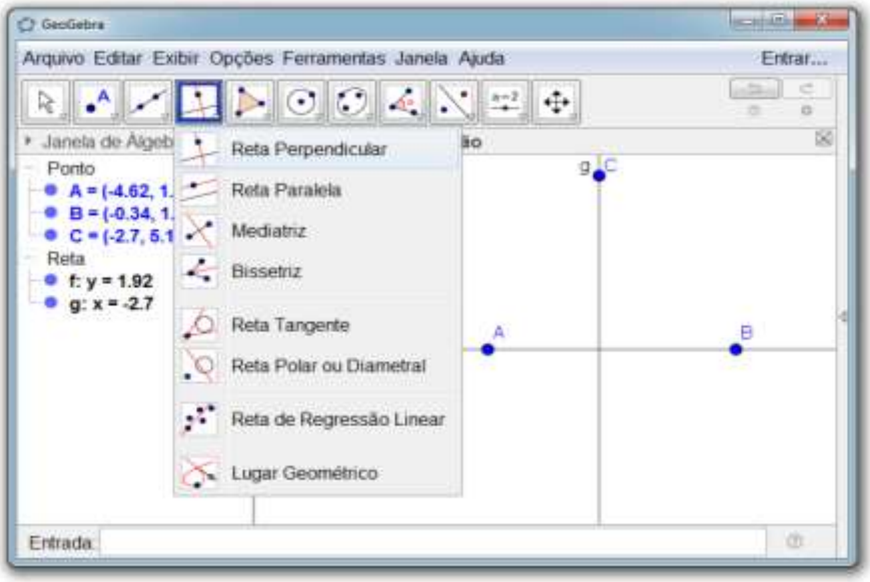


Fonte: elaboração da autora (2018).

Espaço para anotações:

10. **Inserindo uma reta perpendicular:** acesse a ferramenta Reta Perpendicular, insira primeiro um ponto C e, depois selecione o segmento de reta AB.

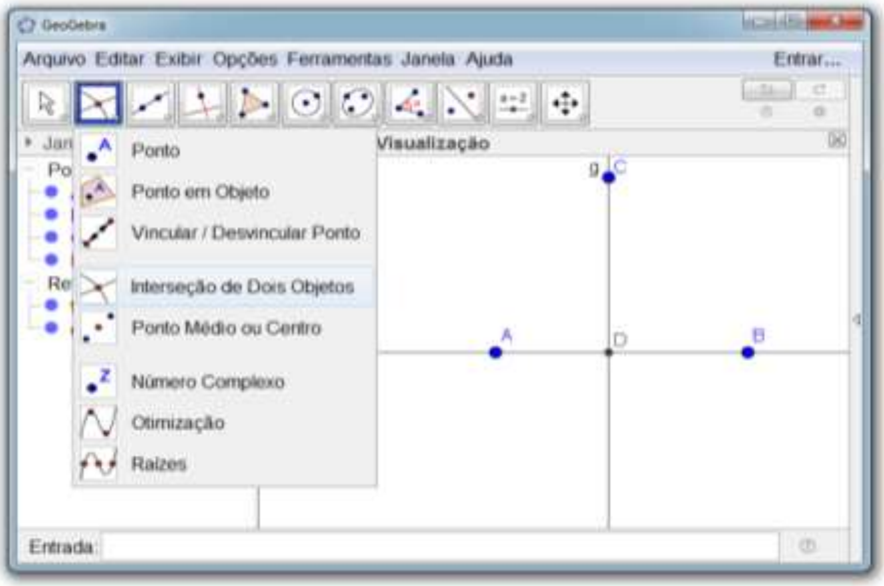
Figura 11 – Inserindo uma reta perpendicular



Fonte: elaboração da autora (2018).

11. **Inserindo um ponto na intersecção de duas retas:** selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecione a reta f e g, respectivamente.

Figura 12 – Inserindo um ponto na intersecção de duas retas



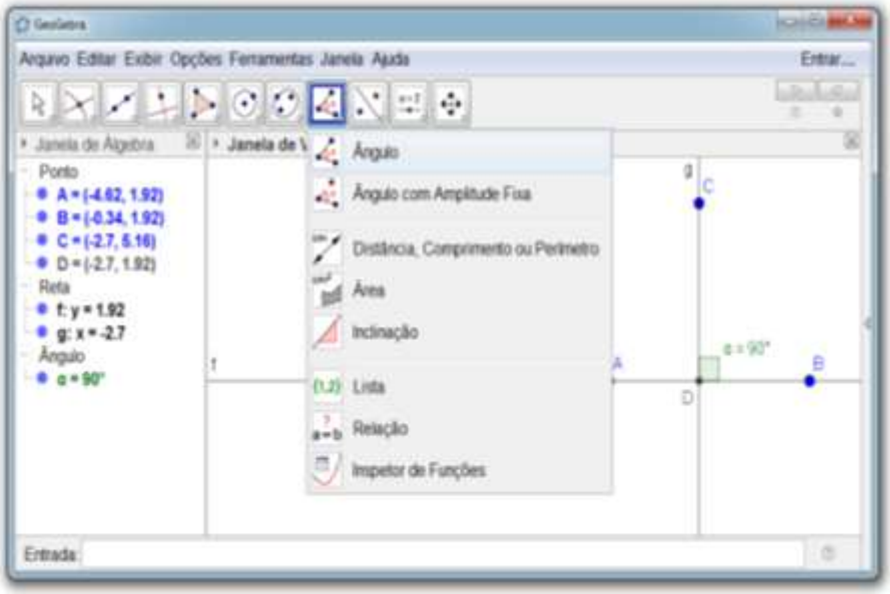
Fonte: elaboração da autora (2018).

Ângulos

Ângulo é a amplitude (medida) entre duas semirretas de mesma origem.

12. **Determinando um ângulo:** acesse a ferramenta Ângulo, selecione os pontos B, D e C, nessa ordem, ou selecione as retas f e g.

Figura 13 – Determinando um ângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

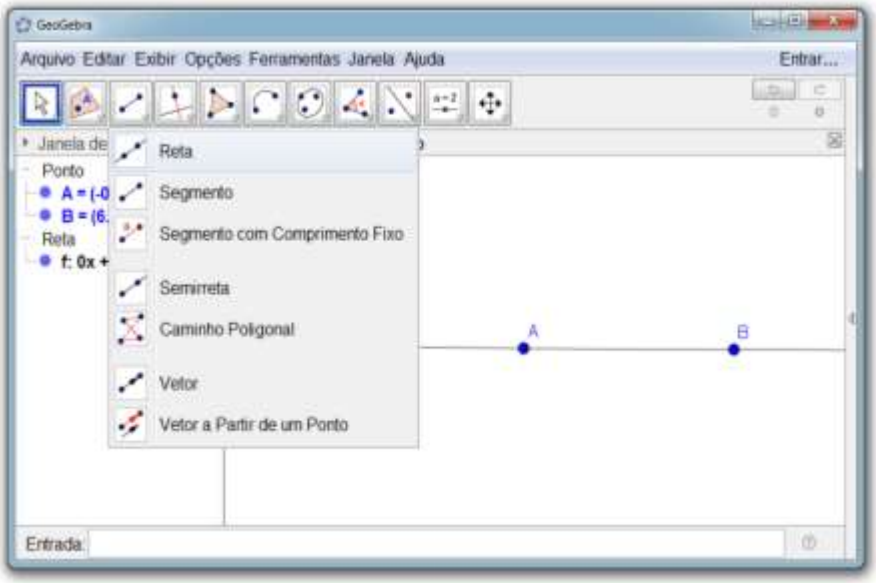
Um ângulo com medida igual a 90º é chamado de ângulo reto. Um ângulo cuja medida está entre 0º e 90º é chamado ângulo agudo. Chama-se obtuso o ângulo cuja medida está entre 90º e 180º. Um ângulo de 180º é chamado raso. Um ângulo nulo tem medida igual à 0º.

Espaço para anotações:

Investigando ângulos

13. Inserindo uma reta: selecione a ferramenta Reta e insira uma reta f.

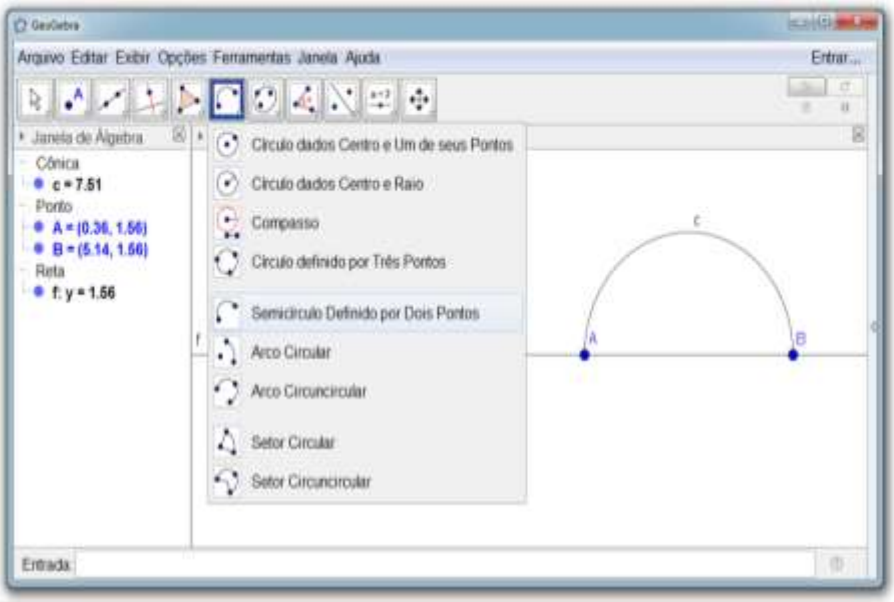
Figura 14 – Inserindo uma reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

14. Inserindo um semicírculo: acesse a ferramenta Semicírculo Definido por Dois Pontos, selecione os pontos A e B.

Figura 15 – Inserindo um semicírculo

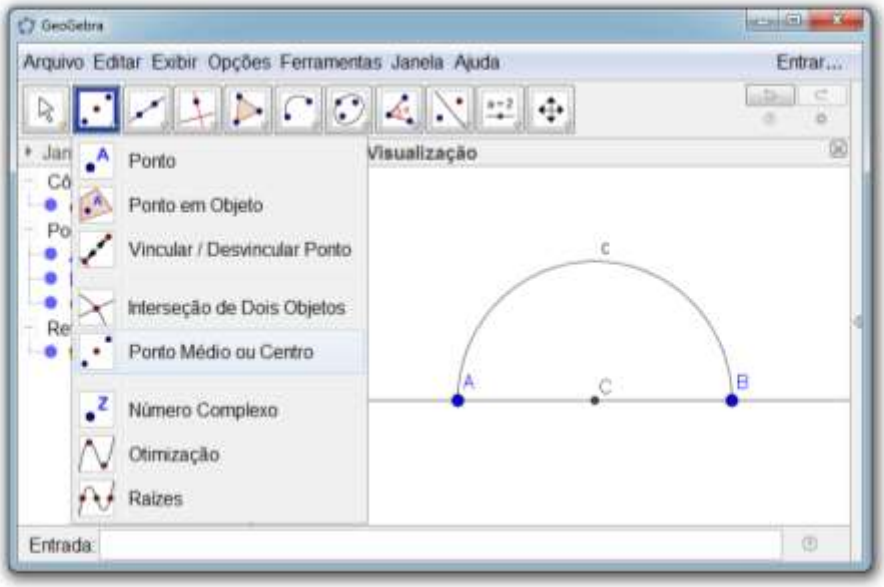


Fonte: elaboração da autora (2018).

Ponto médio: é um ponto que divide um segmento de reta em dois segmentos de mesma medida.

15. **Inserindo um ponto médio:** acesse a ferramenta Ponto Médio ou Centro, selecione os pontos A e B.

Figura 16 - Inserindo um ponto médio

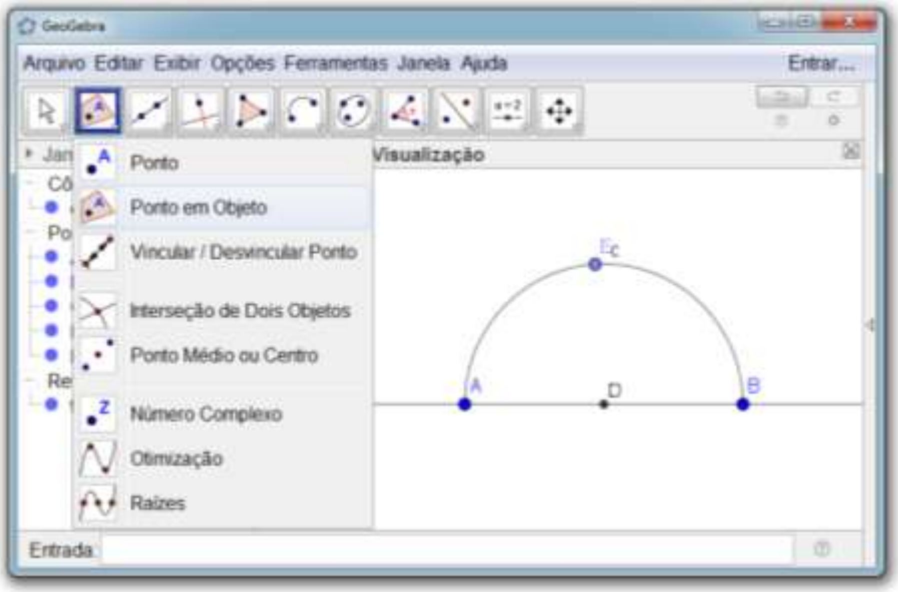


Fonte: elaboração da autora (2018).

Espaço para anotações:

16. **Inserindo um ponto em objeto:** acesse a ferramenta Ponto em Objeto e selecione o semicírculo.

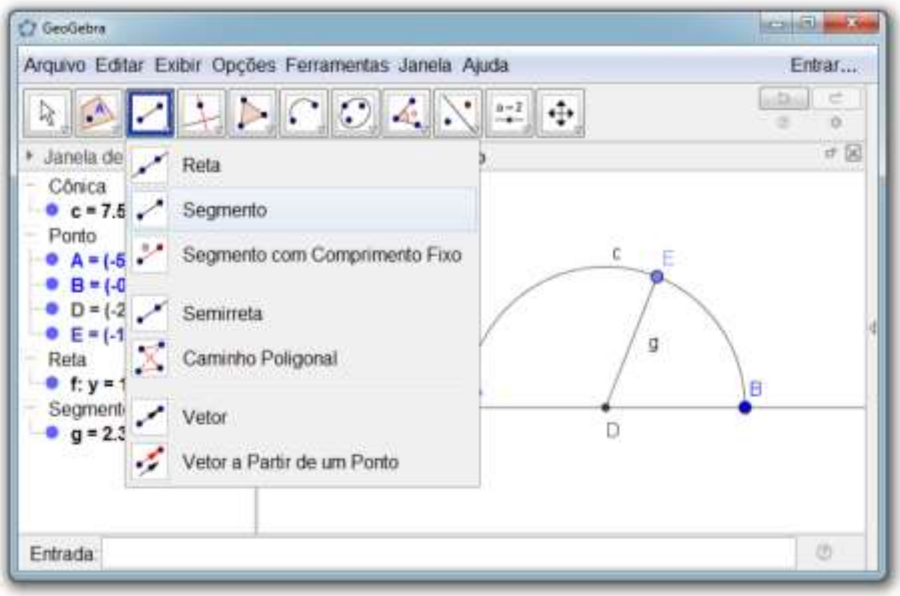
Figura 17 - Inserindo um ponto em objeto



Fonte: elaboração da autora (2018).

17. **Inserindo um segmento de reta:** acesse a ferramenta Segmento, selecione o ponto D (ponto médio) e o ponto E (ponto do semicírculo).

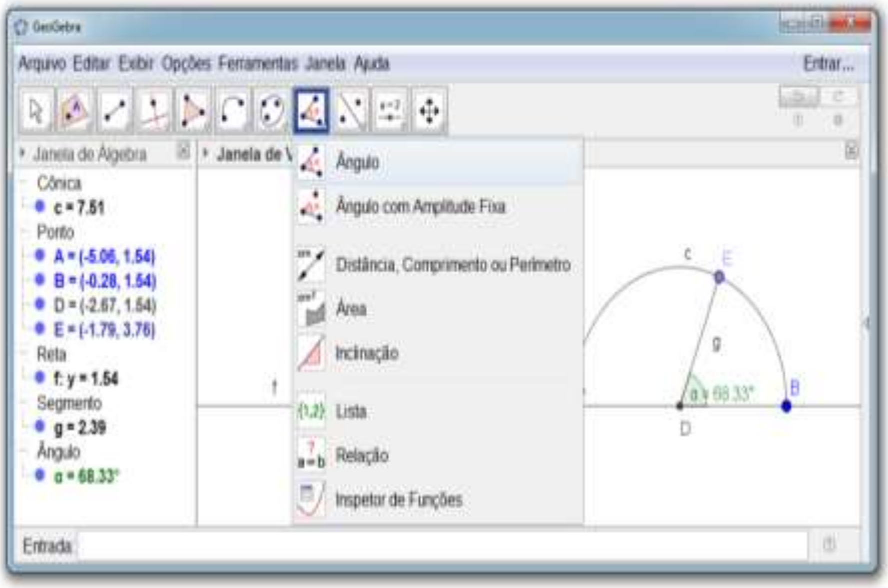
Figura 18 - Inserindo um segmento de reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

18. Determinando ângulo: selecione a ferramenta Ângulo, selecione os pontos B, D e E, em sentido horário.

Figura 19 - Inserindo ângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

19. Mova o ponto E, determine quatro ângulos de medidas diferentes, anote as medidas encontradas na tabela, e classifique os ângulos:

Ângulo	Medida do ângulo	Classificação do ângulo
01		
02		
03		
04		

Triângulo

Triângulo é um polígono que possui três lados, três vértices e três ângulos. Os triângulos podem ser classificados de acordo com as medidas de seus lados ou de seus ângulos internos.

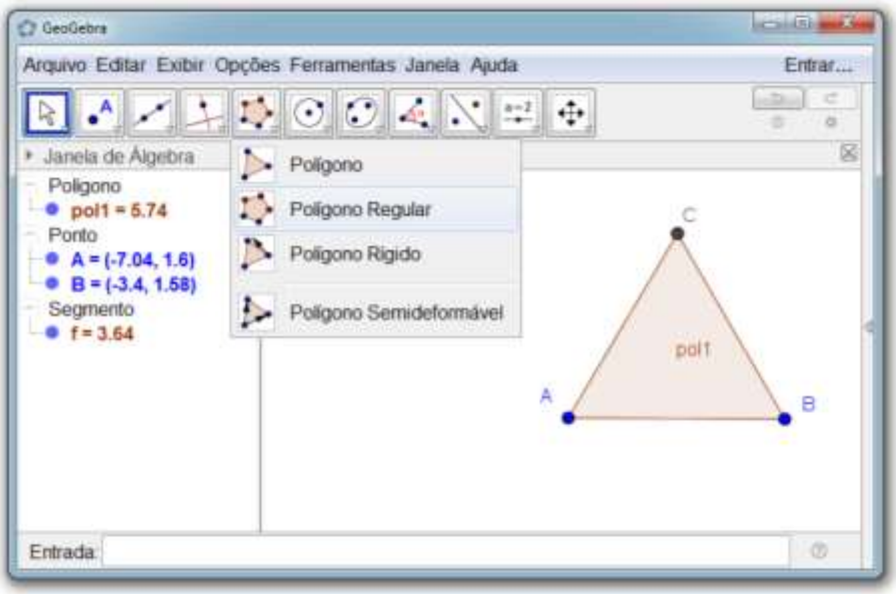
Classificação de triângulos quanto aos lados e ângulos

Triângulos quanto aos lados: um triângulo em que os três lados são congruentes é chamado de triângulo equilátero. Isósceles é um triângulo que tem dois lados congruentes. Um triângulo escaleno tem os três lados com medidas diferentes.

Triângulos quanto aos ângulos: um triângulo que tem um ângulo interno reto é chamado retângulo. Um triângulo que tem os três ângulos internos agudos é chamado acutângulo. Obtusângulo é um triângulo que tem um ângulo interno obtuso.

20. **Construindo um triângulo:** acesse a ferramenta Polígono Regular, insira primeiro dois pontos, e depois, entre com o número de vértices.

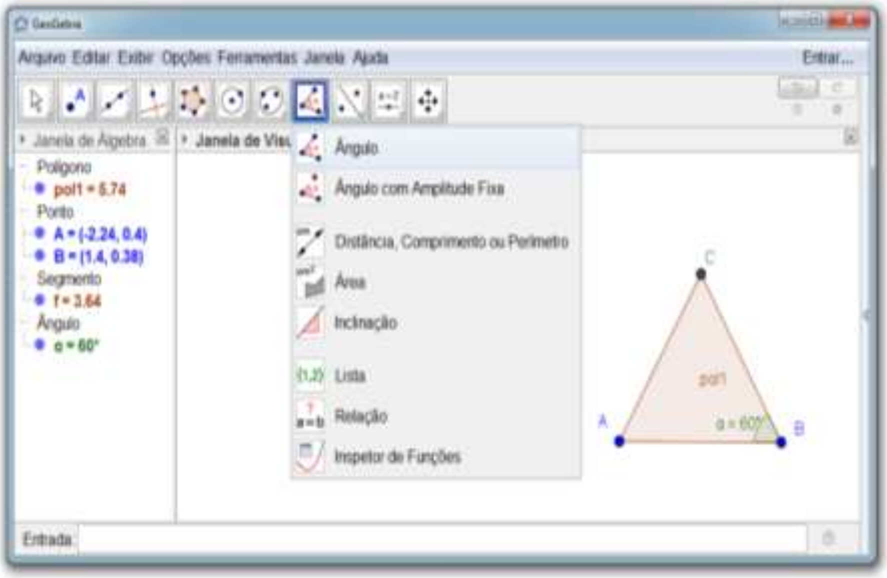
Figura 20 - Construindo um polígono regular com três vértices



Fonte: elaboração da autora (2018).

21. **Determinando os ângulos internos do triângulo:** acesse a ferramenta Ângulo, selecione três pontos em sentido horário, ou dois segmentos de reta. Determine todos os ângulos internos do triângulo ABC.

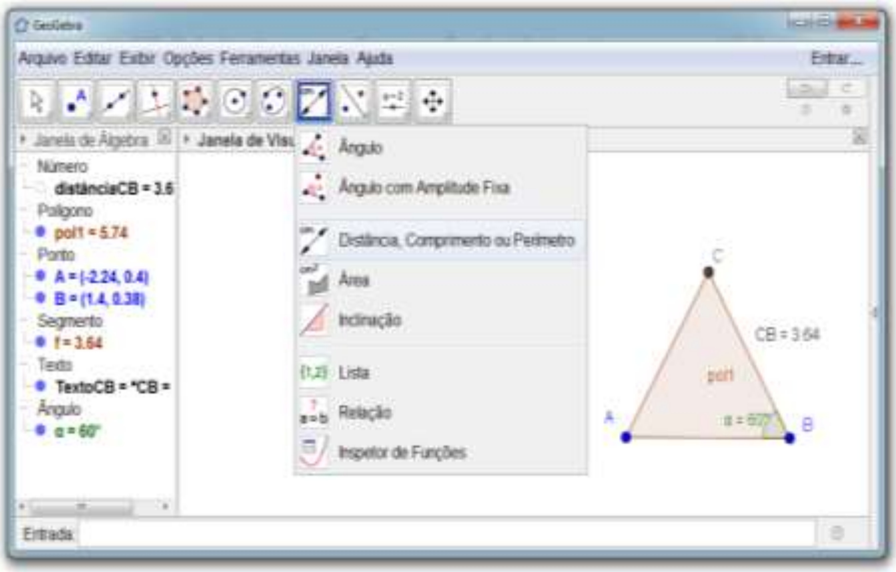
Figura 21 – Determinando os ângulos internos do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

22. **Determinando a medida dos lados do triângulo:** acesse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, selecione dois pontos ou um segmento de reta. Determine a medida de todos os lados do triângulo ABC.

Figura 22 – Determinando a medida dos lados do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

23. Preencha a tabela com as medidas dos lados e ângulos do triângulo ABC.

Ângulo	Medida	Lado	Medida
$A\hat{B}C$		AB	
$B\hat{C}A$		BC	
$C\hat{A}B$		AC	

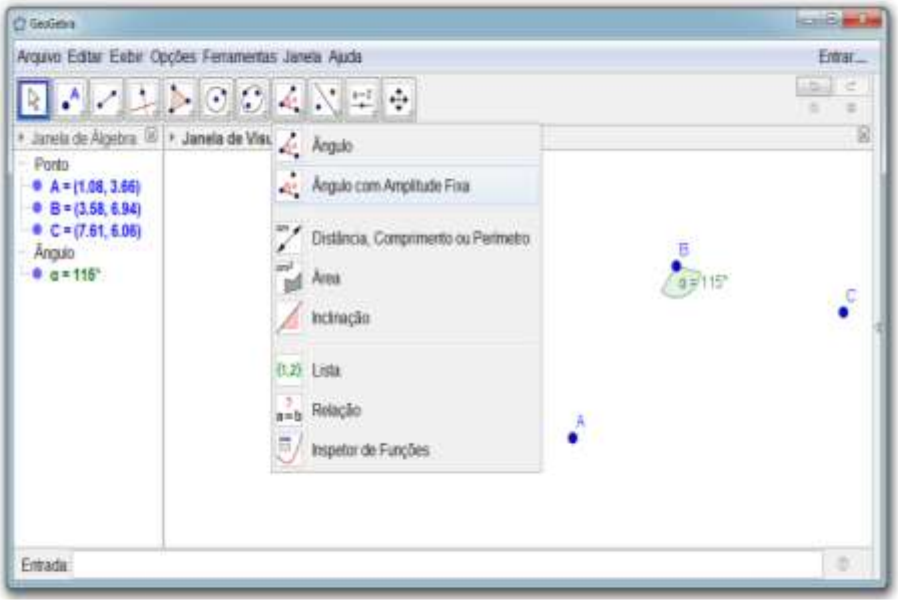
24. Classifique o triângulo ABC.

Triangulo ABC	Quanto aos ângulos	Quanto aos lados
Classificação		
Justifique a classificação		

Espaço para anotações:

25. Construindo um triângulo com ângulo fixo - 1ª etapa: acesse a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa, selecione um ponto, um vértice e uma amplitude para o ângulo.

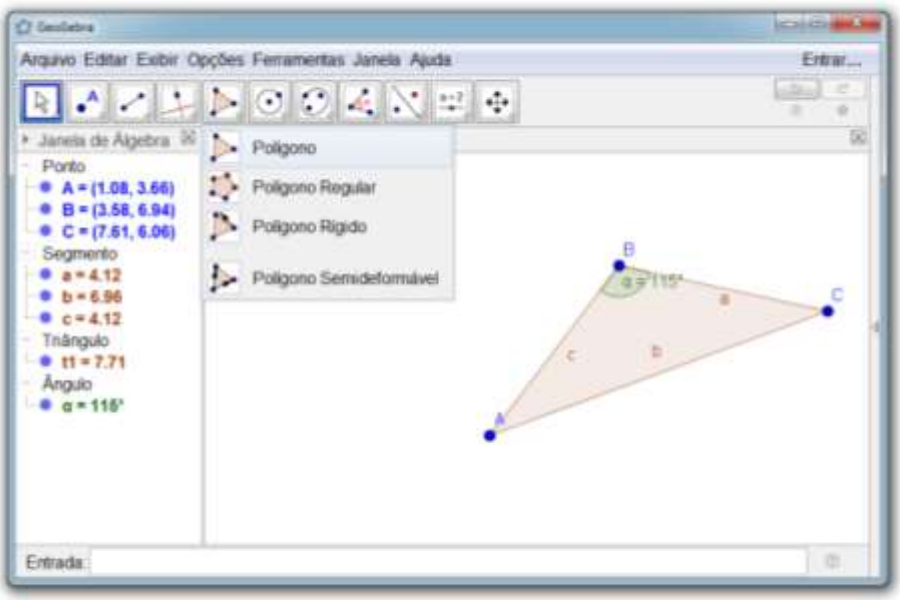
Figura 23 – Construindo um triângulo com ângulo fixo – 1ª etapa



Fonte: elaboração da autora (2018).

26. Construindo um triângulo com ângulo fixo – 2ª etapa: acesse a ferramenta Polígono, selecione os vértices A, B e C, e então, o vértice A novamente.

Figura 24 – Construindo um triângulo com ângulo fixo – 2ª etapa



Fonte: elaboração da autora (2018).

27. Determine a medida de todos os lados e ângulos do triângulo ABC e preencha a tabela.

Ângulo	Medida	Lado	Medida
$A\hat{B}C$		AB	
$B\hat{C}A$		BC	
$C\hat{A}B$		AC	

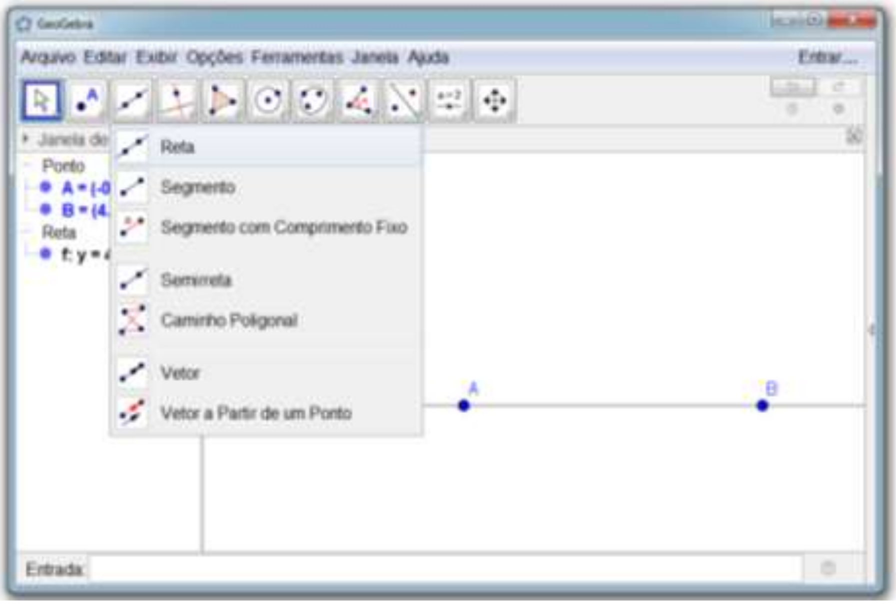
28. Classifique o triângulo ABC.

Triangulo ABC	Quanto aos ângulos	Quanto aos lados
Classificação		
Justifique a classificação		

Espaço para anotações:

29. Construindo um triângulo a partir de três pontos: acesse a ferramenta Reta, selecione dois pontos ou duas posições.

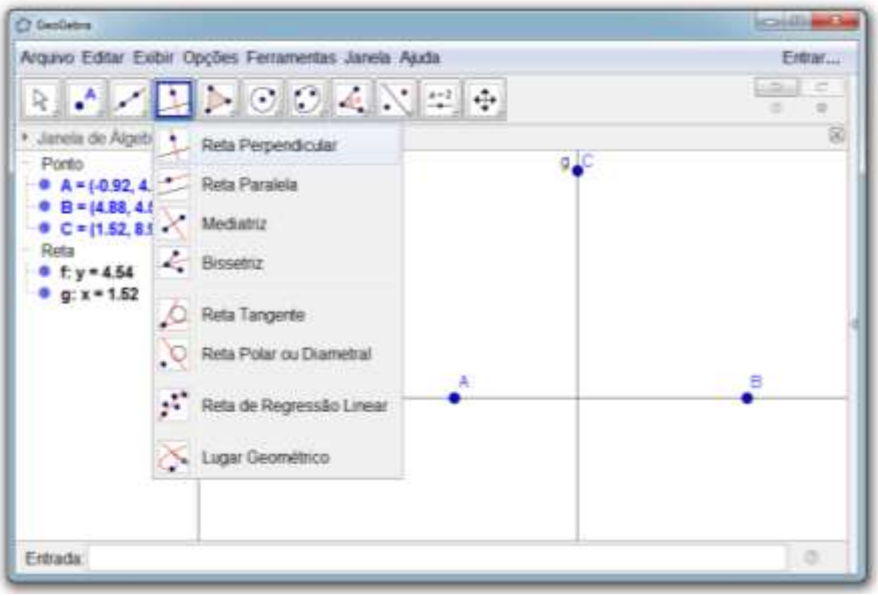
Figura 25 – Inserindo uma reta AB



Fonte: elaboração da autora (2018).

30. Inserindo uma reta perpendicular: acesse a ferramenta Reta Perpendicular, insira um ponto C e depois selecione o segmento de reta AB.

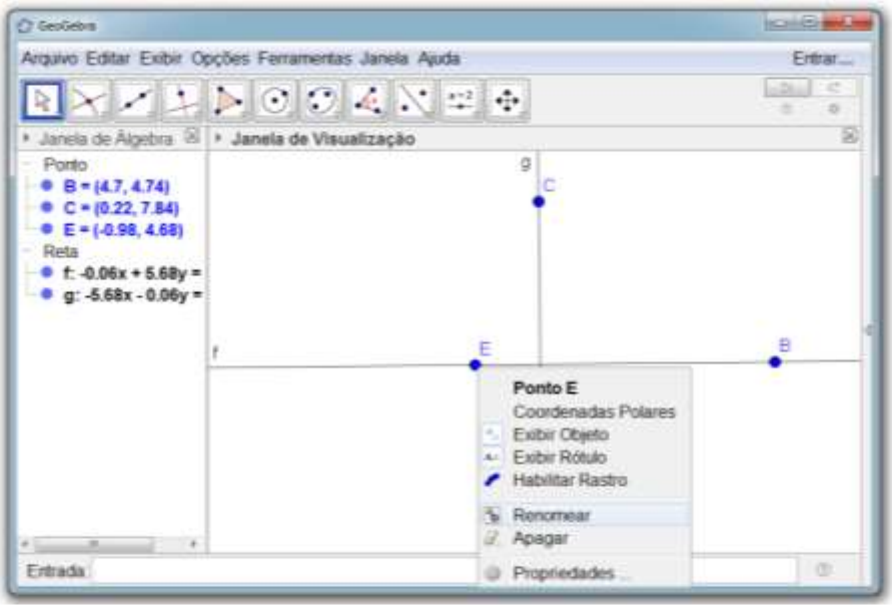
Figura 26 – Inserindo uma reta perpendicular



Fonte: elaboração da autora (2018).

31. Renomeando o ponto A: selecione o ponto A com o botão direito do mouse, acesse a ferramenta renomear e altere o rótulo para E.

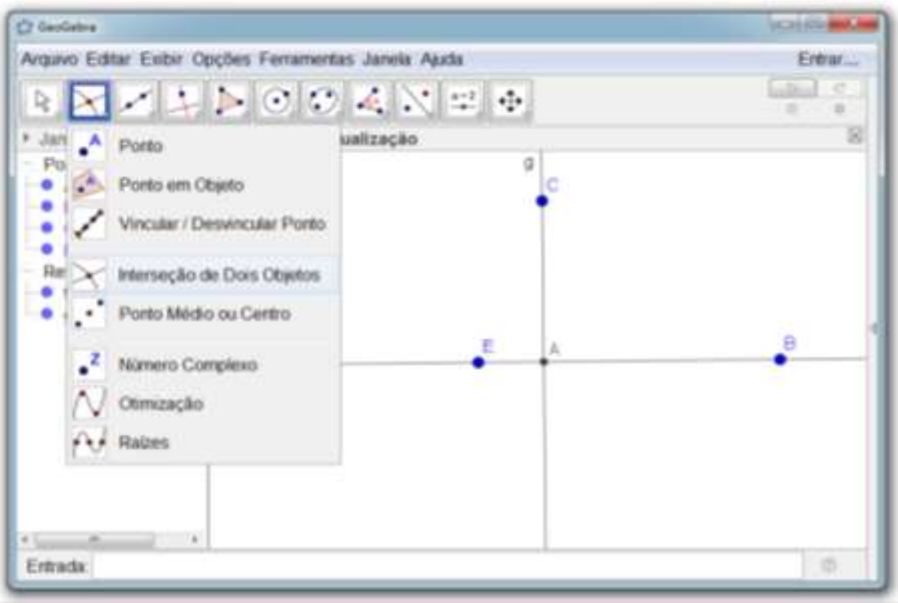
Figura 27 – Renomeando o ponto A



Fonte: elaboração da autora (2018).

32. Inserido um ponto de interseção: acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecione as retas f e g.

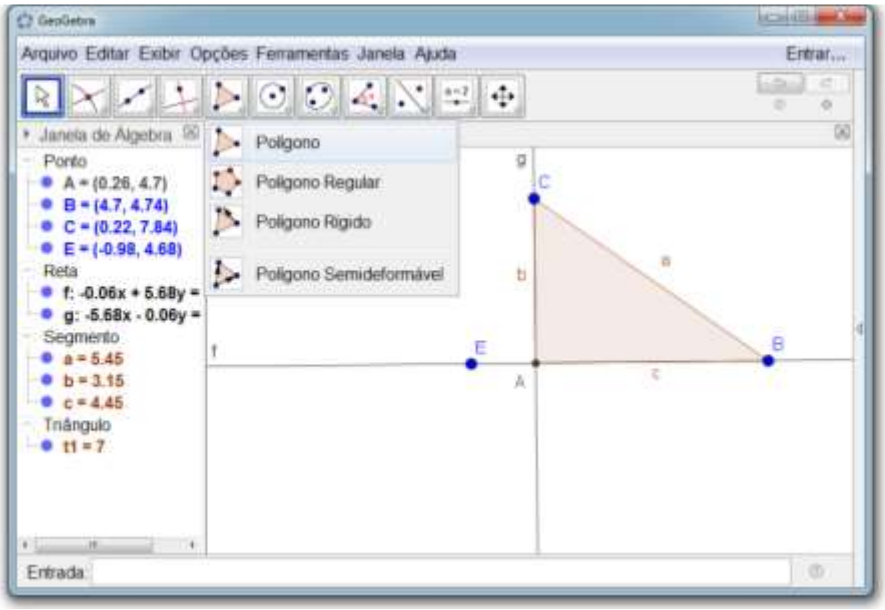
Figura 28 – Inserido um ponto na interseção das retas f e g



Fonte: elaboração da autora (2018).

33. Inserindo um polígono: acesse a ferramenta Polígono, selecione os pontos A, B e C, e então, o ponto A novamente.

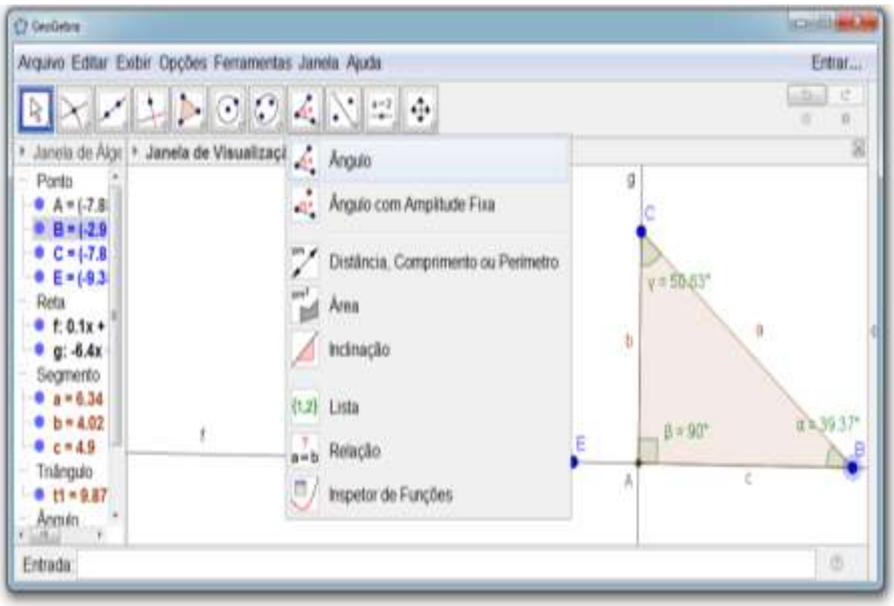
Figura 29 – Inserindo um polígono



Fonte: elaboração da autora (2018).

34. Determinando a amplitude (medida) dos ângulos internos do triângulo: acesse a ferramenta Ângulo, selecione os pontos BAC, nessa ordem, em seguida repita o procedimento para os pontos ACB, e CBA.

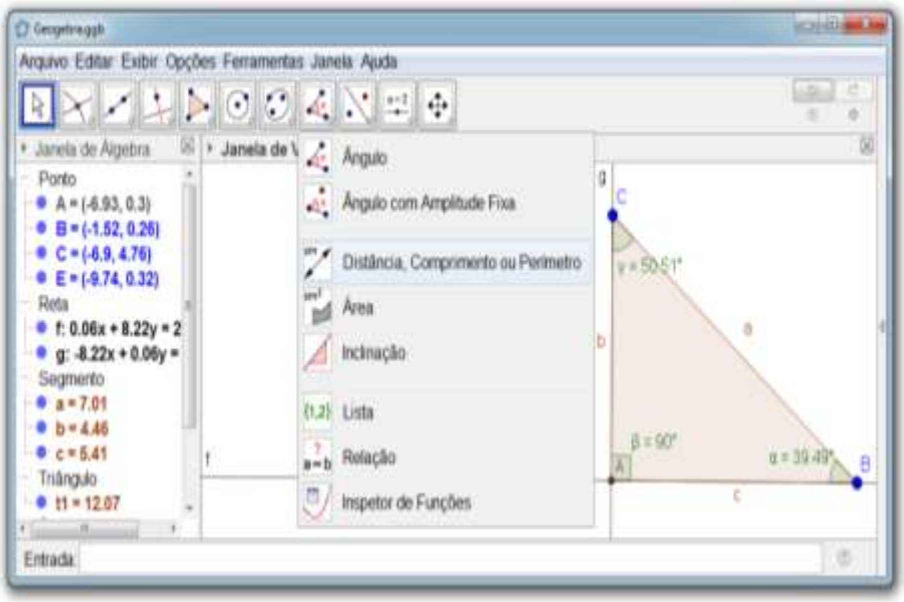
Figura 30 - Determinando a amplitude dos ângulos internos do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

35. Determinando a medida dos lados do triângulo: acesse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, selecione dois pontos ou um segmento de reta. Determine a medida de todos os lados do triângulo ABC.

Figura 31 - Determinando a medida dos lados do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

36. Determine a medida de todos os lados e ângulos do triângulo ABC e preencha a tabela.

Ângulo	Medida	Lado	Medida
$A\hat{B}C$		AB	
$B\hat{C}A$		BC	
$C\hat{A}B$		AC	

37. Classifique o triângulo ABC.

Triangulo ABC	Quanto aos lados	Quanto aos ângulos
Classificação		
Justifique a classificação		

Espaço para anotações:

3 TAREFA 1 – INVESTIGANDO ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Quadro 2 – Planejamento da primeira tarefa

Tarefa 01 – Investigando ângulos internos de um triângulo	
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Ângulos internos de um triângulo retângulo.
Objeto Geral	Reconhecer um triângulo como retângulo.
Recursos	Tarefa de estudo e *Software* Geogebra.
Procedimentos	Construir um triângulo a partir das instruções da tarefa. Determinar as medidas dos ângulos internos do triângulo. Investigar as relações existentes entre os ângulos internos do triângulo.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora (2018).

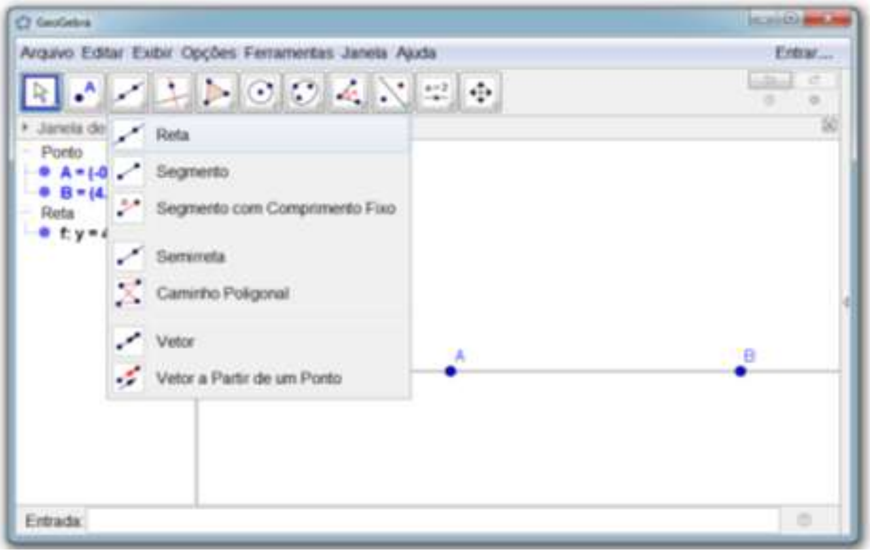
Triângulo retângulo

Todo triângulo que tem um ângulo reto e dois ângulos agudos é chamado triângulo retângulo, sendo a soma das medidas de seus ângulos internos igual a 180º e a soma dos agudos igual a 90º, logo os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares. O triângulo retângulo permitiu que civilizações antigas calculassem distâncias e alturas consideradas impossíveis de medir. “Os antigos egípcios usavam um triângulo com lados de medidas 3, 4 e 5 unidades para determinar um ângulo reto” (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 182), o que permitiu um alto grau de precisão na construção de pirâmides.

Etapas da tarefa

1. **Inserindo uma reta:** acesse a ferramenta Reta, selecione dois pontos ou duas posições.

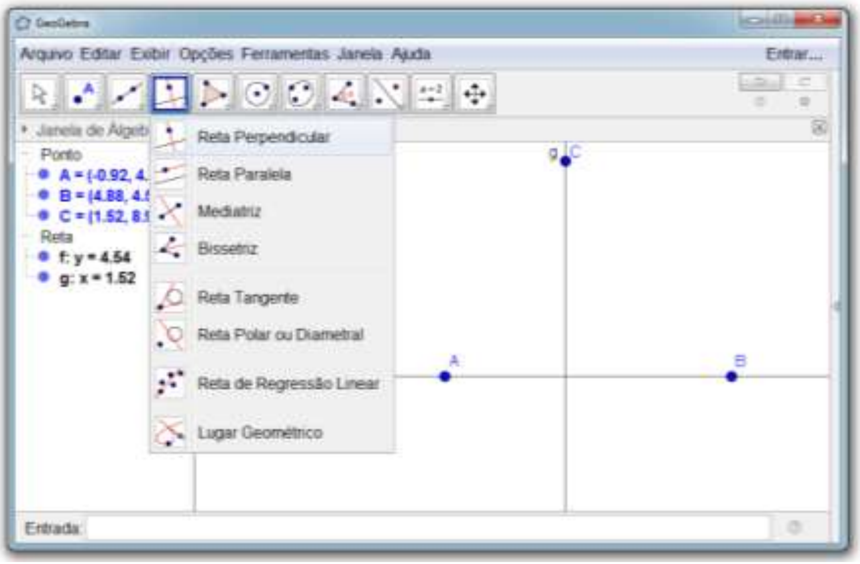
Figura 32 – Inserindo uma reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

2. **Inserindo uma reta perpendicular:** acesse a ferramenta Reta Perpendicular, selecione um ponto C e depois o segmento de reta AB.

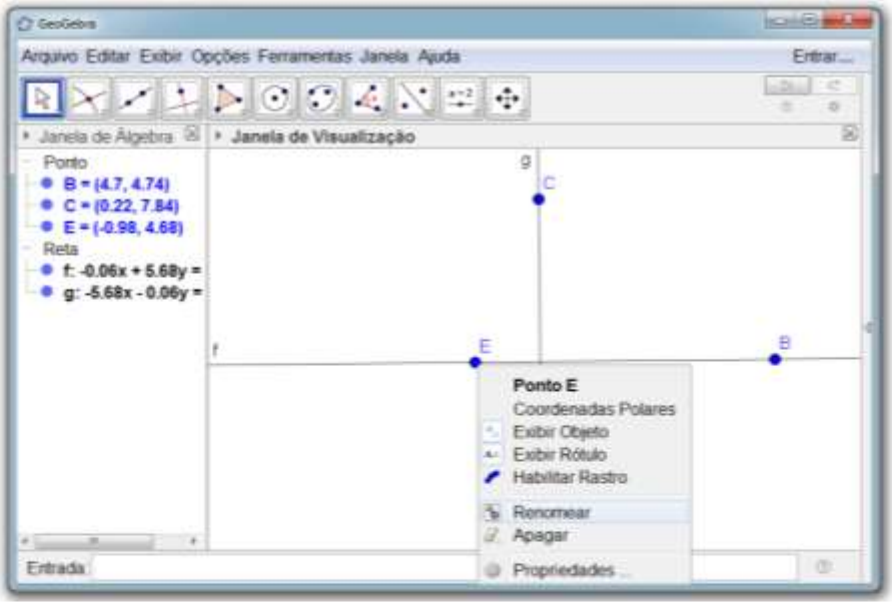
Figura 33 – Inserindo uma reta perpendicular



Fonte: elaboração da autora (2018).

3. **Renomeando o ponto A:** selecione o ponto A com o botão direito do mouse, acesse a ferramenta renomear e altere seu rótulo para E.

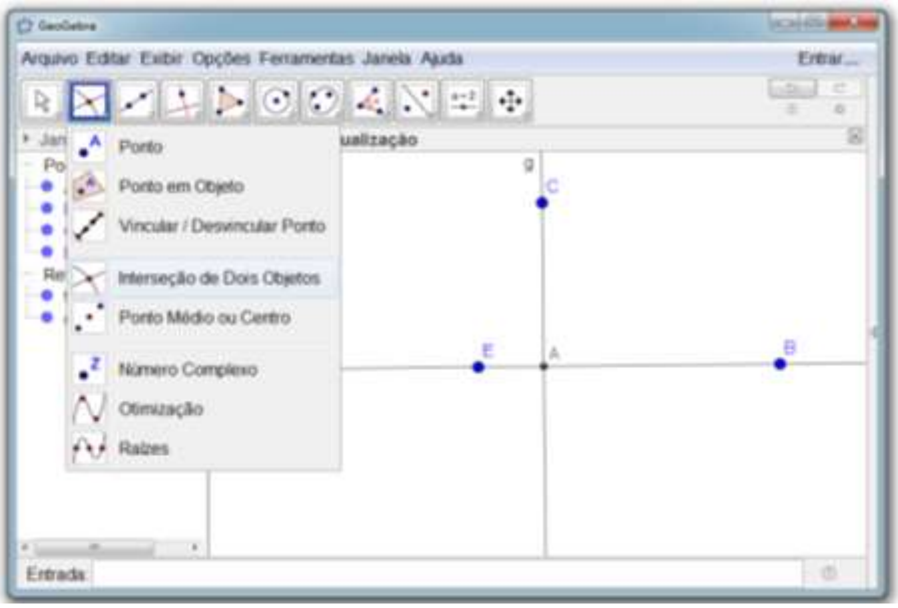
Figura 34 – Renomeando o ponto A



Fonte: elaboração da autora (2018).

4. **Inserindo um ponto fixo na interseção das retas f e g:** acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecione as retas f e g para inserir o ponto A.

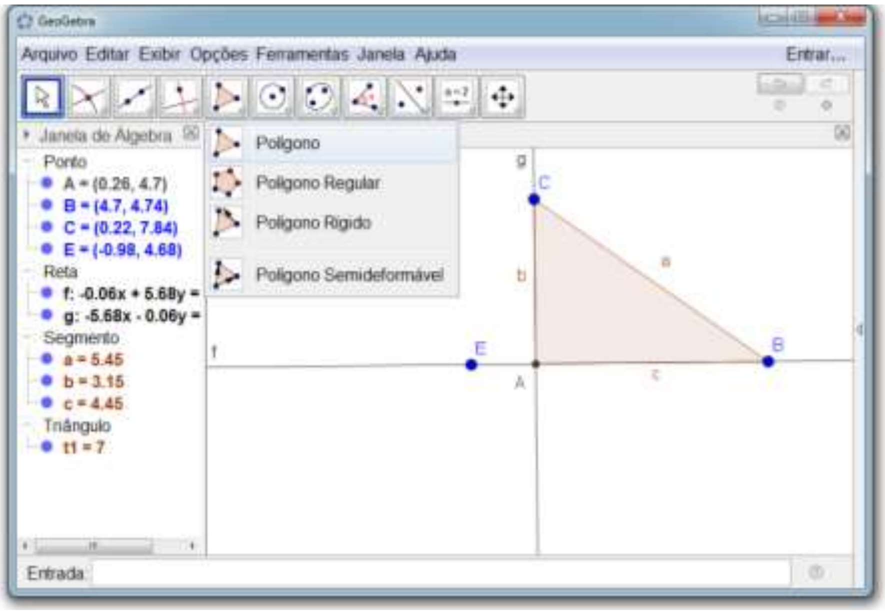
Figura 35 – Inserindo um ponto fixo na interseção das retas f e g



Fonte: elaboração da autora (2018).

5. **Inserindo um polígono:** acesse a ferramenta Polígono, selecione os pontos A, B e C, nessa sequência, e depois o ponto A novamente.

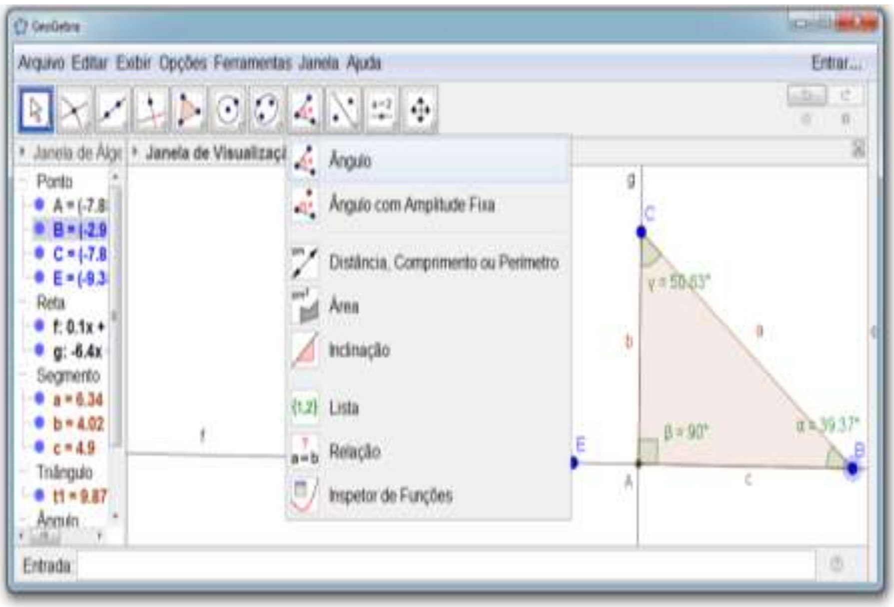
Figura 36 - Inserindo um polígono



Fonte: elaboração da autora (2018).

6. **Determinando a amplitude (medida) dos ângulos internos do triângulo:** acesse a ferramenta Ângulo, selecione os pontos BAC, nessa ordem, em seguida repita o procedimento para os pontos ACB, e CBA.

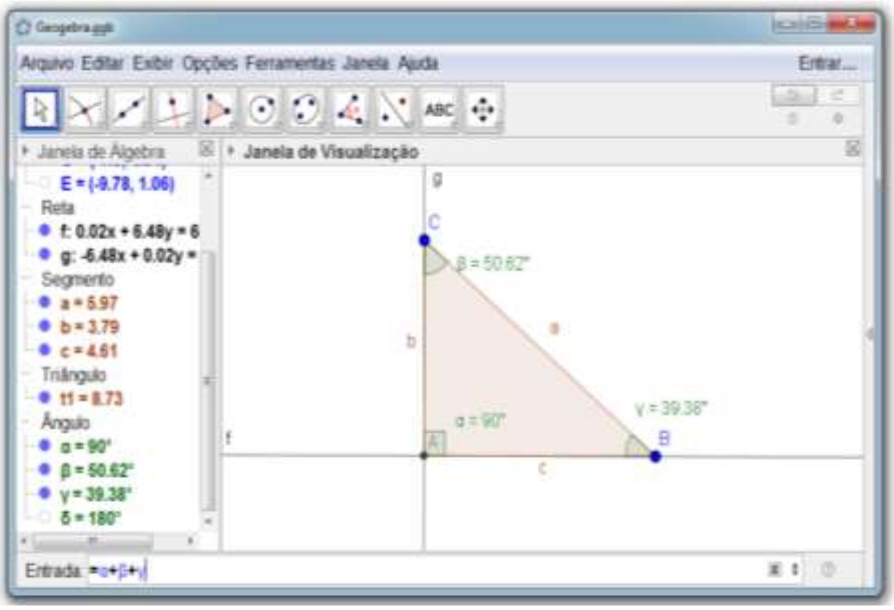
Figura 37 – Determinando a amplitude dos ângulos internos do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

7. **Inserindo a fórmula α + β + y:** na caixa de entrada digite = α + β + y e tecle enter.

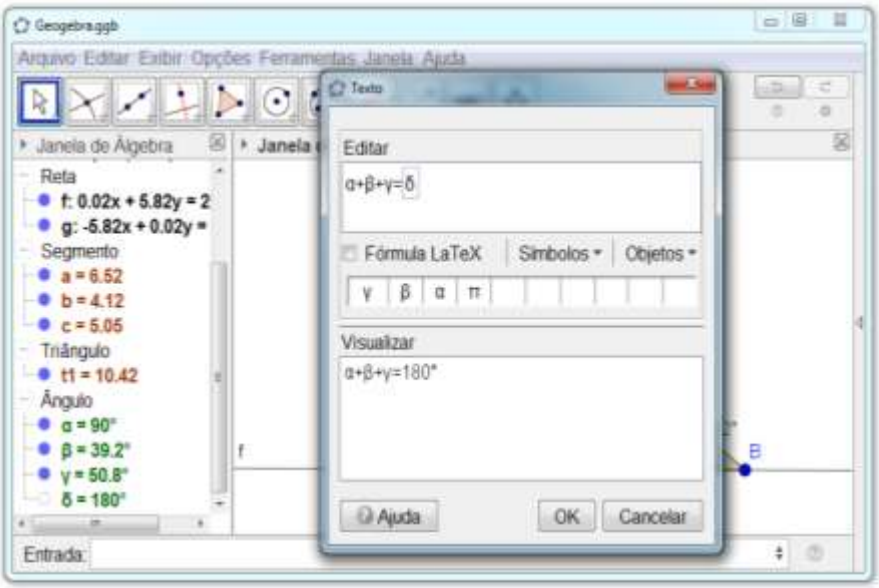
Figura 38 – Inserindo a fórmula α + β + y



Fonte: elaboração da autora (2018).

8. **Inserindo o texto α + β + y = *δ*:** acesse a ferramenta Texto e digite α + β + y = em seguida selecione na opção Objetos o símbolo *δ* e clique em OK.

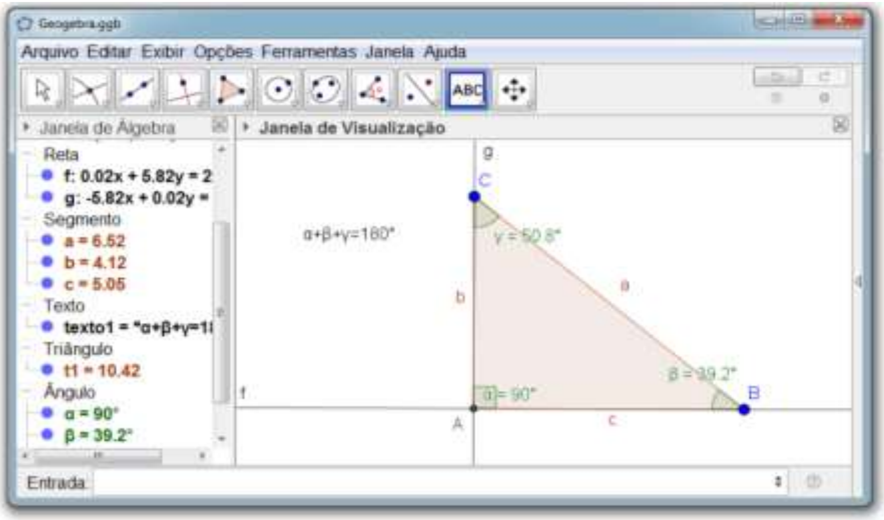
Figura 39 – Inserindo o texto α + β + y = *δ*



Fonte: elaboração da autora (2018).

9. Observe que na Janela de Visualização aparece o texto α + β + y = 180º.

Figura 40 – Visualização do texto α + β + y = 180º

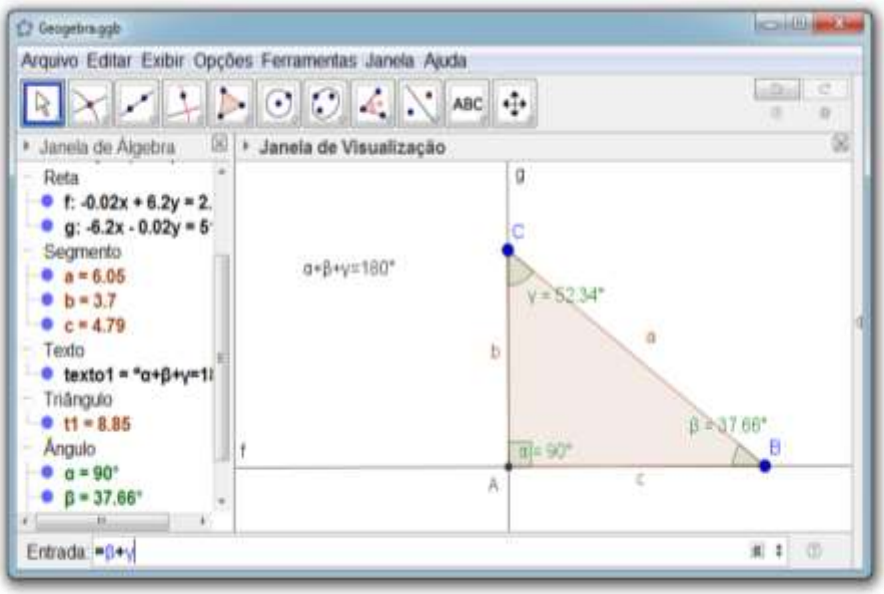


Fonte: elaboração da autora (2018).

10. Mova os pontos B e C do triângulo ABC e responda: o que acontece com a soma dos ângulos α, β e y? Que relação pode ser observada a partir dessa investigação?

11. Inserindo a fórmula β + y: na caixa de entrada digite = β + y e tecle enter.

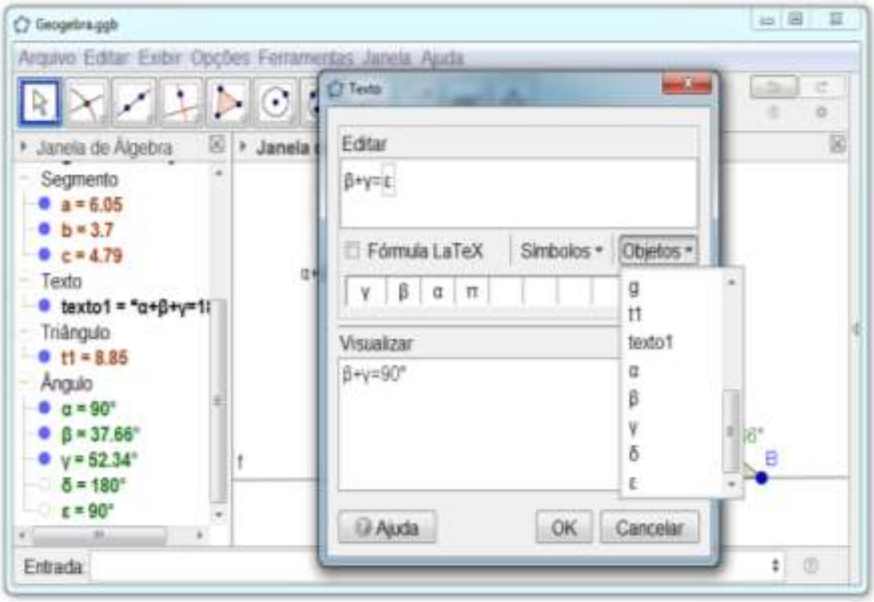
Figura 41 – Inserindo a fórmula β + y



Fonte: elaboração da autora (2018).

12. Inserindo o texto β + y = *ε*: acesse a ferramenta Texto e digite β + y = em seguida selecione na opção Objetos o símbolo *ε* e clique OK.

Figura 42 – Inserindo o texto β + y = *ε*



Fonte: elaboração da autora (2018).

13. Mova os pontos B e C do triângulo ABC e responda: o que acontece com soma dos ângulos β e y? Que relação pode ser observada a partir dessa investigação?

14. Investigando o triângulo construído é possível afirmar que se trata de um triângulo retângulo? Justifique sua resposta.

4 TAREFA 2 – INVESTIGANDO RELAÇÕES ENTRE ÁREAS DE POLÍGONOS CONSTRUÍDOS SOBRE OS LADOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Quadro 3 – Planejamento da segunda tarefa

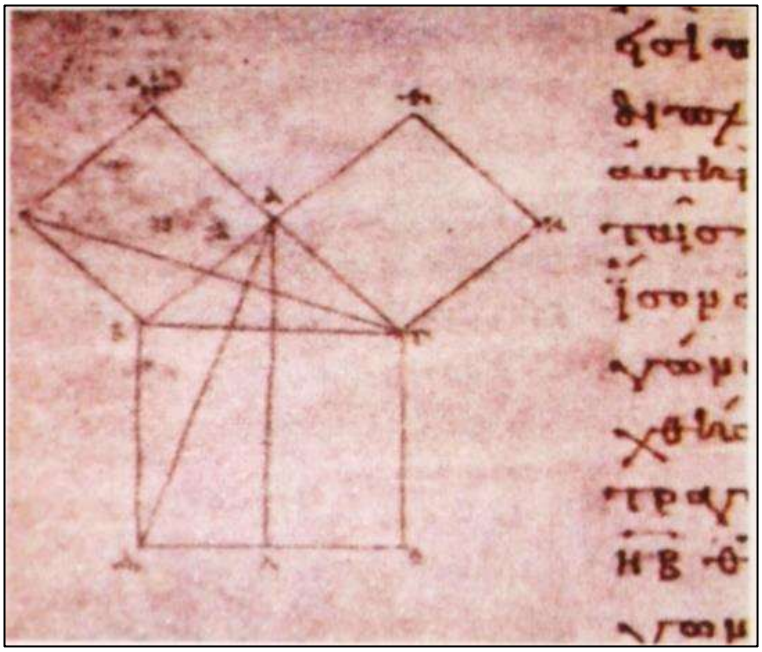
Tarefa 02 - Investigando relações entre áreas de polígonos construídos sobre os lados de um triângulo retângulo	
Carga horária	4 horas-aula de 50 minutos.
Conteúdo	Triângulo retângulo, polígonos regulares, medidas de comprimento e áreas, Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Reconhecer, formalizar e generalizar o Teorema de Pitágoras.
Recursos	Tarefa de estudo, calculadora e *Software* Geogebra.
Procedimentos	Construir e determinar as medidas dos lados de um triângulo retângulo, construir polígonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo, determinar a área dos polígonos regulares, investigar relações existentes entre as áreas dos polígonos construídos.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora (2018).

Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos teoremas matemáticos mais conhecidos, possuindo mais de 300 demonstrações. É possível que povos antigos, como os egípcios, já conhecessem casos particulares deste teorema, mas foi Pitágoras (570 a. C. – 570 a. C.) o primeiro a demonstrá-lo, provando suas relações, a partir desta demonstração o teorema ficou conhecido como Teorema de Pitágoras, em homenagem ao filósofo e matemático grego (SOUZA, 2013).

Figura 43 - Demonstração grega, por volta do ano 800 d. C.

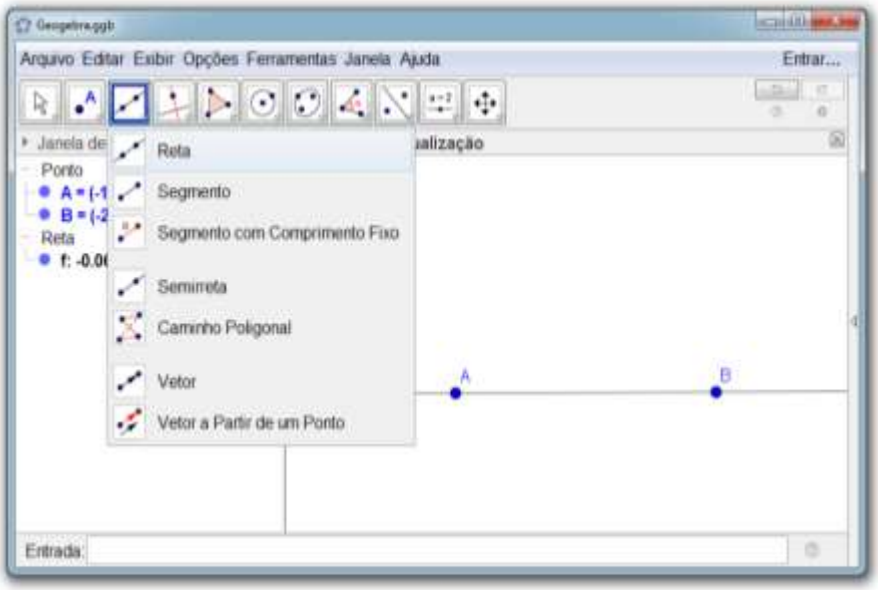


Fonte: Souza e Pataro (2013, p. 264).

Etapas da tarefa

1. **Inserindo uma reta:** acesse a ferramenta Reta, e depois selecione duas posições da Janela de Visualização.

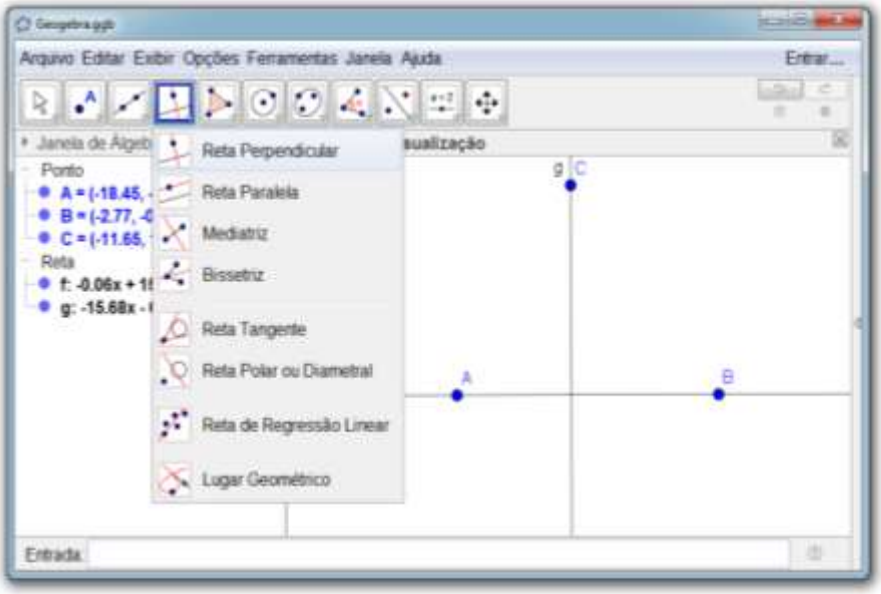
Figura 44 – Inserindo uma reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

2. **Inserindo uma Reta Perpendicular:** selecione a ferramenta Reta Perpendicular, em seguida clique acima da reta f e depois sobre o segmento de reta AB.

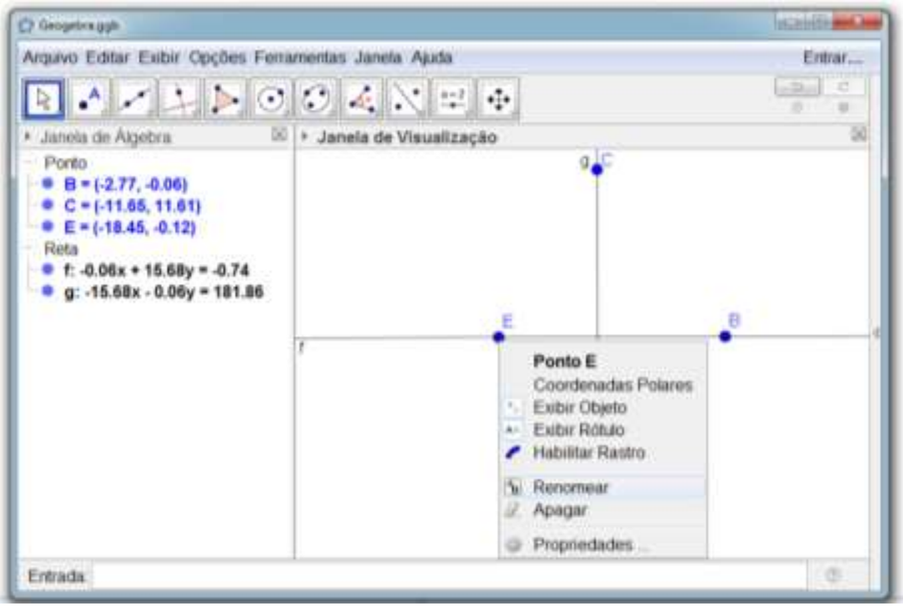
Figura 45 - Inserindo uma Reta Perpendicular



Fonte: elaboração da autora (2018).

3. **Renomeando o ponto A:** selecione o ponto A com o botão direito do mouse, acesse a ferramenta renomear, e digite E.

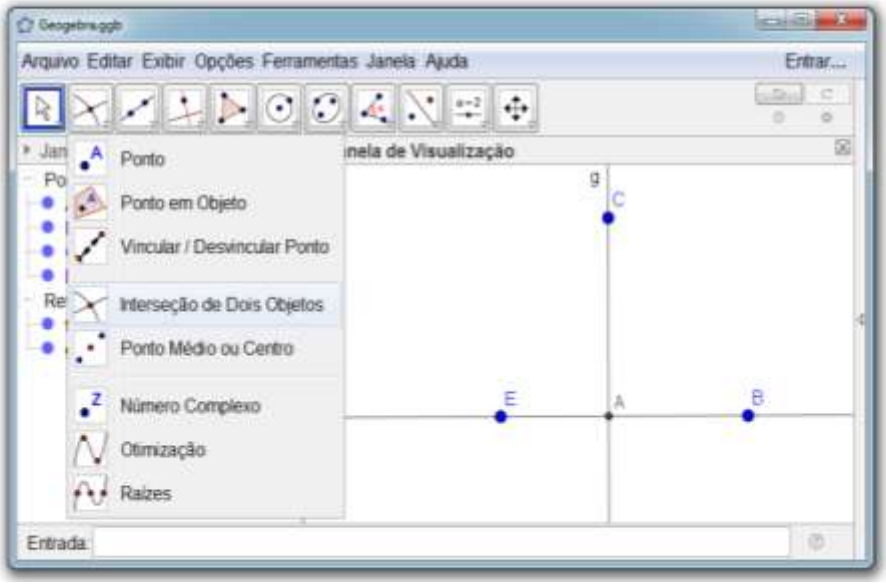
Figura 46 - Renomeando o ponto A



Fonte: elaboração da autora (2018).

4. **Inserindo um ponto na interseção das retas f e g:** acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos, clique sobre as retas f e g para inserir o ponto A.

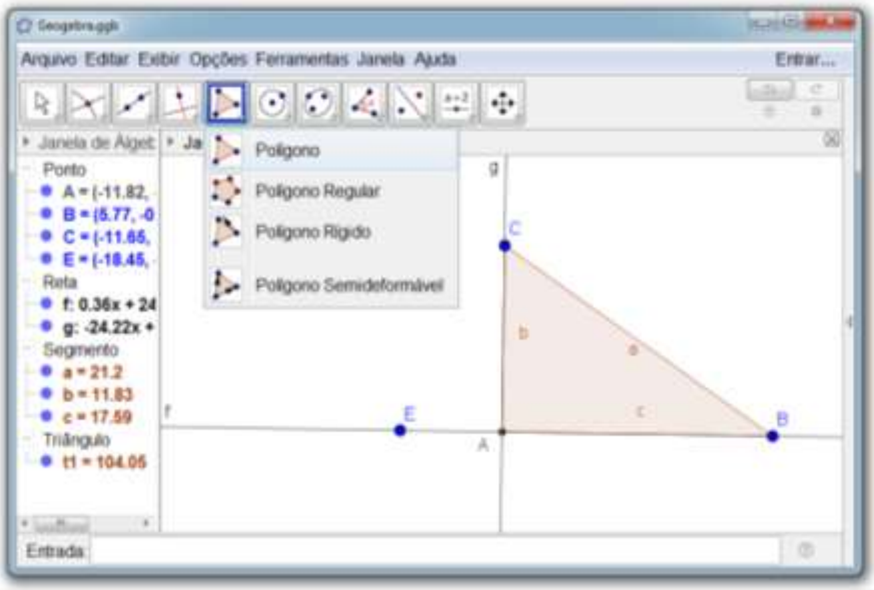
Figura 47 - Inserindo um ponto na interseção das retas f e g



Fonte: elaboração da autora (2018).

5. **Construindo um triângulo:** acesse a ferramenta Polígono, selecione os pontos A, B e C, e então, o ponto A novamente para construir um polígono com três vértices. Selecione o ponto E com o botão direito do mouse e selecione a opção ocultar objeto.

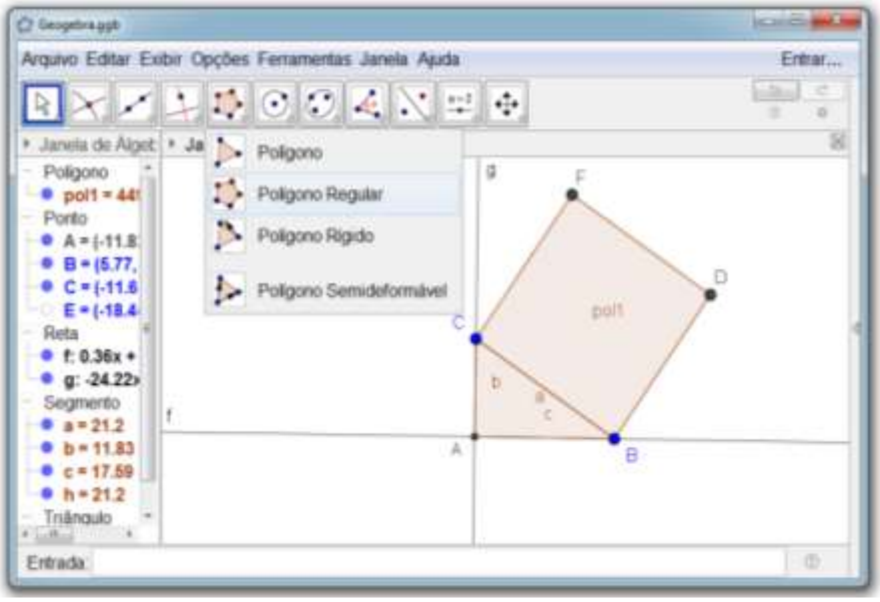
Figura 48 - Construindo um triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

6. **Inserindo um polígono sobre o lado “a” do triângulo:** acesse a ferramenta Polígono Regular, selecione os pontos C e B nessa ordem, e insira um polígono regular com quatro vértices sobre lado “a” do triângulo ABC.

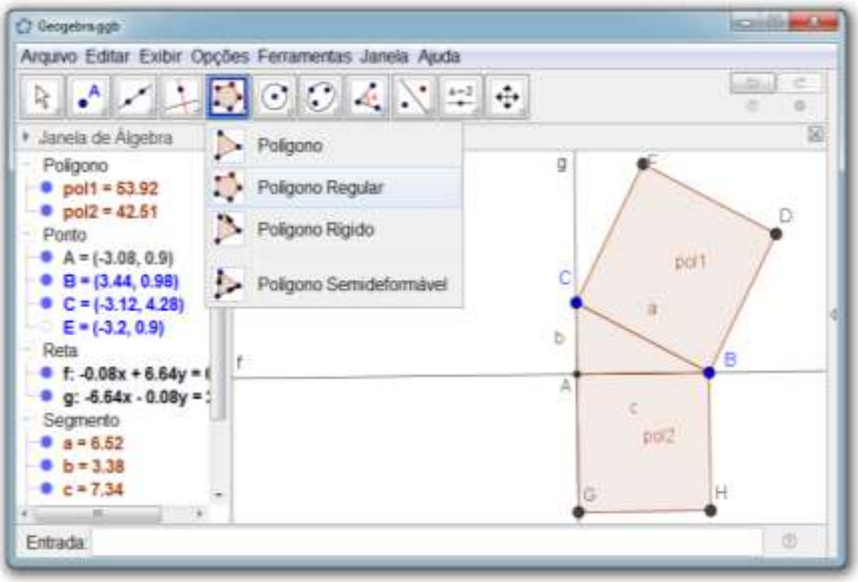
Figura 49 – Inserindo um quadrado sobre o lado “a” do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

7. **Inserindo um polígono sobre o lado “c” do triângulo:** acesse a ferramenta Polígono Regular, selecione os pontos B e A nessa ordem, e insira um polígono regular com quatro vértices sobre lado “c” do triângulo ABC.

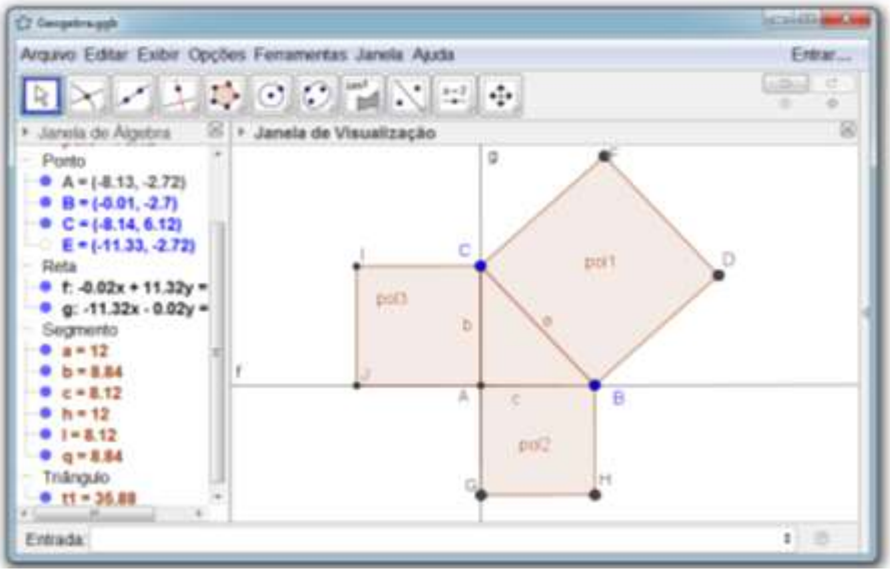
Figura 50 – Inserindo um quadrado sobre o lado “c” do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

8. **Inserindo um polígono sobre o lado "b" do triângulo:** acesse a ferramenta Polígono Regular, selecione os pontos A e C nessa ordem, e insira um polígono regular com quatro vértices sobre lado "b" do triângulo ABC.

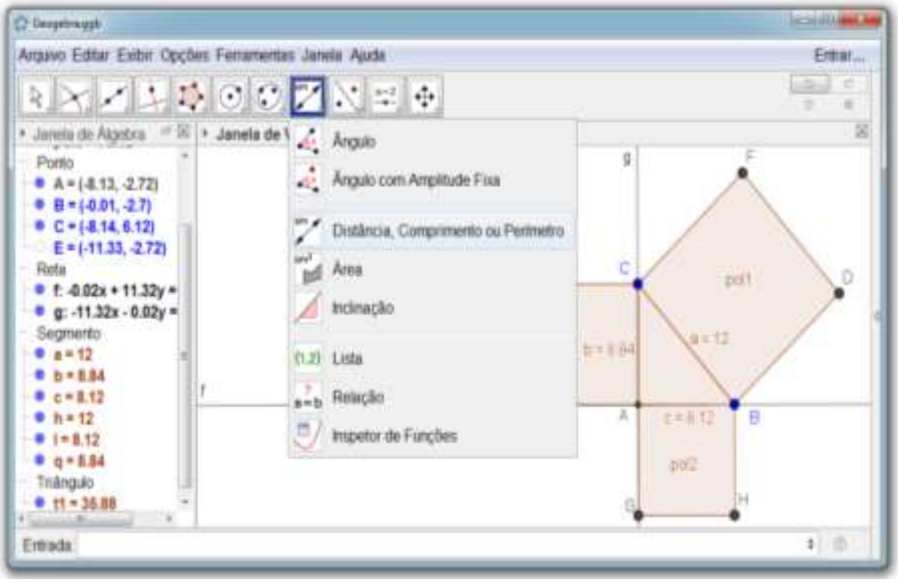
Figura 51 - Inserindo um quadrado sobre o lado "b" do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

9. **Determinando a medida dos lados do triângulo:** Acesse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro e clique sobre os lados a, b e c do triângulo ABC.

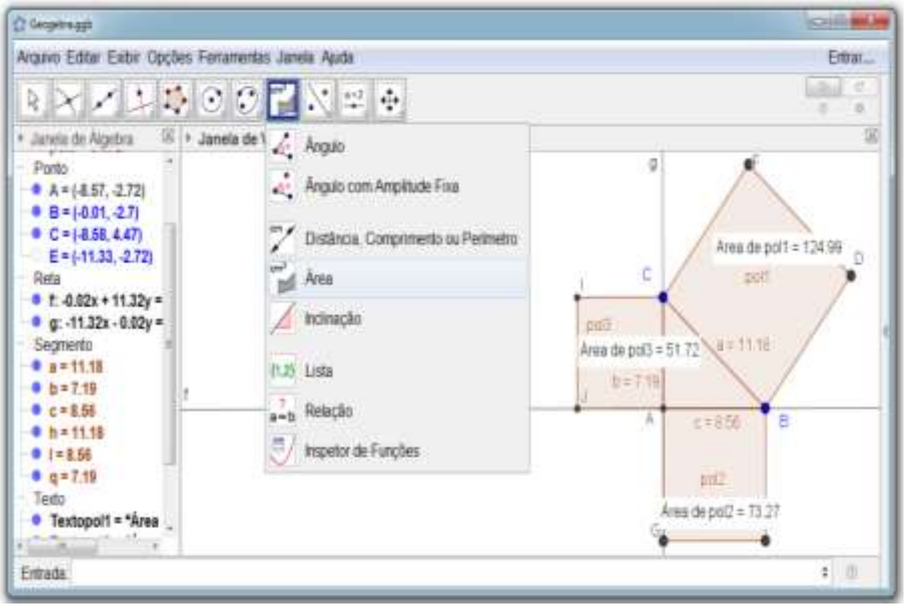
Figura 52 - Determinando a medida dos lados do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

10. **Determinando a medida das áreas dos polígonos 1, 2 e 3:** acesse a ferramenta Área e clique sobre as áreas dos polígonos 1, 2 e 3.

Figura 53 - Determinando a medida das áreas dos polígonos 1, 2 e 3



Fonte: elaboração da autora (2018).

11. Que relações existem entre às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo ABC?

12. Mova o ponto C aumentando e diminuindo o tamanho do triângulo retângulo. As relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo se mantiveram?

13. As relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

14. Construa polígonos regulares de 3, 5 e 6 lados sobre os lados do triângulo retângulo e responda: é possível afirmar que as relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo são válidas para as áreas de qualquer polígono regular construído sobre os lados do triângulo retângulo? Por quê?

5 TAREFA 3 – FORMALIZANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Quadro 4 – Planejamento da terceira tarefa

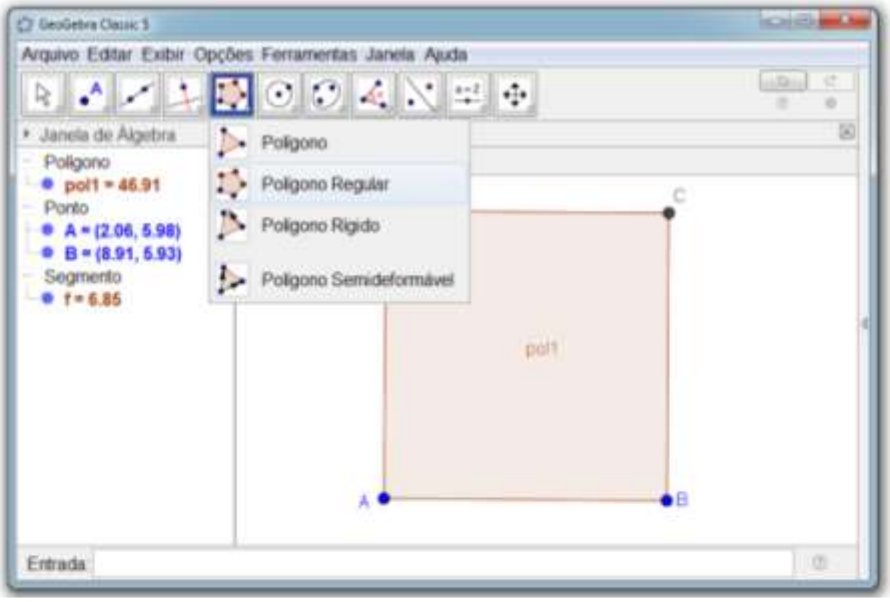
Tarefa 3 – Formalizando o Teorema de Pitágoras	
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos
Conteúdo	Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Formalizar o Teorema de Pitágoras.
Recursos	Tarefa de estudo e *software* Geogebra.
Procedimentos	Construir e investigar uma demonstração do Teorema de Pitágoras.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora (2018).

Espaço para anotações:

1. **Inserindo um polígono regular com quatro vértices:** acesse a ferramenta Polígono Regular, e clique em dois locais da Janela de Visualização para inserir os pontos A e B, em seguida digite o número de vértices.

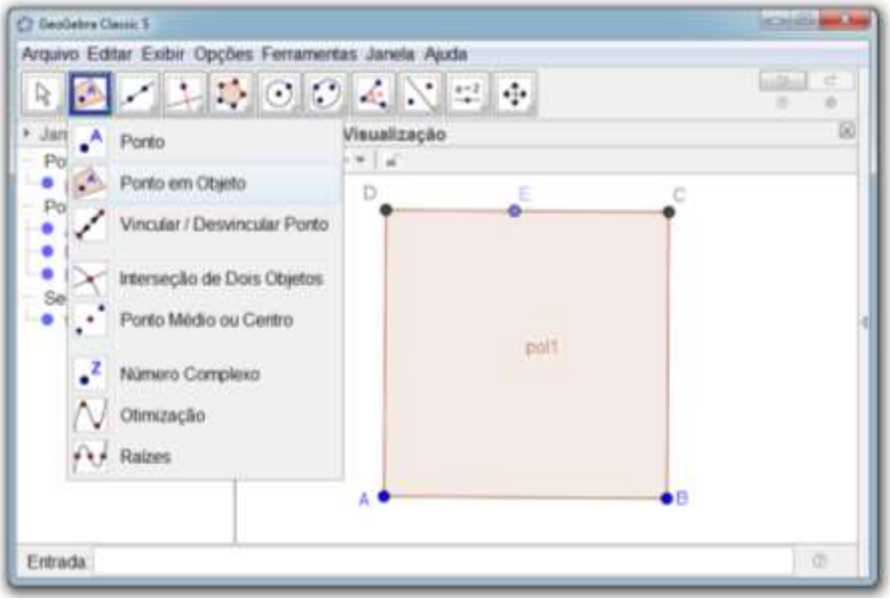
Figura 54 – Inserindo um polígono regular com quatro vértices



Fonte: elaboração da autora (2018).

2. **Inserindo um ponto em objeto:** selecione a ferramenta Ponto em Objeto e insira um ponto E entre os pontos C e D do polígono construído.

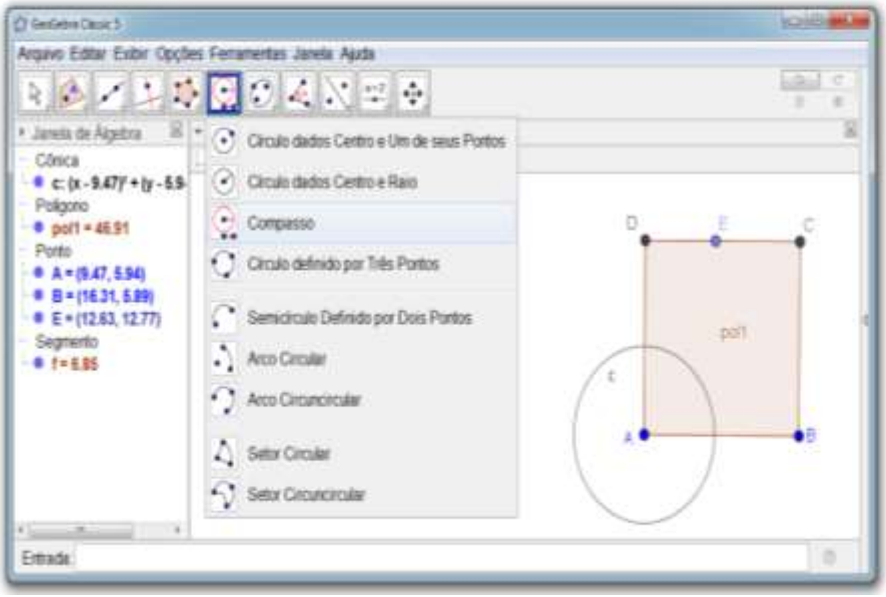
Figura 55 – Inserindo um ponto em objeto



Fonte: elaboração da autora (2018).

3. **Inserindo uma circunferência:** acesse a ferramenta Compasso e clique sobre os pontos D, E e A, nesta ordem.

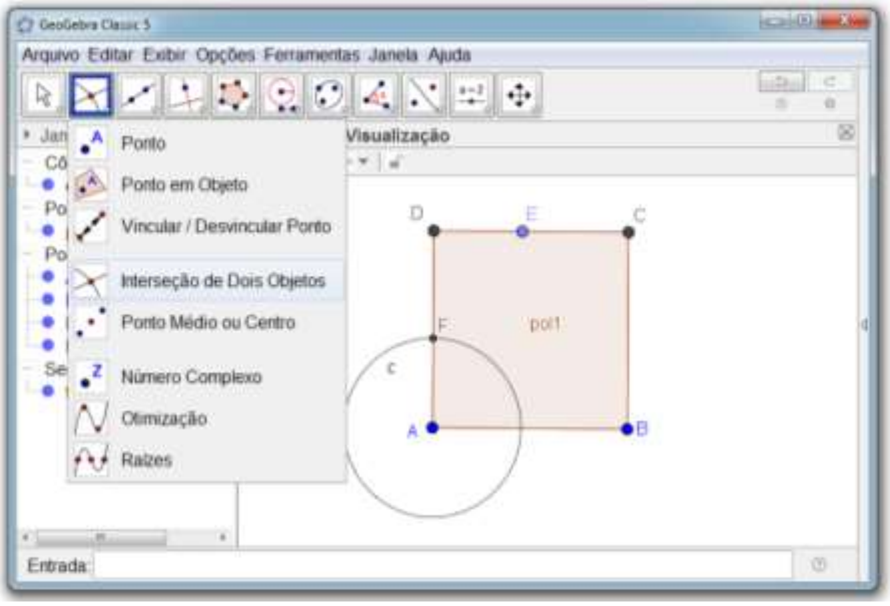
Figura 56 – Inserindo uma circunferência



Fonte: elaboração da autora (2018).

4. **Inserindo um ponto na interseção de dois objetos:** acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecione a circunferência e o segmento AD, será inserido um ponto na interseção da circunferência com o lado AD do polígono.

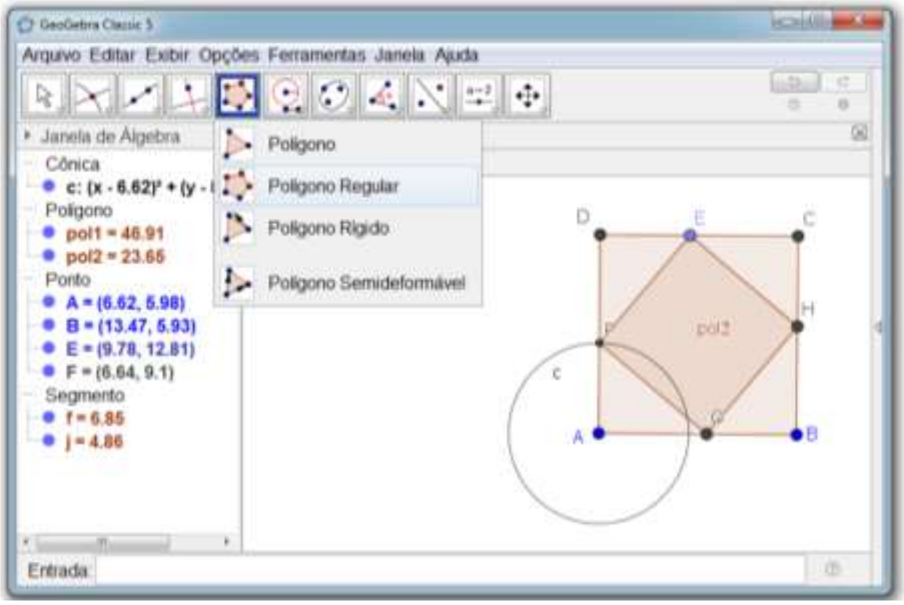
Figura 57 – Inserindo um ponto na interseção de dois objetos



Fonte: elaboração da autora (2018).

5. **Inserindo um polígono regular:** selecione a ferramenta Polígono Regular, e, depois os pontos E e F para inserir um polígono com 4 vértices. Observe que será construído um polígono EFGH, cujos vértices estão sobre os lados do polígono ABCD.

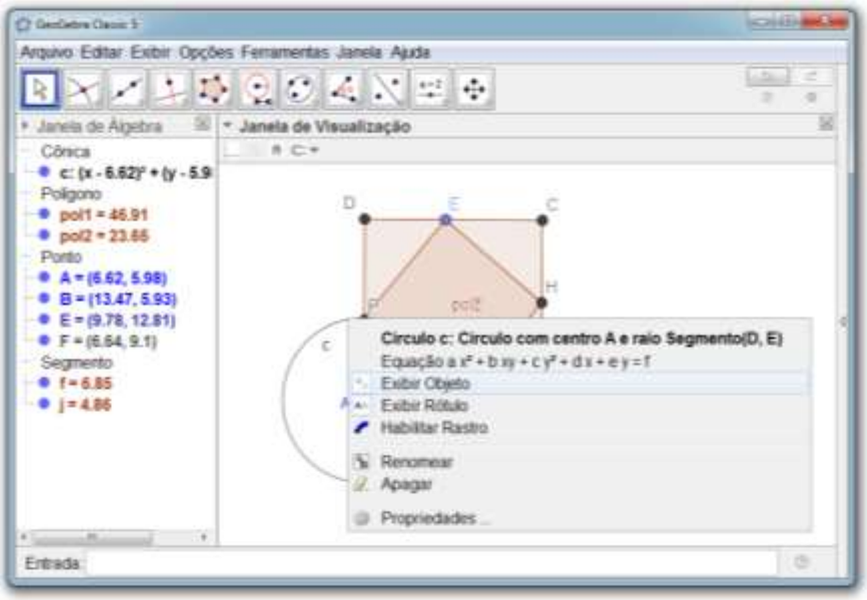
Figura 58 – Inserindo um polígono regular



Fonte: elaboração da autora (2018).

6. **Ocultando a circunferência:** clique com o botão direito do mouse sobre a circunferência e desative a opção Exibir Objeto.

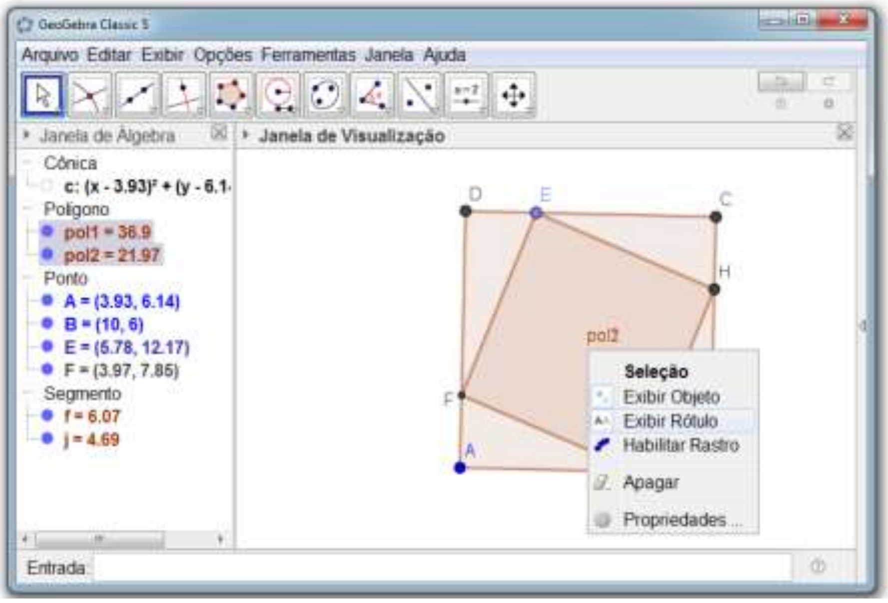
Figura 59 – Ocultando a circunferência



Fonte: elaboração da autora (2018).

7. **Ocultando os rótulos dos polígonos:** clique com o botão direito do mouse sobre os polígonos e selecione a opção Exibir Rótulo para ocultar os rótulos dos polígonos.

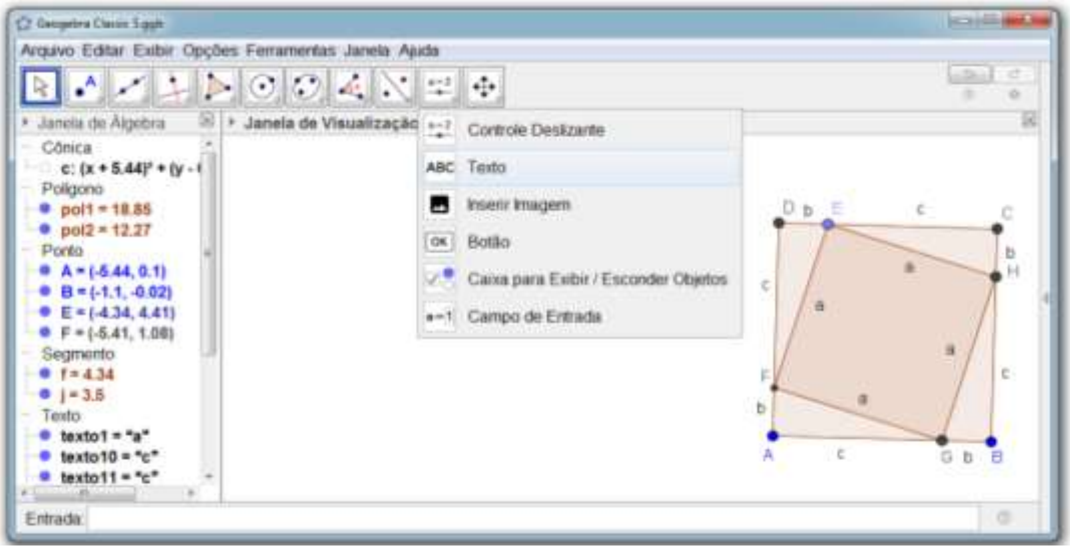
Figura 60 – Ocultando os rótulos dos polígonos



Fonte: elaboração da autora (2018).

8. **Nomeando os lados dos polígonos:** selecione a ferramenta Texto e nomeie os lados dos polígonos conforme apresentado na figura 60.

Figura 61 – Nomeando os lados dos polígonos



Fonte: elaboração da autora (2018).

9. Agora responda:

a) Quantos polígonos são apresentados na construção?

b) Descreva como podemos calcular a área de cada polígono apresentado na construção.

O objetivo nesta tarefa é formalizar o Teorema de Pitágoras. Espera-se que os alunos por meio de investigações consigam calcular a área do polígono ABCD adicionando a área do polígono EFGH à área dos quadros triângulos retângulos formados pelos polígonos ABCD e EFGH e elevando ao quadrado o lado do polígono ABCD. A demonstração investigada possibilita validar o Teorema de Pitágoras para todos os triângulos retângulos, conforme apresentado a seguir.

Determinando a área do polígono ABCD:

A área do polígono ABCD pode ser obtida adicionando a área do quadrado EFGH à área dos quatro triângulos retângulos $a^2 + 4.\frac{bc}{2}$ ou elevando ao quadrado a medida do lado do polígono ABCD $(b+c)^2$. Dessa maneira tem-se que:

$$a^2 + 4.\frac{bc}{2} = (b+c)^2$$
$$a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

A relação $a^2 = b^2 + c^2$ apresentada pelo Teorema de Pitágoras descreve que em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. A demonstração investigada nesta tarefa foi proposta por Pitágoras para validar o Teorema de Pitágoras.

6 TAREFA 4: APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS I

Quadro 5 – Planejamento da quarta tarefa

Tarefa 4 – Aplicação do Teorema de Pitágoras I	
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos.
Conteúdo	Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de situações-problema.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar situações propostas e aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução dos problemas.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora.

O Teorema de Pitágoras permite que se obtenha a medida desconhecida de um dos lados de um triângulo retângulo dado as medidas dos outros dois lados. De acordo com o teorema de Pitágoras em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

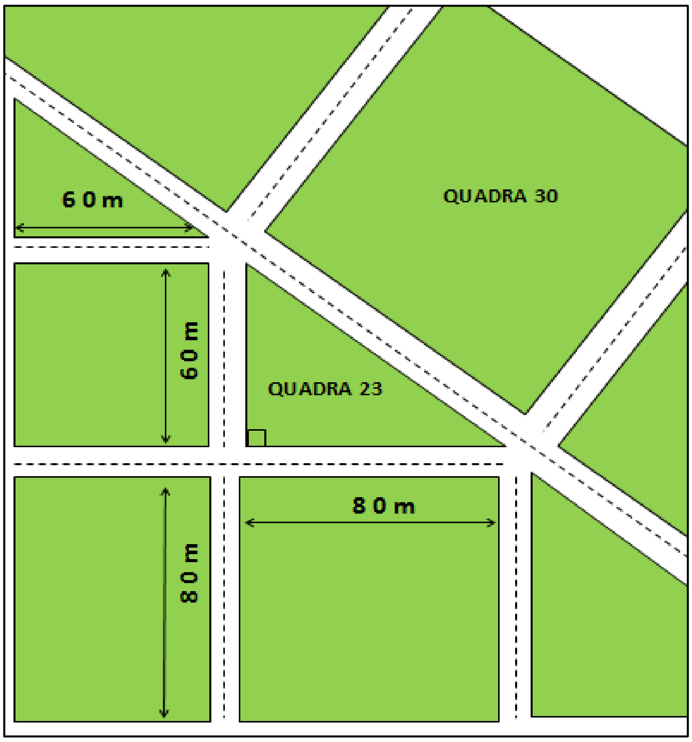
$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

$$\mathbf{(hipotenusa)^2 = (cateto)^2 + (cateto)^2}$$

Situações-problema

1. Qual a área da quadra 30 sabendo que a mesma tem o formato de um polígono regular com comprimento igual ao lado maior da quadra 23?

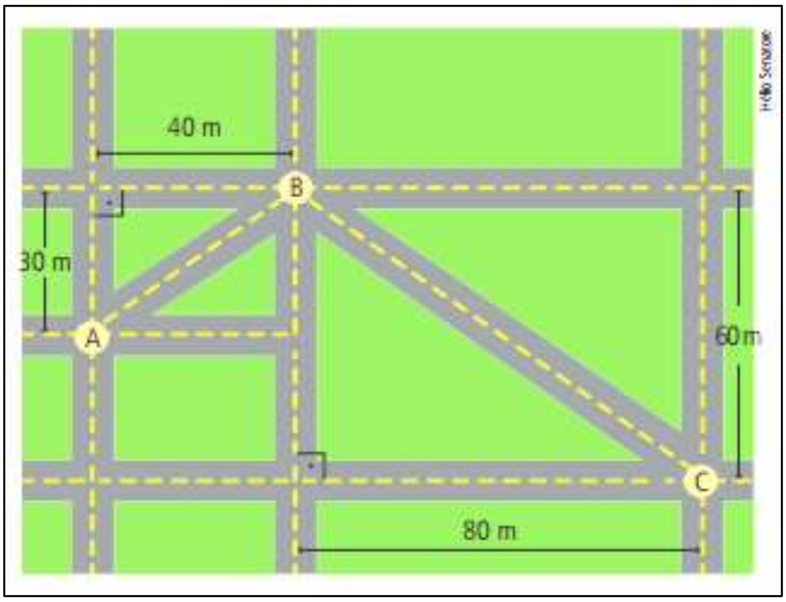
Figura 62 – Tarefa 4: ilustração da questão 1



Fonte: elaboração da autora (2018).

2. (Andrini e Vasconcellos, 2015, p. 191) Uma pessoa percorre a trajetória de A até C, passando por B. Qual foi a distância percorrida?

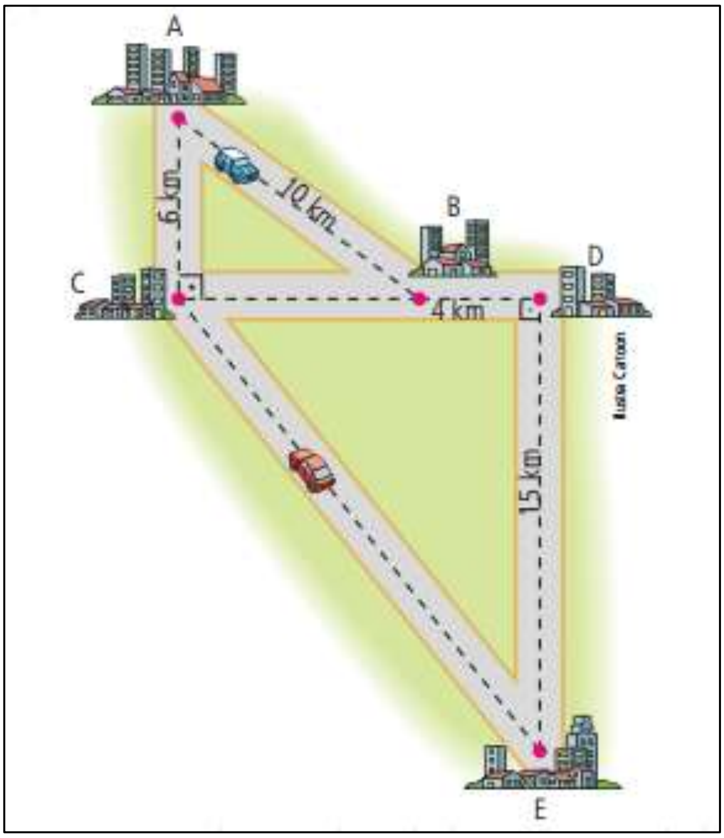
Figura 63 – Tarefa 4: ilustração da questão 2



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 191).

3. (Andrini e Vasconcellos, 2012, 197 - adaptada) Um carro parte da cidade A para a cidade C, passando por B. Um outro carro parte da cidade E igualmente para a cidade C, mas com o trajeto direto. Considere que os carros se deslocam à mesma velocidade. Qual dos carros chegará primeiro á cidade C?

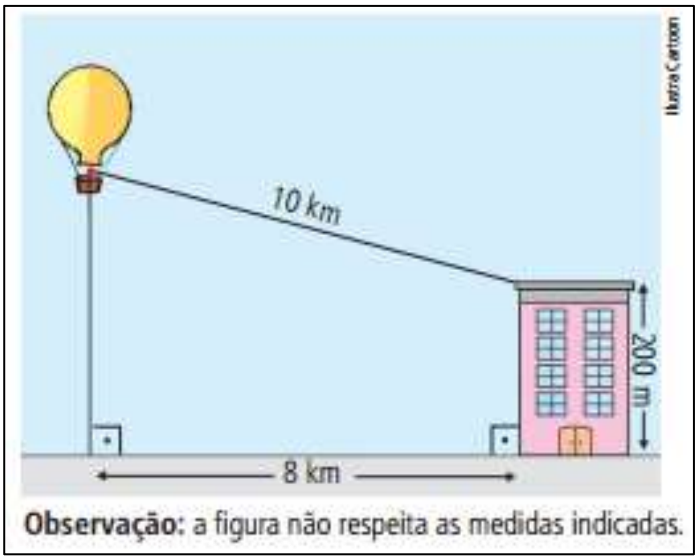
Figura 64 – Tarefa 4: ilustração da questão 3



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 197).

4. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 202 - adaptada) A que altura do chão está o balão apresentado na figura abaixo?

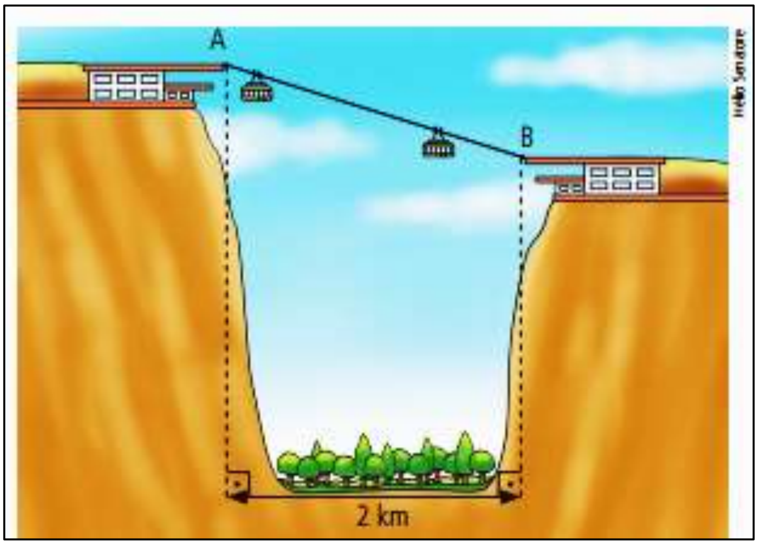
Figura 65 – Tarefa 4: ilustração da questão 4



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 202).

5. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 200 - adaptada) Na figura abaixo a altura da montanha A é 2800m, da montanha B 2200m, a distância entre as duas montanhas 2 km, qual o comprimento do cabo de teleférico?

Figura 66 – Tarefa 4: ilustração da questão 5



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 200).

7 TAREFA 5 - APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS II

Quadro 6 – Planejamento da quinta tarefa

Tarefa 5 - Aplicação do Teorema de Pitágoras II	
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos.
Conteúdo	Teorema de Pitágoras.
Objeto Geral	Aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução de situações-problema.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos e aplicar o Teorema de Pitágoras na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

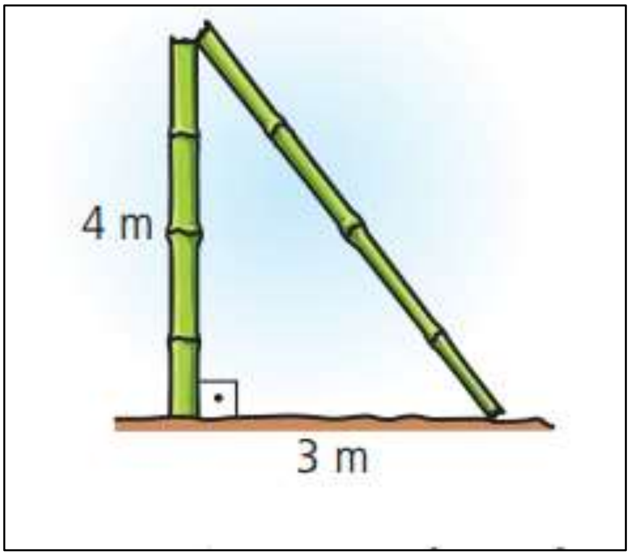
Fonte: elaboração da autora (2018).

Espaço para anotações:

Situações-problema

1. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 202) Um bambu partiu-se a uma altura de 4 m do chão, e a parte de cima, ao cair, tocou o chão, a uma distância de 3 m da base do bambu. Qual era a altura do bambu antes de partir-se?

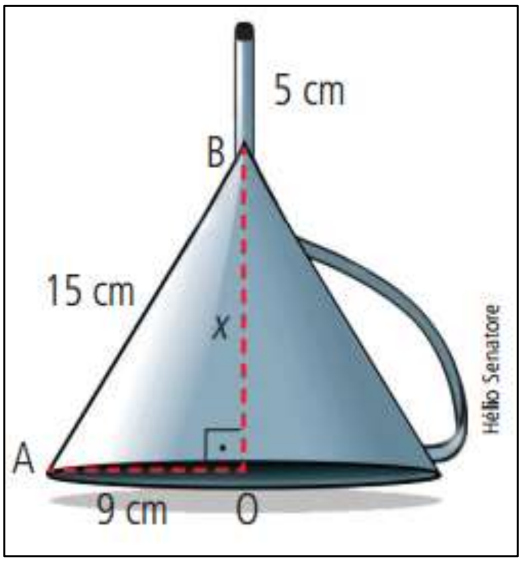
Figura 67 – Tarefa 5: ilustração da questão 1



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 202).

2. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 198) Qual é a altura do funil representado pela figura?

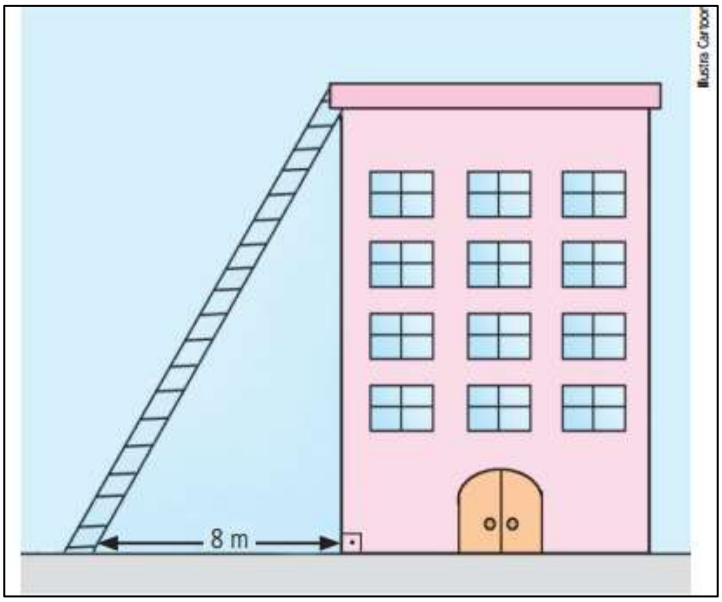
Figura 68 – Tarefa 5: ilustração da questão 2



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 198).

3. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 188) A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura. Qual é o comprimento da escada que está encostada na parte superior do prédio?

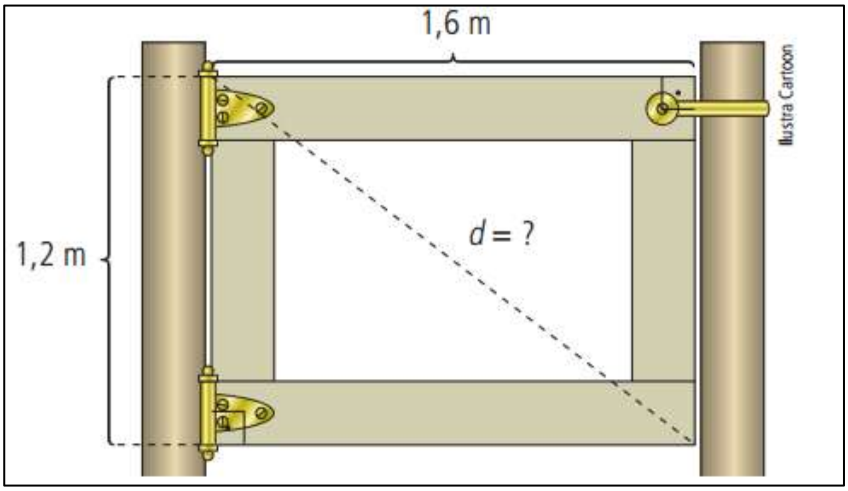
Figura 69 – Tarefa 5: ilustração da questão 3



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 188).

4. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 198) Um fazendeiro quer colocar uma tábua em diagonal na sua porteira. Qual é o comprimento dessa tábua, se a folha da porteira mede 1,2 m por 1,6 m?

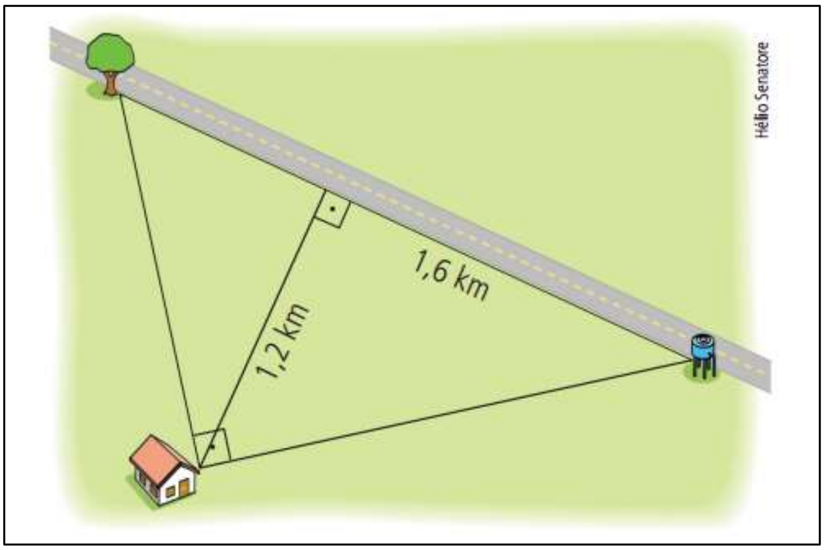
Figura 70 – Tarefa 5: ilustração da questão 4



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 198).

5. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 197 - adaptada) Na figura abaixo, a distância da casa à estrada é 1,2 km. Qual a distância da casa à caixa d'água?

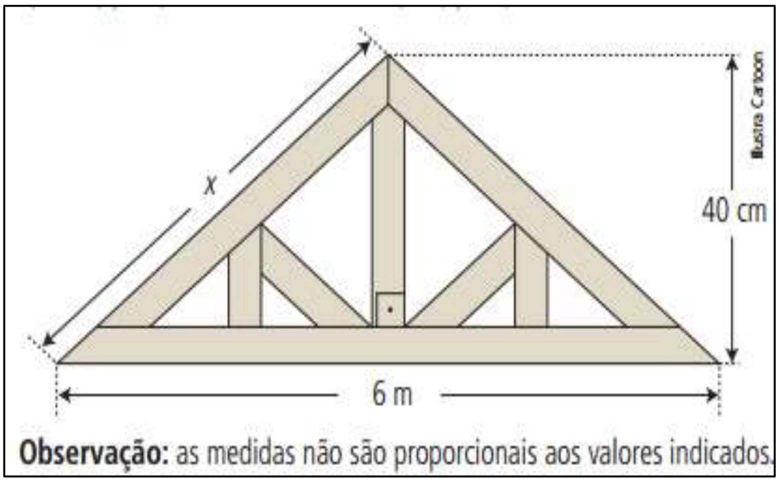
Figura 71 – Tarefa 5: ilustração da questão 5



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 197).

6. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 198) Calcule o comprimento x nesta estrutura de telhado, que tem a forma de triângulo isósceles.

Figura 72 – Tarefa 5: ilustração da questão 6



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 198).

8 TAREFA 6 – INVESTIGANDO RELAÇÕES ENTRE ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Quadro 7 – Planejamento da sexta tarefa

Tarefa 6 – Investigando relações entre elementos de um triângulo retângulo	
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos.
Conteúdo	Triângulo retângulo, hipotenusa, cateto oposto e adjacente.
Objeto Geral	Reconhecer os lados de um triângulo retângulo como hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente.
Recursos	*Software* Geogebra e tarefa de estudo.
Procedimentos	Construir um triângulo retângulo, determinar as medidas de seus ângulos e lados, anotar as medidas da hipotenusa e dos catetos. Investigar as relações entre os catetos oposto e adjacente.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora.

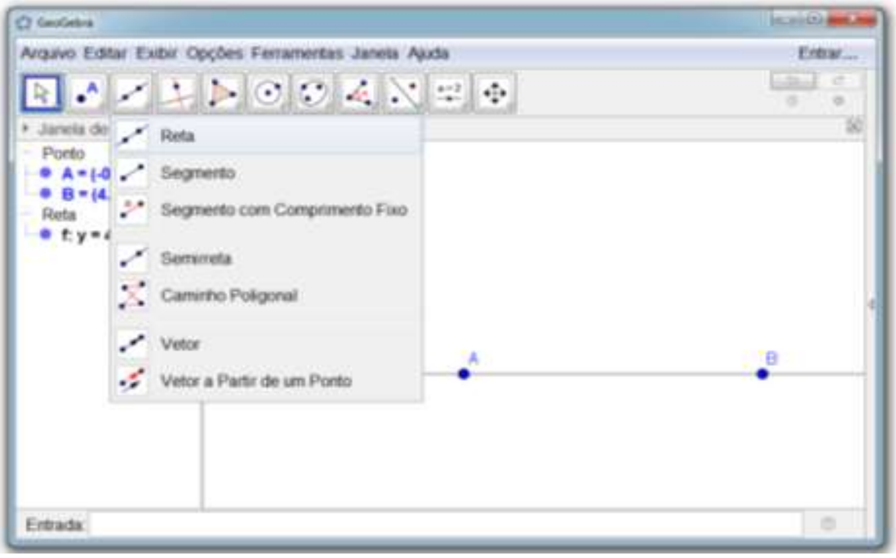
ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Os lados de um triângulo retângulo são denominados de hipotenusa e catetos. **Hipotenusa** é o lado oposto ao ângulo de 90º (ângulo reto). Os lados que formam o ângulo reto são os catetos. Os catetos podem ser adjacentes ou opostos dependendo de sua posição em relação aos ângulos agudos. **Cateto oposto** é o lado que fica oposto ao ângulo agudo analisado, **cateto adjacente** é o lado que forma com a hipotenusa o ângulo agudo.

Etapas da tarefa:

1. **Inserindo uma reta:** acesse a ferramenta Reta e selecione duas posições da Janela de Visualização.

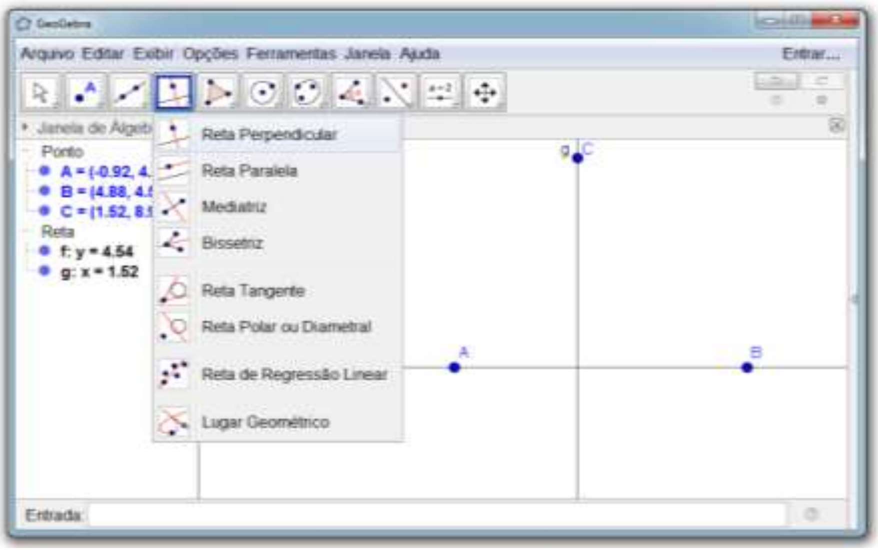
Figura 73 – Inserindo uma reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

2. **Inserindo uma reta perpendicular:** acesse a ferramenta Reta Perpendicular, insira um ponto C e depois selecione o segmento de reta AB.

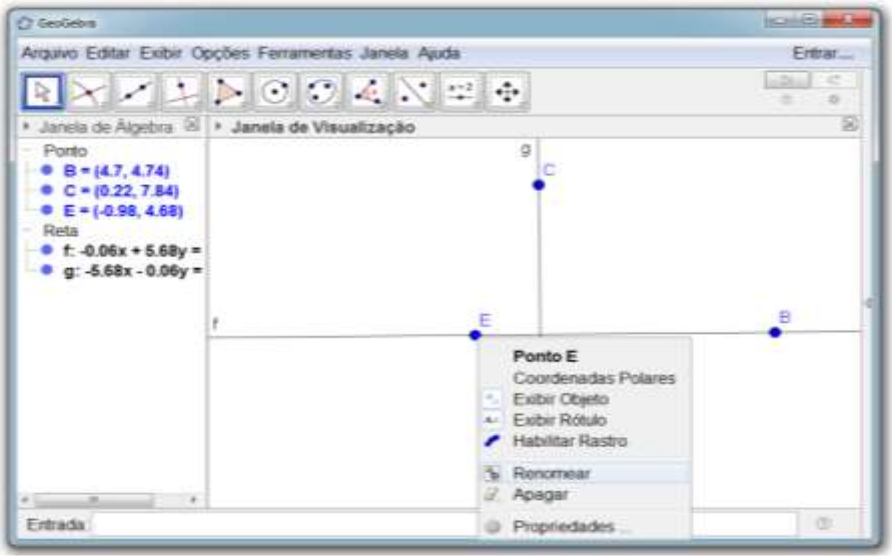
Figura 74 – Inserindo uma reta perpendicular



Fonte: elaboração da autora (2018).

3. **Renomeando o ponto A:** selecione o ponto A com o botão direito do mouse, acesse a ferramenta renomear e altere seu rótulo para E.

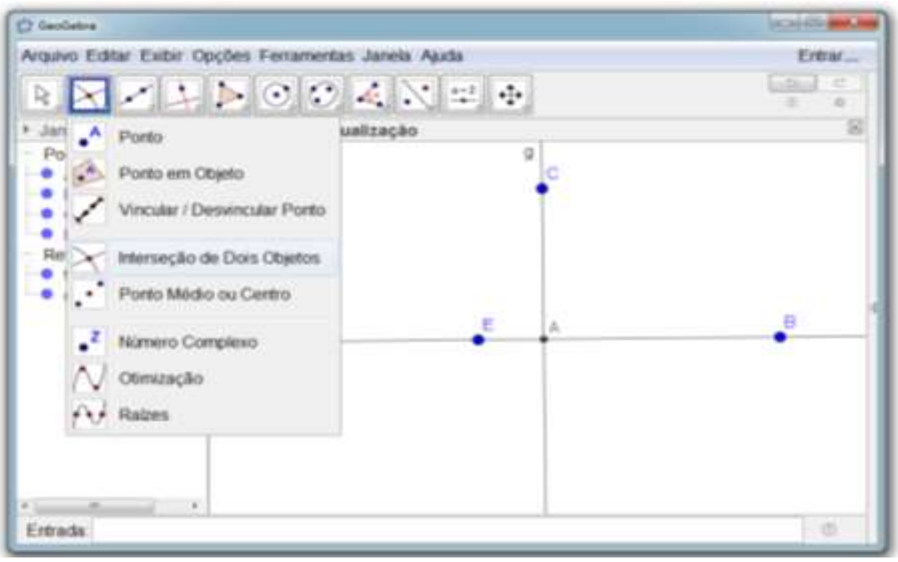
Figura 75 – Renomeando o ponto A



Fonte: elaboração da autora (2018).

4. **Inserido um ponto de interseção:** acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecione as retas f e g.

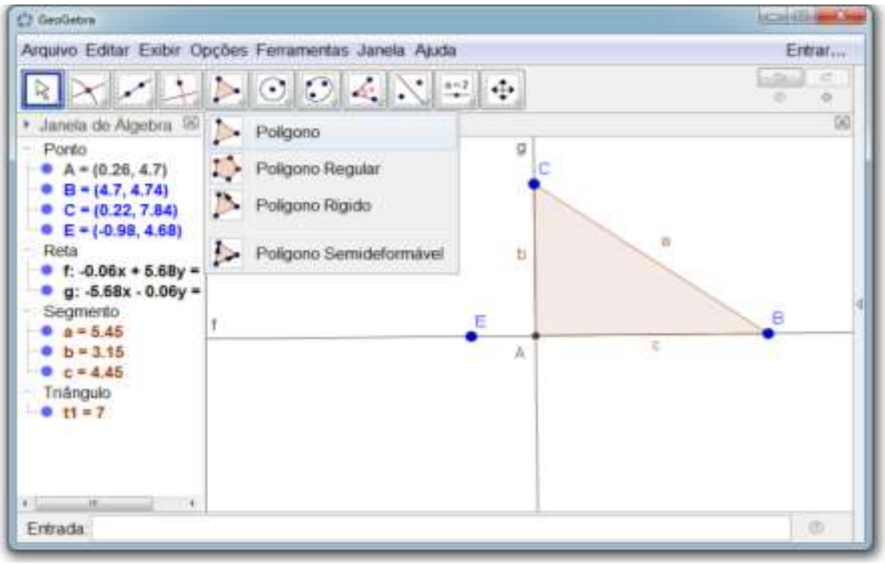
Figura 76 – Inserido um ponto de interseção



Fonte: elaboração da autora (2018).

5. **Inserindo um polígono:** acesse a ferramenta Polígono, selecione os pontos A, B e C, e então, o ponto A novamente.

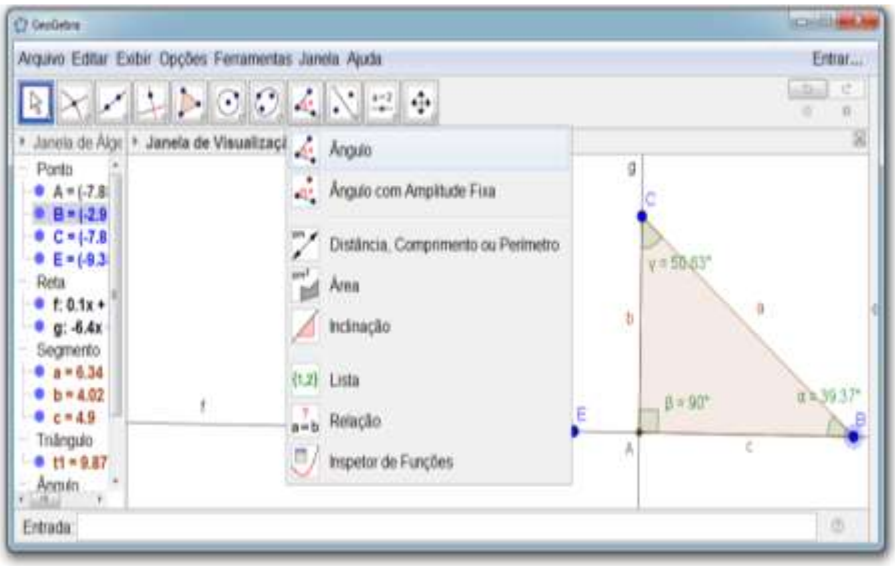
Figura 77 – Inserido um ponto de interseção



Fonte: elaboração da autora (2018).

6. **Determinando a amplitude (medida) dos ângulos internos do triângulo:** acesse a ferramenta Ângulo, selecione os pontos BAC, nessa ordem, em seguida repita o procedimento para os pontos ACB, e CBA.

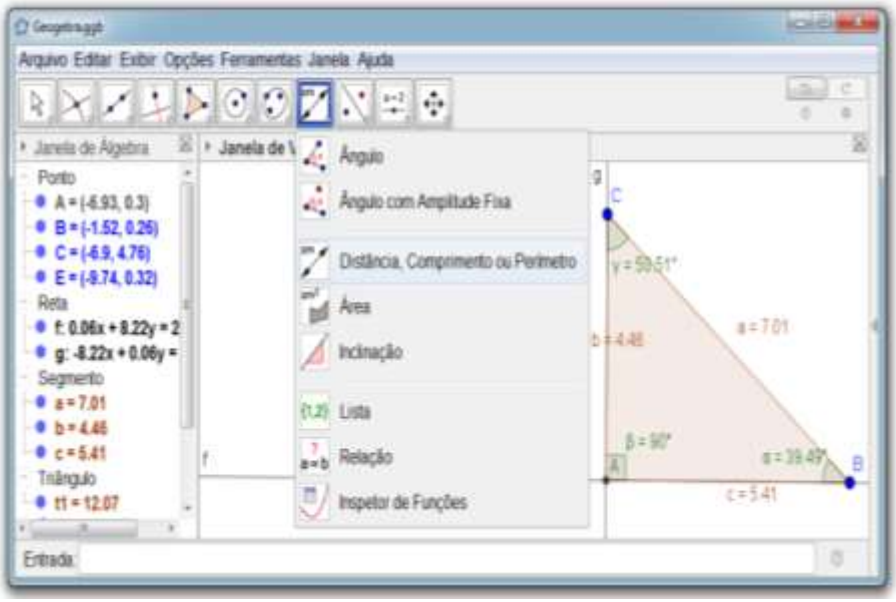
Figura 78 - determinando a amplitude dos ângulos internos do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

7. **Determinando a medida dos lados do triângulo:** acesse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, selecione os segmentos de reta e determine a medida de todos os lados do triângulo ABC.

Figura 79 - Determinando a medida dos lados do triângulo



Fonte: elaboração da autora (2018).

8. Preencha a tabela com a medida da hipotenusa, do cateto oposto e do cateto adjacente dos ângulos agudos γ e α.

Medida dos catetos adjacentes, catetos opostos e hipotenusa do triângulo ABC			
Ângulos agudos	Hipotenusa	Cateto adjacente	Cateto oposto
γ			
α			

9. Que relações podem ser observadas entre as medidas da hipotenusa, dos catetos adjacente e oposto dos ângulos γ e α?

10. Mova o ponto C aumentando e diminuindo o tamanho do triângulo retângulo, e preecha a tabela com a medida da hipotenusa, do cateto oposto e do cateto adjacente dos ângulos agudos γ e α.

Medida dos catetos adjacentes, catetos opostos e hipotenusa do triângulo ABC			
Ângulos agudos	Hipotenusa	Cateto adjacente	Cateto oposto
γ			
α			

11. Agora reponda: as relações obeservadas entre as medidas da hipotenusa, dos catetos adjacente e oposto dos ângulos γ e α se mantiveram?

12. Por meio das investigações realizadas é possível afirmar que a relação entre a hipotenusa, os catetos adjacente e oposto dos ângulos γ e α é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Porque?

9 TAREFA 7 – INVESTIGANDO RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS SEMELHANTES

Quadro 8 – Planejamento da sétima tarefa

Tarefa 07 – Investigando razões trigonométricas em triângulos retângulos semelhantes	
Carga horária	4 horas-aula de 50 minutos.
Conteúdo	Semelhança entre triângulos retângulos, razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Reconhecer as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente a partir de investigações em triângulos retângulos semelhantes.
Recursos	*Software* Geogebra e tarefa de estudo.
Procedimentos	Construir triângulos retângulos semelhantes a partir de semirretas, retas perpendiculares e pontos, determinar as medidas dos lados, e a amplitude dos ângulos do triângulo ADF. Calcular as razões entre os lados do triângulo ADF. Investigar as relações entre as razões dos triângulos construídos.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

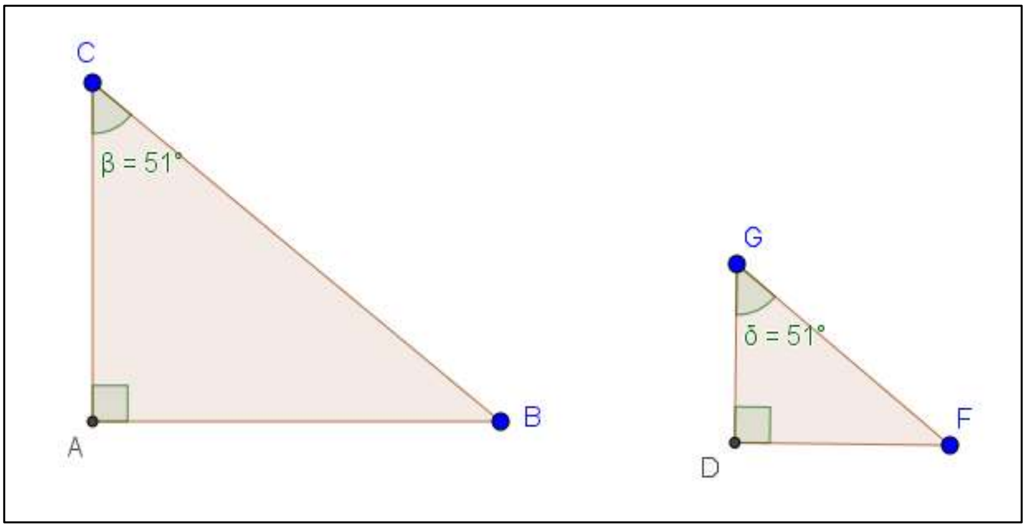
Fonte: elaboração da autora.

A Trigonometria "trata da obtenção de medidas de ângulos e lados de triângulos e tem inúmeras aplicações, além de permitir que se calculem distâncias inacessíveis com muita praticidade" (MOTA, *et. al.*, 2013, p. 75). A trigonometria pode ter surgido a partir do estudo dos ângulos de um triângulo, o Papiro de Rhind, documento egípcio de cerca de 1650 a. C, e as tábuas babilônicas apresentam problemas relacionados à trigonometria (SOUZA; PATARO, 2013). Determinar com certeza quando e onde a trigonometria surgiu não é simples, mas é certo que "a necessidade de evoluir na Agrimensura, Navegação e Astronomia foram fatores que impulsionaram o estudo trigonométrico" (BARRETO FILHO; SILVA, 2009, p. 10).

Razões trigonométricas

Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, os dois triângulos são semelhantes.

Figura 80 – Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: elaboração da autora (2018).

Em todos os triângulos retângulos semelhantes à razão entre a medida do cateto oposto de um ângulo agudo e a medida da hipotenusa será sempre constante. Essa razão constante é chamada de seno do ângulo.

Considerando os triângulos ABC e DFG, tem-se que:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DF}{FG}=\frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}=sen(51°)$$

Da semelhança de triângulos, tem-se outra razão constante, chamada de cosseno de um ângulo, que é a razão entre a medida do cateto adjacente do ângulo agudo e a medida da hipotenusa.

Assim considerando os triângulos ABC e DFG, tem-se que:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DG}{FG} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \cos(51°)$$

Outra razão constante entre triângulos semelhantes é a razão entre o cateto oposto de um ângulo agudo e o cateto adjacente deste mesmo ângulo, chamada de tangente do ângulo.

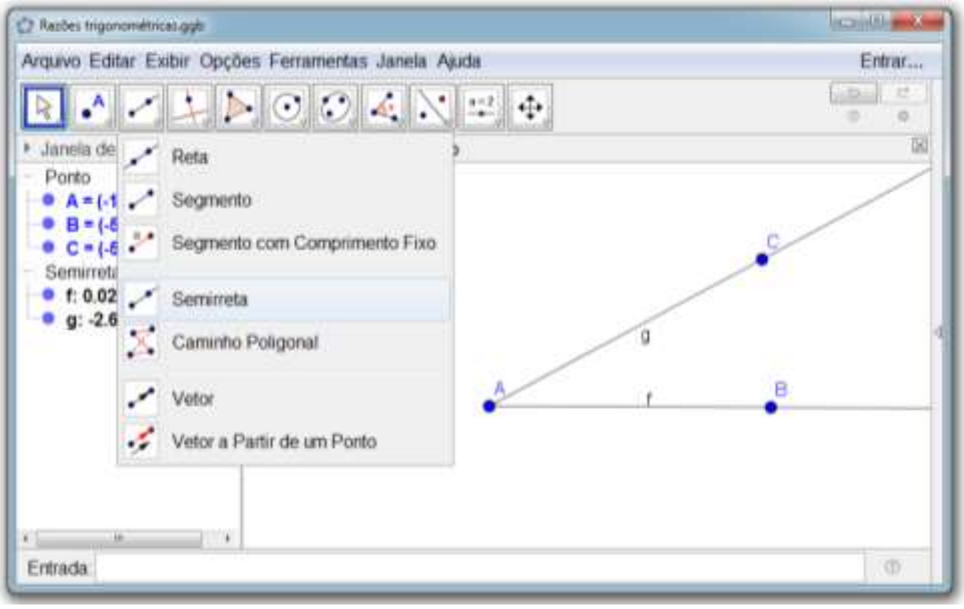
Portanto considerando os triângulos ABC e DFG, tem-se que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DF}{DG} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = tg(51°)$$

Etapas da tarefa:

1. **Inserindo semirretas:** acesse a ferramenta Semirreta e insira duas semirretas com origem no ponto A.

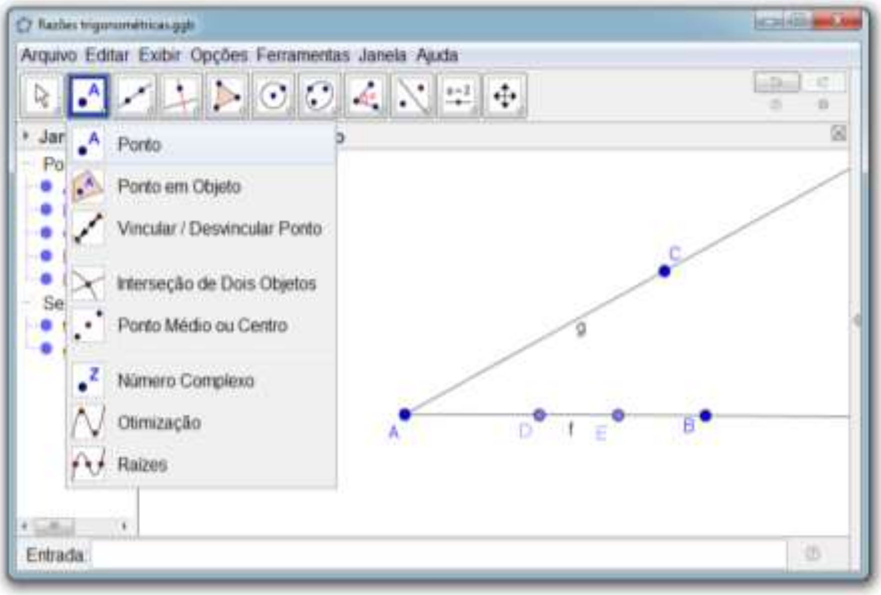
Figura 81 - Inserindo semirretas



Fonte: elaboração da autora (2018).

2. **Inserindo os pontos D e E:** acesse a ferramenta Ponto e insira dois pontos sobre o seguimento de reta AB.

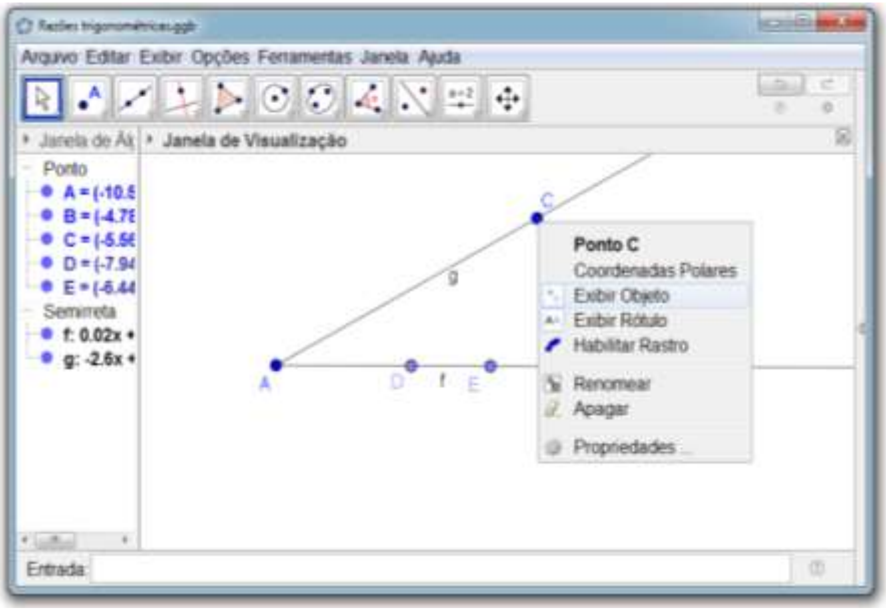
Figura 82 - Inserindo os pontos D e E



Fonte: elaboração da autora (2018).

3. **Ocultando o ponto C:** acesse a ferramenta Exibir objeto e oculte o ponto C.

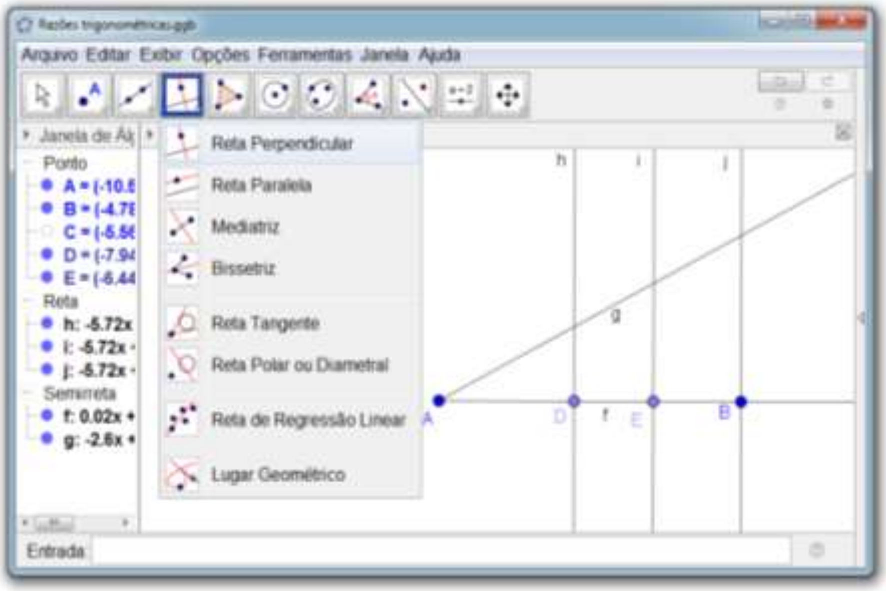
Figura 83 - Ocultando o ponto C



Fonte: elaboração da autora (2018).

4. **Inserindo retas perpendiculares à reta f:** acesse a ferramenta Reta Perpendicular e insira três retas perpendiculares à semirreta f, passando pelos pontos D, E e B.

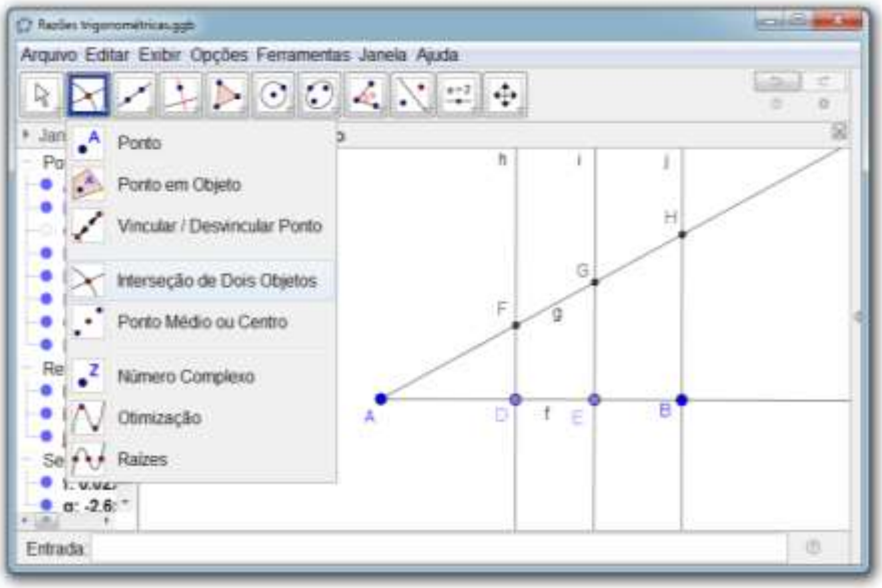
Figura 84 - Inserindo retas perpendiculares à reta f



Fonte: elaboração da autora (2018).

5. **Marcando a interseção entre retas:** acesse a ferramenta Interseção de Dois Objetos e marque as interseções entre a semirreta g e as retas F, G e H.

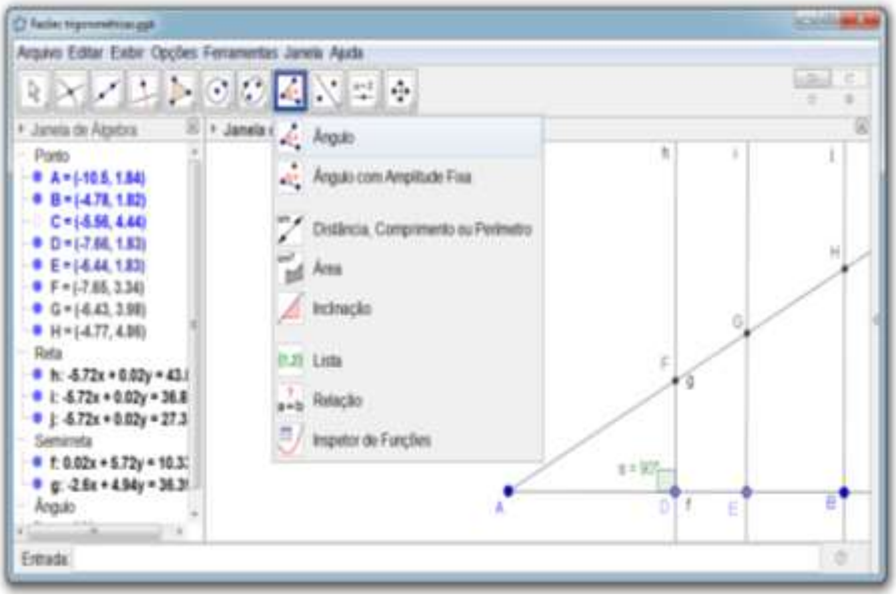
Figura 85 – Marcando a interseção entre retas



Fonte: elaboração da autora (2018).

6. **Determinando o ângulo reto do triângulo ADF**: acesse a ferramenta Ângulo e determine o ângulo reto do triângulo ADF.

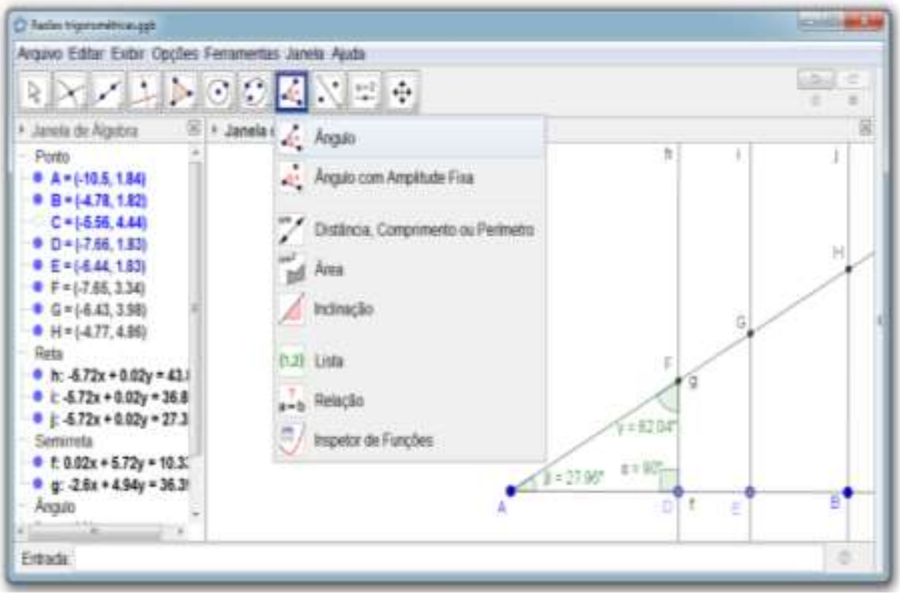
Figura 86 – Determinando o ângulo reto do triângulo ADF



Fonte: elaboração da autora (2018).

7. **Determinando os ângulos agudos do triângulo ADF:** acesse a ferramenta Ângulo determine os ângulos agudos do triângulo ADF

. **Figura 87 – Determinando os ângulos agudos do triângulo ADF**

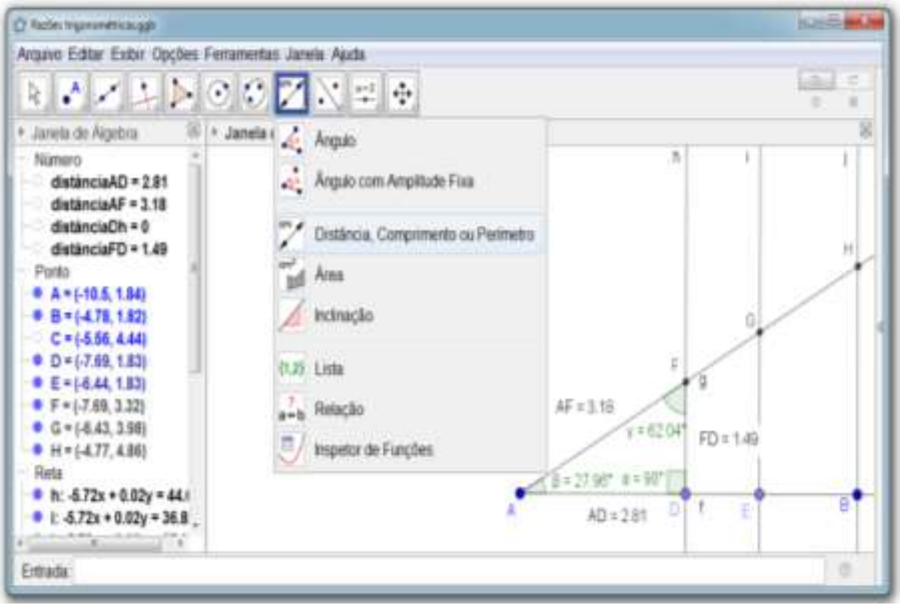


Fonte: elaboração da autora (2018).

8. Mova o ponto D, e responda: o que pode ser observado em relação às medidas dos ângulos internos dos triângulos ADF, AEG e ABH?

9. **Determinando a medidas dos lados do triângulo ADF:** acesse a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro determine as medidas dos lados AD, AF e DF.

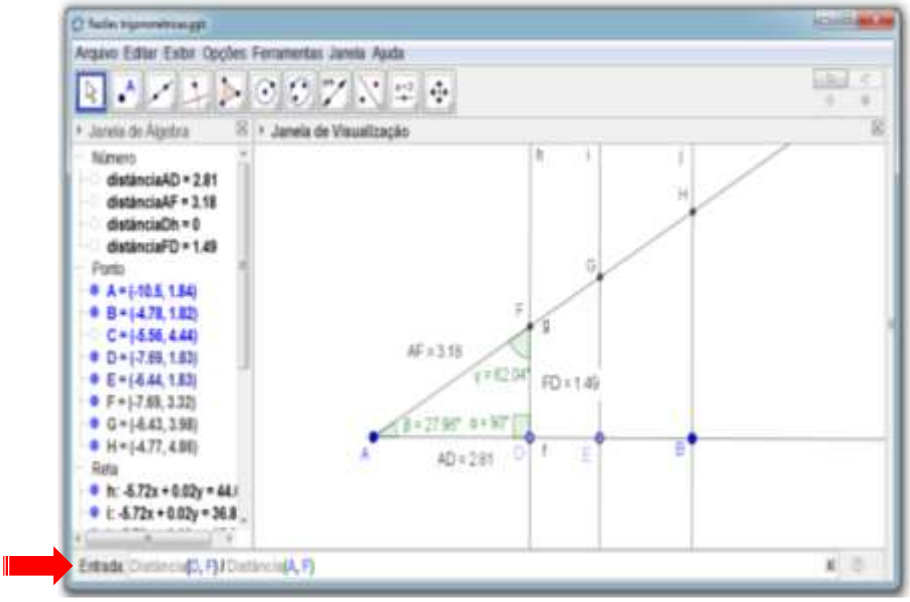
Figura 88 – Determinando a medidas dos lados do triângulo ADF



Fonte: elaboração da autora (2018).

10. Determinando a razão DF/AF: na caixa de entrada digite Distância (D, F) / Distância (A, F).

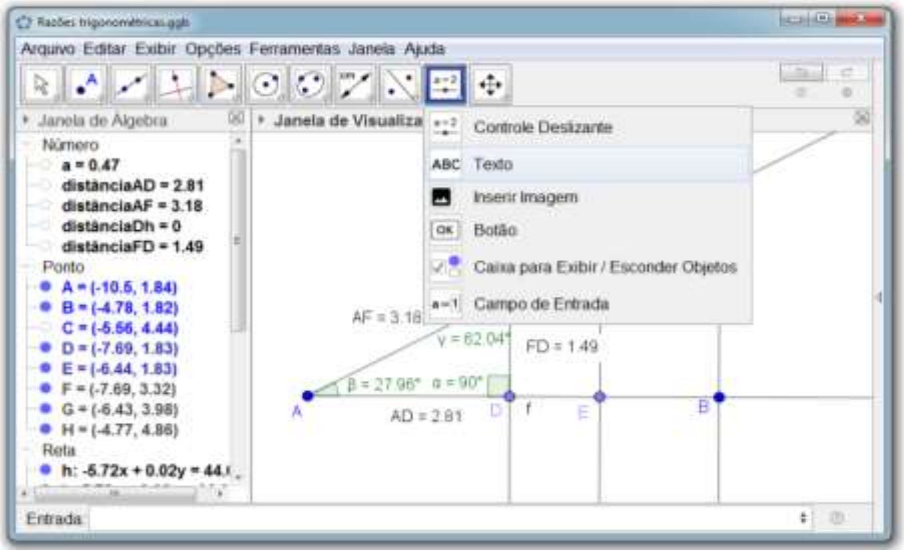
Figura 89 – Determinando a razão DF/AF



Fonte: elaboração da autora (2018).

11. Inserindo texto na Janela de Visualização: acesse a ferramenta Texto e digite \frac{DF}{AF}=

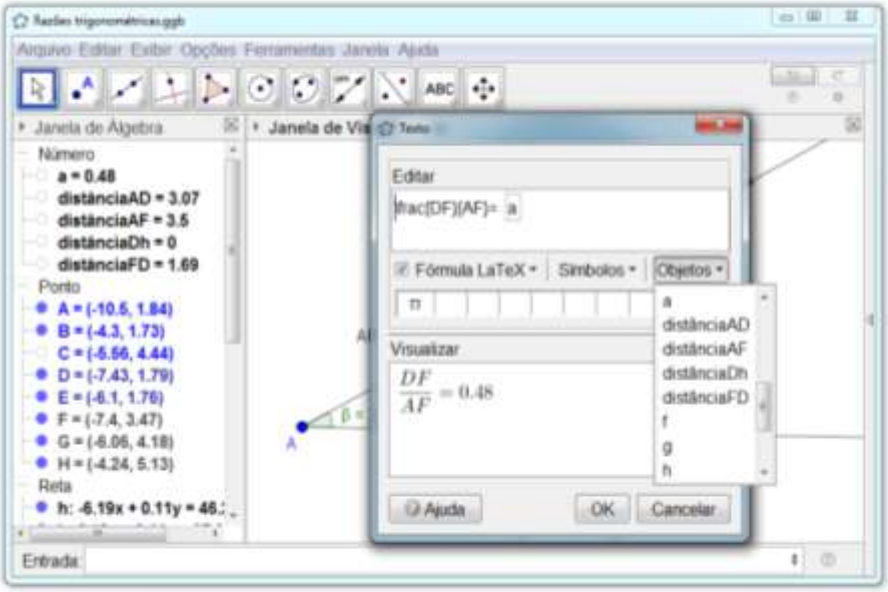
Figura 90 – Inserindo a razão DF/AF na Janela de Visualização



Fonte: elaboração da autora (2018).

12. Selecionando o objeto *a*: na opção Objetos selecione o objeto ***a*** que corresponde a media da razão entre DF e AF, clique no botão OK.

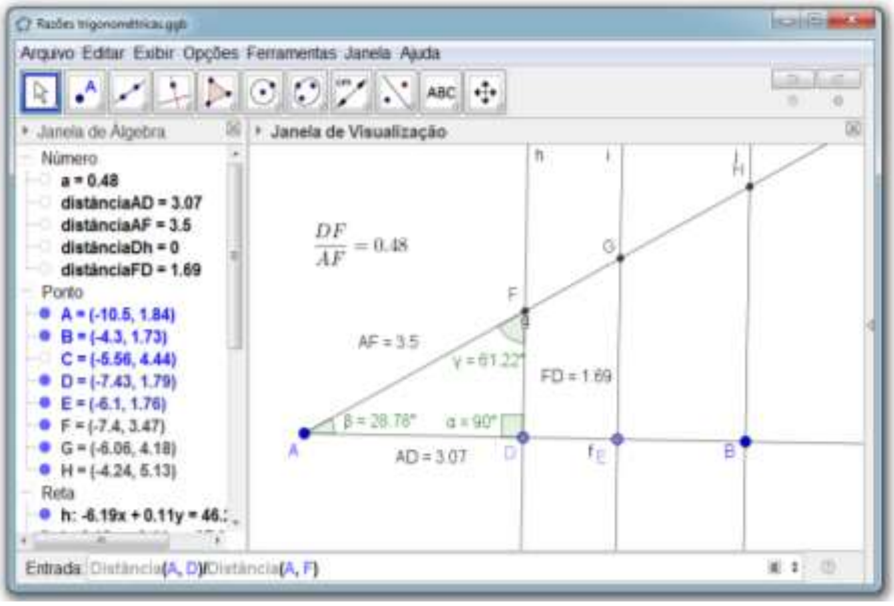
Figura 91 – Selecionando o objeto *a*



Fonte: elaboração da autora (2018).

13. Observe que a razão será inserida na Janela de Visualização, conforme apresentado na figura 90.

Figura 92 – Razão DF/AF inserida na Janela de Visualização



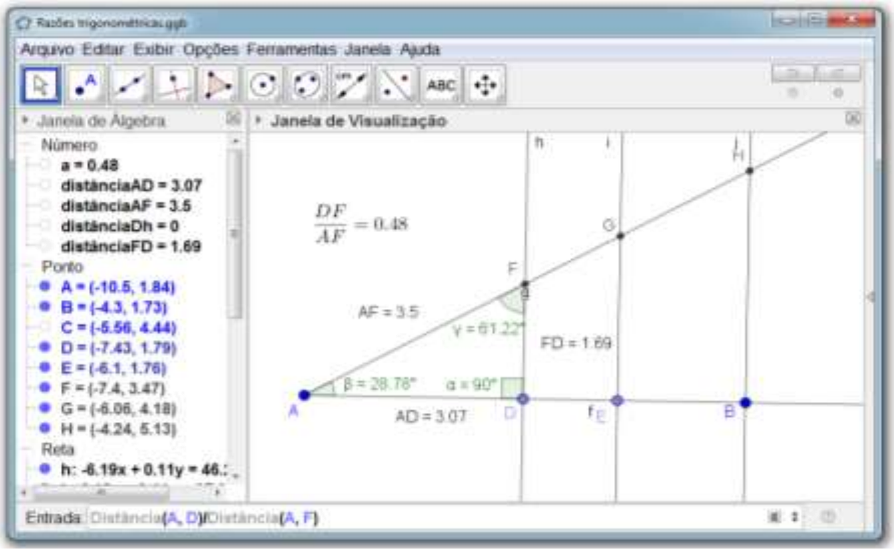
Fonte: elaboração da autora (2018).

14. Mova o ponto D e responda: o que pode ser observado em relação às medidas das razões DF/AF do triângulo ADF, EG/AG do triângulo AEG e BH/AH do triângulo ABH?

15. A medida das razões entre DF/AF do triângulo ADF, EG/AG do triângulo AEG e BH/AH do triângulo ABH é chamada de seno do ângulo β. A partir das investigações é possível afirmar que a medida do seno do ângulo β é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

16. Determinando a razão AD/AF: caixa de entrada digite Distância (A, D) / Distância (A, F).

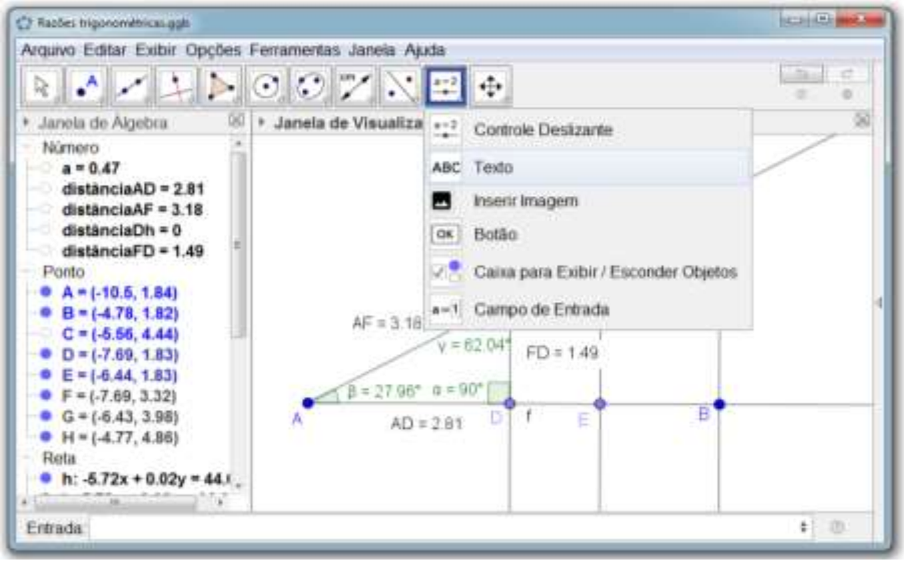
Figura 93 – Determinando a razão AD/AF



Fonte: elaboração da autora (2018).

17. **Inserindo texto na Janela de Visualização:** acesse a ferramenta Texto e digite \frac{AD}{AF}=

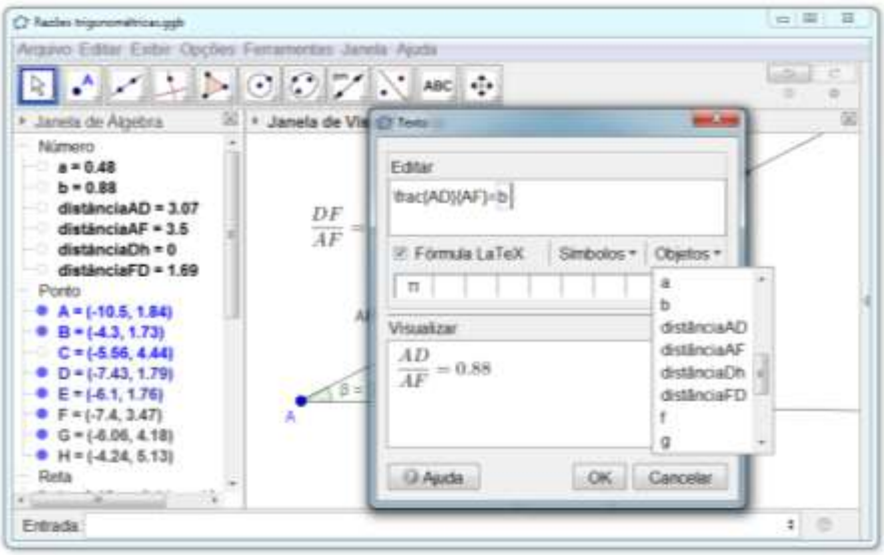
Figura 94 – Inserindo a razão AD/AF na Janela de Visualização



Fonte: elaboração da autora (2018).

18. **Selecionando o objeto *b*:** na opção Objetos selecione o objeto ***b*** que corresponde a media da razão entre AD e AF, clique no botão OK.

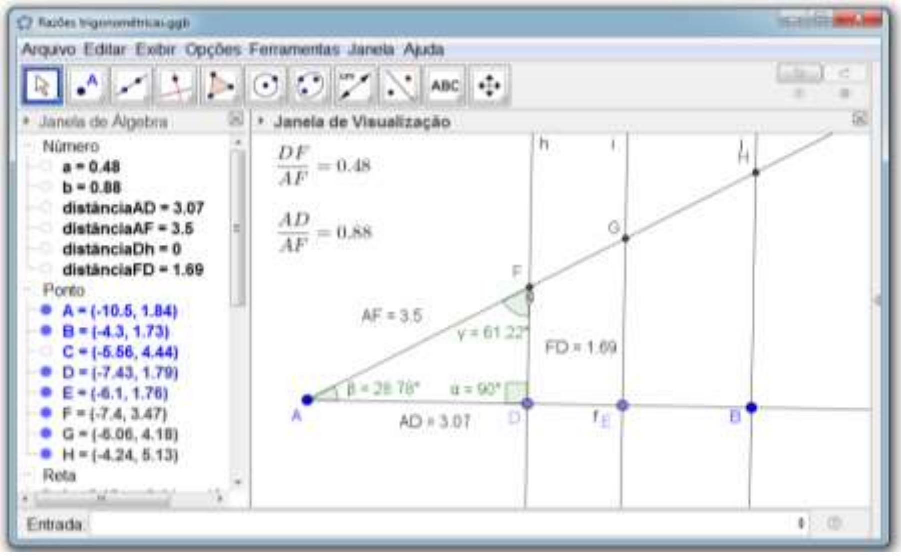
Figura 95 – Selecionando o objeto *b*



Fonte: elaboração da autora (2018).

19. Observe que a razão será inserida na Janela de Visualização, conforme apresentado na figura 94.

Figura 96 – Razão AD/AF inserida na Janela de Visualização



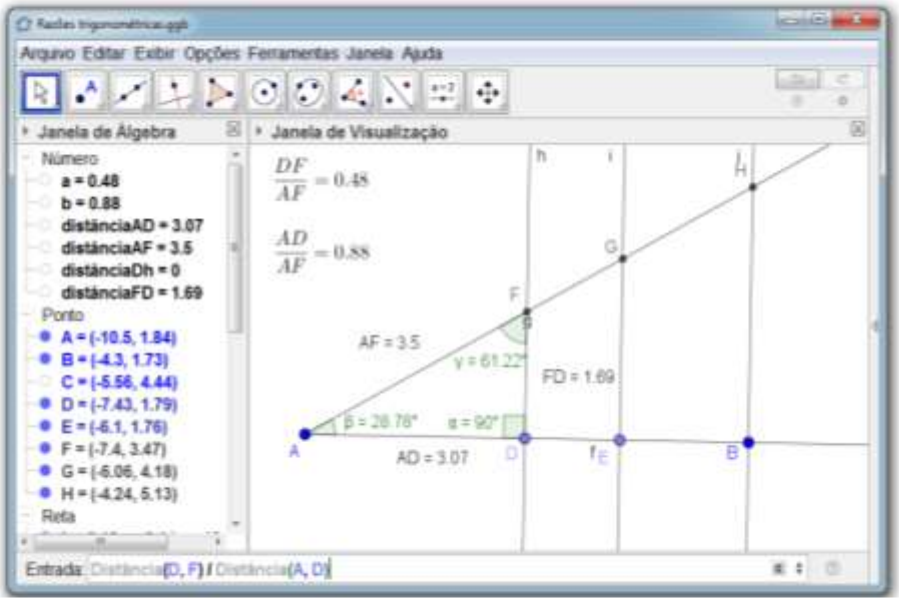
Fonte: elaboração da autora (2018).

20. Mova o ponto D e responda: o que pode ser observado em relação às medidas das razões AD/AF do triângulo ADF se mantém nas razões AE/AG do triângulo AEG e AB/AH do triângulo ABH?

21. A medida das razões entre AD/AF do triângulo ADF, AE/AG do triângulo AEG e AB/AH do triângulo ABH é chamada de cosseno do ângulo β. A partir das investigações e possível afirmar que a medida do cosseno do ângulo β é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

22. Determinando a razão DF/AF: na caixa de entrada digite Distância (D, F) / Distância (A, D).

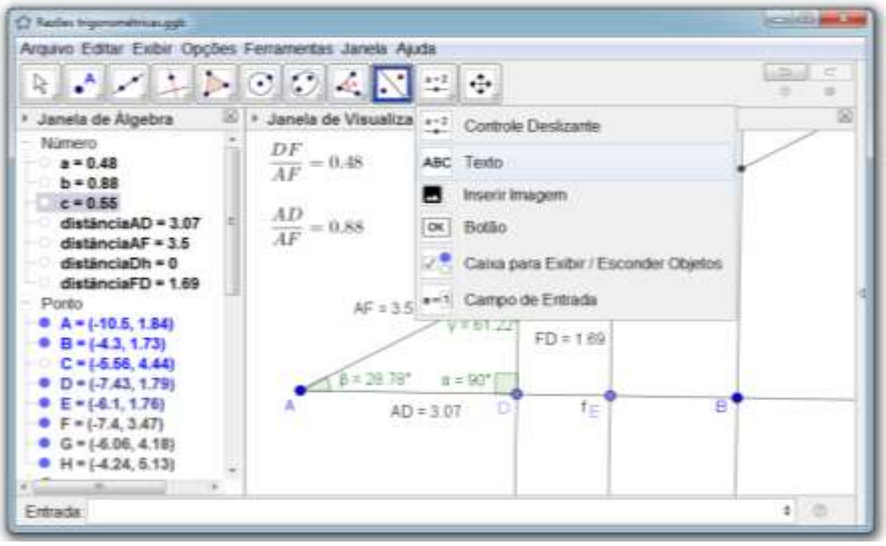
Figura 97 – Determinando a razão DF/AD



Fonte: elaboração da autora (2018).

23. Inserindo texto na Janela de Visualização: acesse a ferramenta Texto e digite \frac{DF}{AD}=

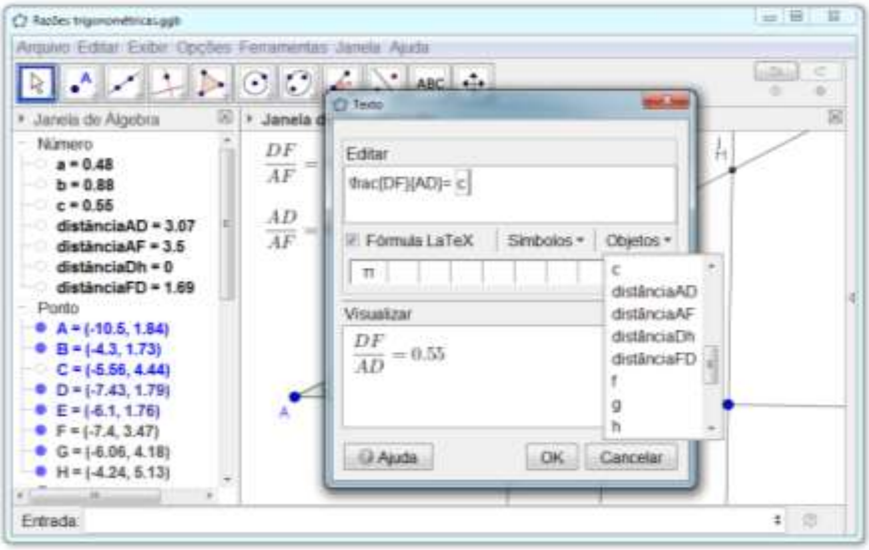
Figura 98 – Inserindo a razão DF/AD na Janela de Visualização



Fonte: elaboração da autora (2018).

24. **Selecionando o objeto *c*:** na opção Objetos selecione o objeto ***c*** que corresponde a media da razão entre DF e AD, clique no botão OK.

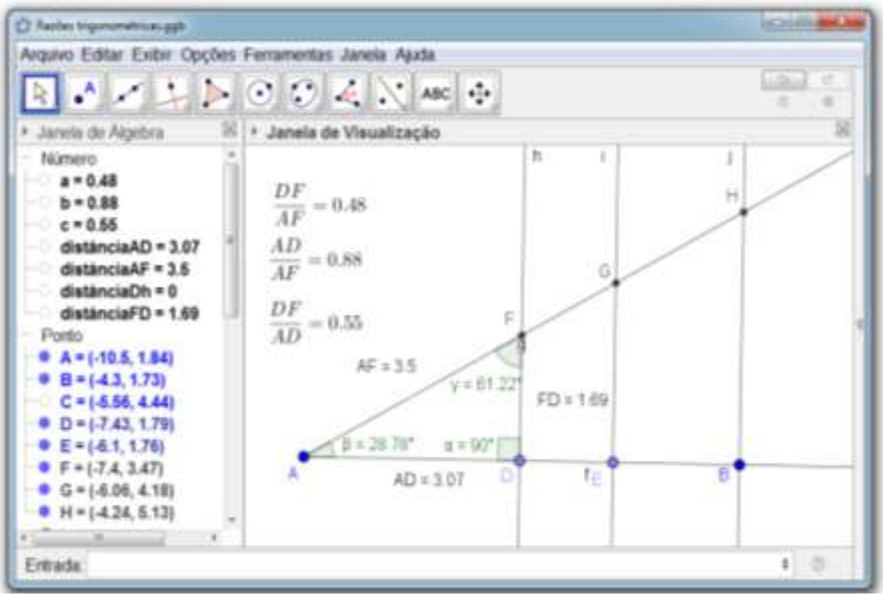
Figura 99 – Selecionando o objeto *c*



Fonte: elaboração da autora (2018).

25. Observe que a razão DF/AD será inserida na Janela de Visualização, conforme apresentado na figura 98.

Figura 100 – Razão DF/AD inserida na Janela de Visualização



Fonte: elaboração da autora (2018).

26. Mova o ponto D e responda: o que pode ser observado em relação às medidas das razões DF/AD do triângulo ADF se mantém nas razões EG/AE do triângulo AEG e BH/AB do triângulo ABH?

27. A medida das razões entre DF/AD do triângulo ADF, EG/AE do triângulo AEG e BH/AB do triângulo ABH é chamada de tangente do ângulo β. A partir das investigações pode-se afirmar que a medida da tangente do ângulo β é válida para qualquer tamanho de triângulo retângulo? Por quê?

10 TAREFA 8 - RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DO ÂNGULO DE 45º

Quadro 10 – Planejamento da oitava tarefa

Tarefa 8 – Razões trigonométricas do ângulo de 45º	
Carga horária	2 horas-aula de 50 minutos.
Conteúdo	Razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo de 45º.
Objeto Geral	Investigar como obter os valores das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo de 45º.
Recursos	Tarefa de estudo e *software* Geogebra.
Procedimentos	Construir figuras geométricas, descrever como obter a medida da diagonal ***d***, e as medidas das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo de 45º do polígono ABC, anotar os resultados na tabela, investigar quais relações existem entre os valores das razões trigonométricas e responder se as mesmas relações podem ser observadas no triângulo ADC.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora (2018).

Os ângulos de 30º, 45º e 60º são considerados notáveis, "pois costumam aparecer com frequência no estudo da Trigonometria" (SOUZA, 2013, p. 272), e "possuem propriedades que facilitam os cálculos" (PITOMBEIRA, 2004, p. 274).

A partir de demonstrações com triângulos retângulos, obtidos a partir de figuras geométricas, como o quadrado e o triângulo equilátero, podemos encontrar os valores para as razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

As razões trigonométricas originaram-se da necessidade de solucionar problemas de cálculo de distâncias e alturas (MOTA, *et. al*, 2013). Seno, cosseno e tangente são razões trigonométricas fundamentais, que resultam de relações entre lados de um triângulo retângulo, considerando seus ângulos.

O seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa do triângulo retângulo.

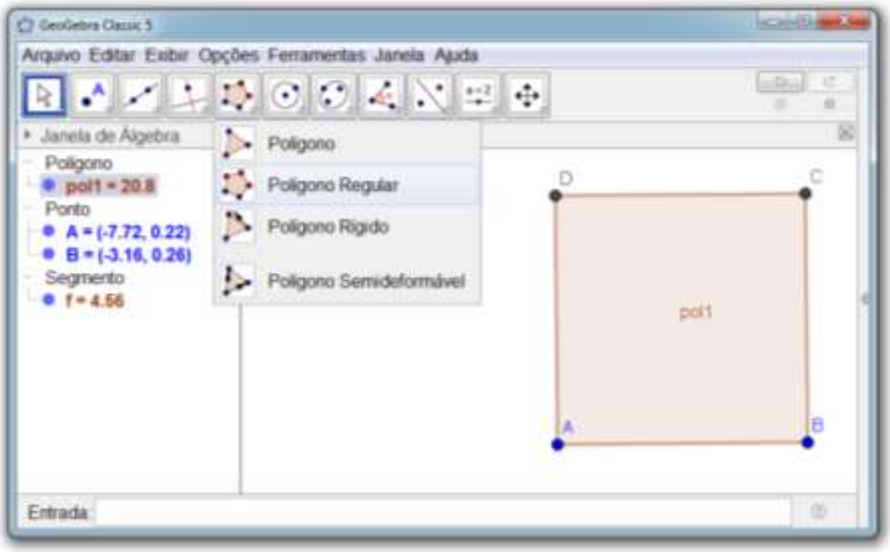
O cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa do triângulo retângulo.

A tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto e cateto adjacente a esse ângulo.

Etapas da tarefa:

1. **Inserindo um polígono regular com 4 vértices:** acesse a ferramenta Polígono Regular e insira um polígono regular com 4 vértices.

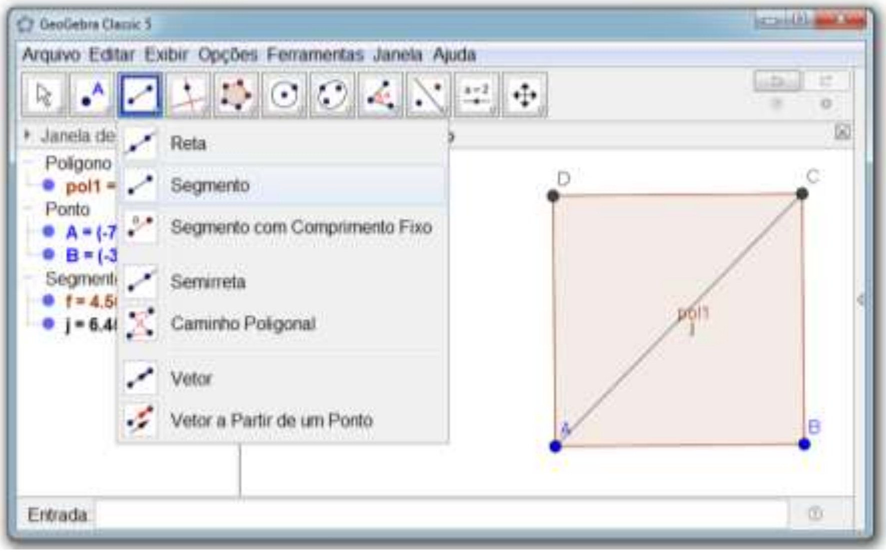
Figura 101 – Inserindo um polígono regular



Fonte: elaboração da autora (2018).

2. **Inserindo um segmento de reta**: acesse a ferramenta Segmento, e, depois selecione os pontos A e C.

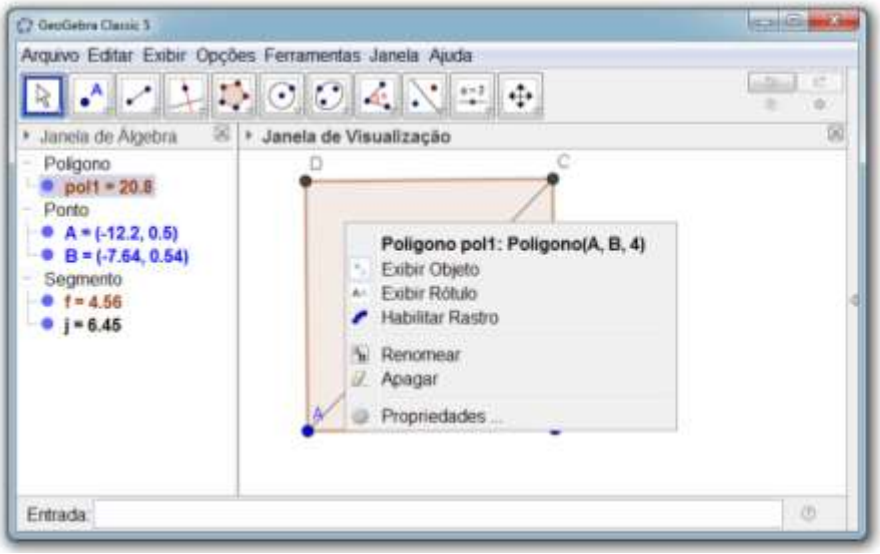
Figura 102 – Inserindo um segmento de reta



Fonte: elaboração da autora (2018).

3. **Ocultando rótulos:** clique com o botão direito do mouse sobre o polígono e desabilite a opção Exibir Rótulo. Repita o procedimento para o segmento de reta.

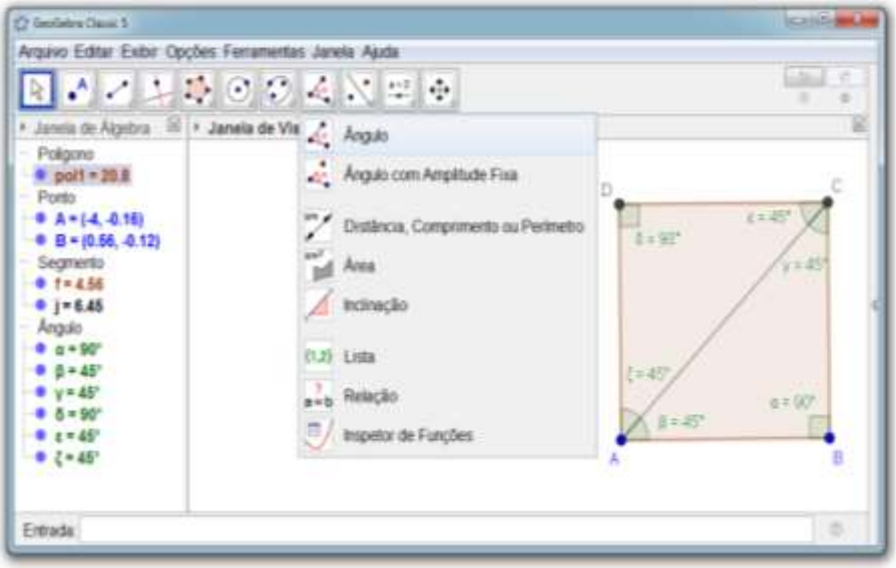
Figura 103 – Ocultando rótulos



Fonte: elaboração da autora (2018).

4. **Determinado a amplitude dos ângulos dos triângulos:** acesse a ferramenta Ângulo, e determine a amplitude dos ângulos internos dos polígonos ABC e ADC.

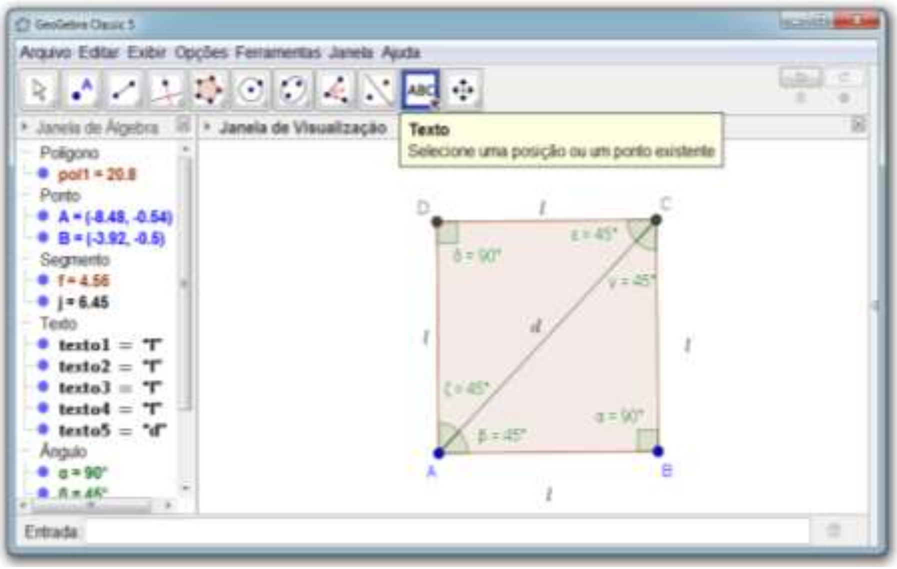
Figura 104 – Ocultando rótulos



Fonte: elaboração da autora (2018).

5. **Nomeando os lados dos polígonos**: acessse a ferramenta Texto e nomeie os lados dos polígonos conforme a figura abaixo.

Figura 105 – Nomeando os lados dos polígonos



Fonte: elaboração da autora (2018).

6. Dadas as medidas l dos lados do polígono ABCD, descreva como determiniar a medida da diagonal d.

7. Descreva como obter a medida da razão trigonométrica ***seno*** do ângulo de 45º do polígono ABC.

8. Descreva como obter a medida da razão trigonométrica ***cosseno*** do ângulo de 45º do polígono ABC.

9. Descreva como obter a medida da razão trigonométrica ***tangente*** do ângulo de 45º do polígono ABC.

10. Anote na tabela as medidas obtidas para as razões trigonométricas ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** do ângulo de 45º do polígono ABC.

	45º
Seno	
Cosseno	
Tangente	

11. Que relações podem ser observadas entre as medidas das razões trigonométricas ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** do ângulo de 45º do polígono ABC?

12. É possível afirmar que as medidas das razões trigonométricas ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** do ângulo de 45º do polígono ADC são iguais às medidas das razões trigonométricas ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** do ângulo de 45º do polígono ABC? Justifique sua resposta.

Comentários das questões:

1. **Obtendo a medida da diagonal *d*:**

Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$d^2 = l^2 + l^2$$
$$d^2 = 2l^2$$
$$d = \sqrt{2l^2}$$
$$d = l\sqrt{2}$$

2. **Obtendo as medidas de seno, cosseno e tangente do ângulo de 45º do polígono ABC:**

Considerando o ângulo de 45º, tem-se:

$$sen(45^o) = \frac{co}{hip}$$
$$sen(45^o) = \frac{l}{l\sqrt{2}}$$
$$sen(45^o) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$sen(45^o) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$sen(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$$
$$sen(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(45^o) = \frac{ca}{hip}$$
$$\cos(45^o) = \frac{l}{l\sqrt{2}}$$
$$\cos(45^o) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos(45^o) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$\cos(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$$
$$\cos(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(45^o) = \frac{co}{ca}$$
$$tg(45^o) = \frac{l}{l}$$
$$tg(45^o) = 1$$

Obtendo a medida da tangente a partir de seno e cosseno:

$$Como \quad tg(45^o) = \frac{sen(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} \text{ , } então \quad tg(45^o) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad tg(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{2}{\sqrt{2}} \quad tg(45^o) = 1$$

11 TAREFA 9 – RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DOS ÂNGULOS DE 30º E 60º

Quadro 11 – Planejamento da nona tarefa

Tarefa 9 – Razões trigonométricas dos ângulos de 30º e 60º	
Carga horária	4 horas-aula de 50 minutos.
Conteúdo	Razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º e 60º.
Objeto Geral	Investigar como obter os valores das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º e 60º.
Recursos	Tarefa de estudo e *software* Geogebra.
Procedimentos	Construir figuras geométricas, descrever como obter a medida ***h***, e as medidas das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º e 60º do polígono ACD, anotar os resultados nas tabelas, investigar quais relações existem entre os valores das razões trigonométricas e responder se as mesmas relações podem ser observadas no triângulo BCD.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora (2018).

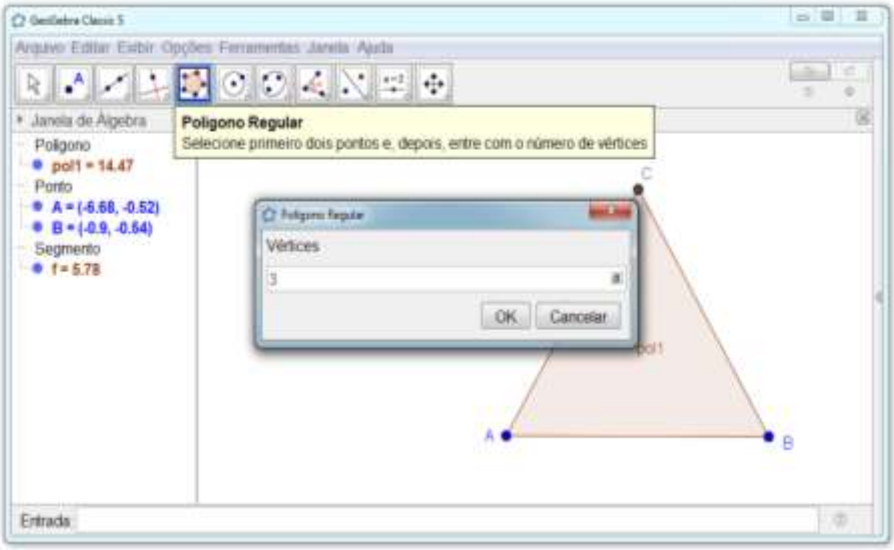
Razões trigonométricas seno, cosseno e tangente:

Seno, cosseno e tangente são razões trigonométricas fundamentais, que resultam de relações entre lados de um triângulo retângulo, considerando seus ângulos. O seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa do triângulo retângulo. O cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa do triângulo retângulo. A tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto e cateto adjacente a esse ângulo*.

Etapas da Tarefa

1. **Inserindo um Polígono Regular:** acesse a ferramenta Polígono Regular e insira um polígno regular com três vértices.

Figura 106 - Inserindo um Polígono Regular

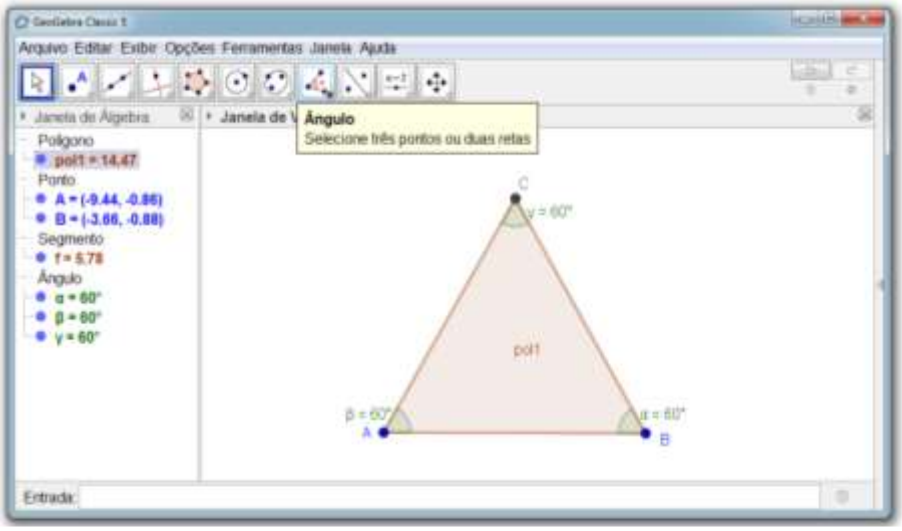


Fonte: elaboração da autora (2018).

2. **Determinando a amplitude dos ângulos:** acesse a ferramenta Ângulo e determine a amplitude dos ângulos internos do polígono.

* Considerou--se importante apresentar novamente estas informações.

Figura 107 - Determinando a amplitude dos ângulos



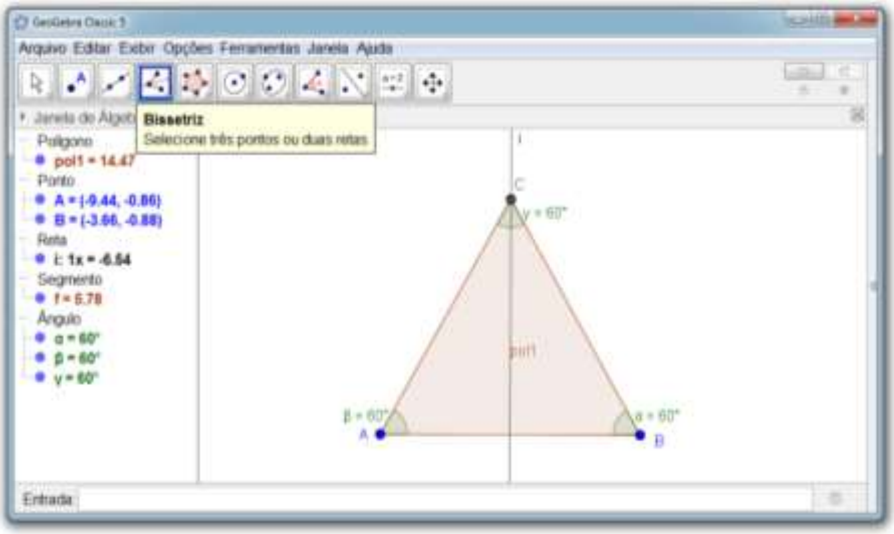
Fonte: elaboração da autora (2018).

Bissertriz

Uma bissetriz divide um ângulo em dois ângulos congruentes, ou seja, divide um ângulo em dois ângulos de mesma medida.

3. **Inserindo uma bissertriz:** acesse a ferramenta Bissetriz e, depois selecione os pontos A, C e B, nessa ordem.

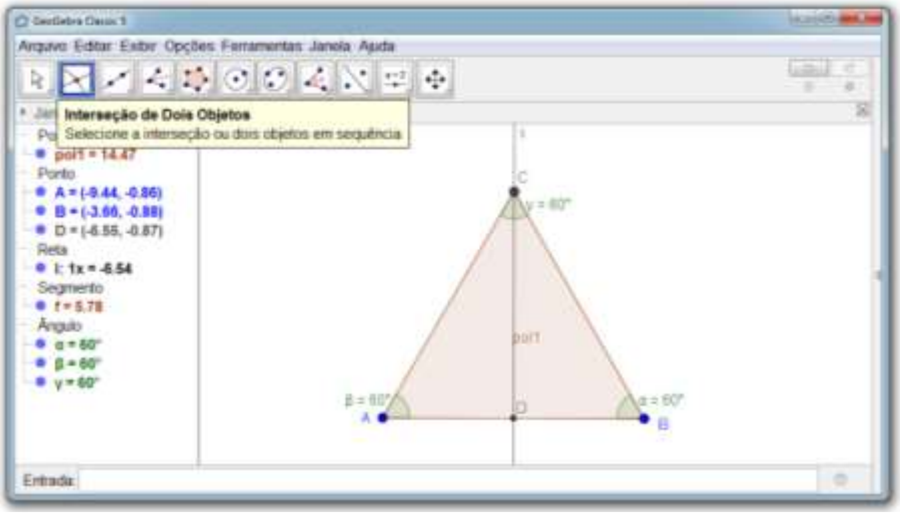
Figura 108 - Inserindo uma bissertriz



Fonte: elaboração da autora (2018).

4. **Inserindo um ponto D:** acesse a Ferramenta Interserção de Dois Objetios e insira um ponto D na intersecção da bissetriz com o segmento $\overline{AB}$.

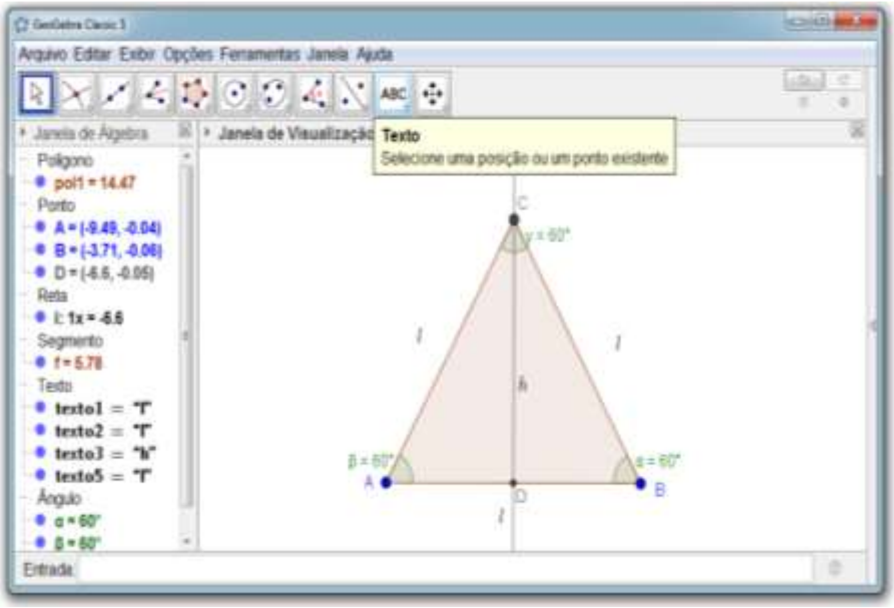
Figura 109 - Inserindo um ponto D



Fonte: elaboração da autora (2018).

5. **Nomeando os lados dos polígonos:** acesse a ferramenta Texto e nomeie os lados dos polígonos conforme apresentado na figura abaixo.

Figura 110 - Nomeando os lados dos polígonos



Fonte: elaboração da autora (2018).

6. Conhecendo a medila l dos lados do polígono ABC, descreva como determinar a medida da altura h.

7. Descreva como obter a medida da razão trigonométrica ***seno*** do ângulo de 60º do polígono ACD:

8. Descreva como obter a medida da razão trigonométrica ***cosseno*** do ângulo de 60º do polígono ACD:

9. Descreva como obter a medida da razão trigonométrica ***tangente*** do ângulo de 60º do polígono ACD:

10. Anote na tabela as medidas obtidas para as razões trigonométricas ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** do ângulo de 60º do polígono ACD.

	60º
Seno	
Cosseno	
Tangente	

11. Descreva como obter a medida da razão trigonométrica ***seno*** do ângulo de 30º do polígono ACD:

12. Descreva como obter a medida da razão trigonométrica ***cosseno*** do ângulo de 30º do polígono ACD:

13. Descreva como obter a medida da razão trigonométrica ***tangente*** do ângulo de 60º do polígono ACD:

14. Anote na tabela as medidas obtidas para as razões trigonométricas ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** do ângulo de 30º do polígono ACD.

	30º
Seno	
Cosseno	
Tangente	

15. Que relações podem ser observadas entre as medidas das razões trigonométricas ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** dos ângulos de 30º e 60º do polígono ACD?

16. É possível afirmar que as medidas das razões trigonométricas ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** dos ângulos de 30º e 60º do polígono BCD são as mesmas das razões trigonométricas ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** dos ângulos de 30º e 60º do polígono ACD? Justifique sua resposta.

Comentários das questões:

1. **Obtendo a medida da altura *h*:**

Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$
$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

2. **Obtendo as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º e 60º:**

Considerando o ângulo de 60º, tem-se:

$$sen60^o = \frac{co}{hip}$$
$$sen60^o = \frac{h}{l}$$
$$sen60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l}$$
$$sen60^o = \frac{l\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{l}$$
$$sen60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{ca}{hip}$$
$$\cos 60^o = \frac{\frac{l}{2}}{l}$$
$$\cos 60^o = \frac{l}{2}.\frac{1}{l}$$
$$\cos 60^o = \frac{1}{2}$$

$$tg60^o = \frac{co}{ca}$$
$$tg60^o = \frac{h}{\frac{l}{2}}$$
$$tg60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}}$$
$$tg60^o = \frac{l\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{l}$$
$$tg60^o = \sqrt{3}$$

Para o ângulo de 30º, tem-se:

$$sen30^o = \frac{co}{hip}$$

$$sen30^o = \frac{\frac{l}{2}}{l}$$

$$sen30^o = \frac{l}{2}.\frac{1}{l}$$

$$sen30^o = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{ca}{hip}$$

$$\cos 30^o = \frac{h}{l}$$

$$\cos 30^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l}$$

$$\cos 30^o = \frac{l\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{l}$$

$$\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30^o = \frac{co}{ca}$$

$$tg30^o = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

$$tg30^o = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

$$tg30^o = \frac{l}{l\sqrt{3}}$$

$$tg30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

12 TAREFA 10 – APLICAÇÃO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS I

Quadro 12– Planejamento da décima tarefa

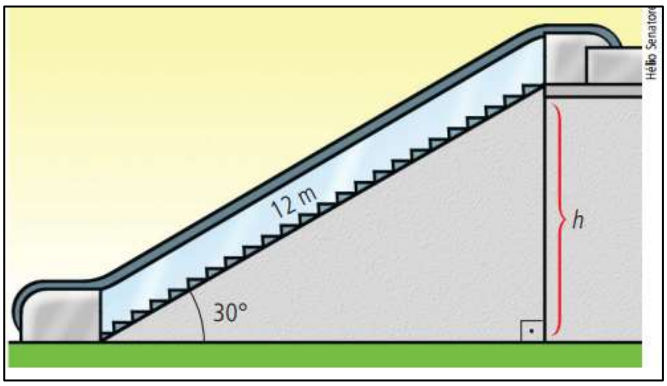
Tarefa 10 – Aplicação de razões trigonométricas I	
Carga horária	1 hora-aula de 50 minutos
Conteúdo	Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Aplicar razões trigonométricas na resolução de situações-problema.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos, ângulos e medidas, e aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora.

Situações-problema

1. Andrini e Vasconcellos (2012, p. 217) Uma escada rolante liga dois andares de um shopping e tem uma inclinação de 30º. Sabendo-se que a escada rolante tem 12 metros de comprimento, calcule e altura de um andar para o outro.

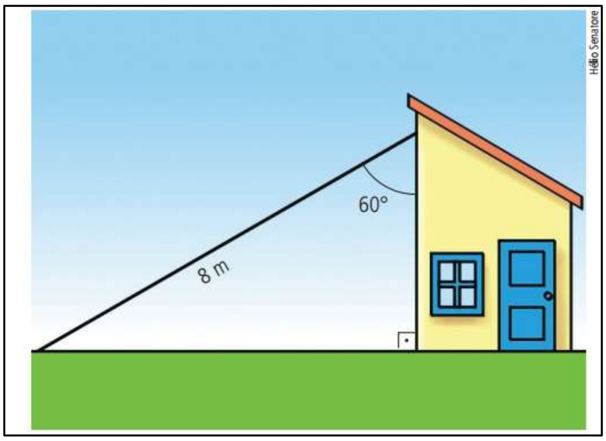
Figura 111 – Ilustração da primeira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 217).

2. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 216) Uma escada de 8 m é encostada em uma parede, formando com ela um ângulo de 60º. A que altura da parede a escada se apoia?

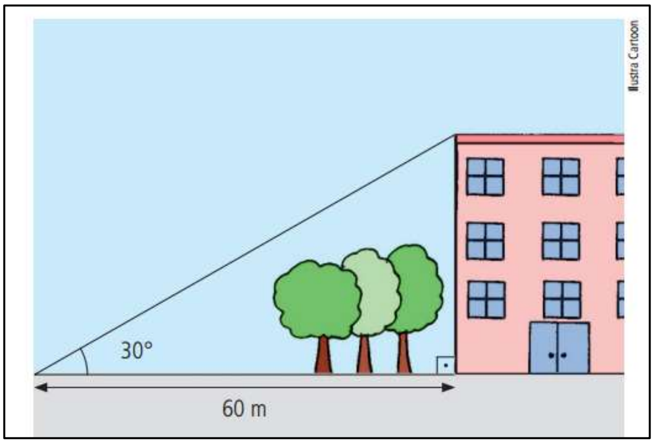
Figura 112 –Ilustração da segunda situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 216).

3. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 216) Qual é a altura do prédio?

Figura 113 – Ilustração da terceira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 216).

13 TAREFA 11: APLICAÇÃO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS II

Quadro 13 – Planejamento da décima primeira tarefa

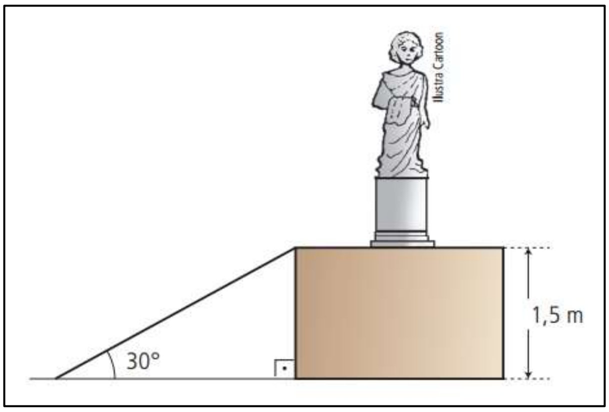
Tarefa 11 – Aplicações de razões trigonométricas II	
Carga horária	1 hora aula de 50 minutos
Conteúdo	Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Aplicar razões trigonométricas na resolução de situações-problema.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos, ângulos e medidas, e aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora (2018).

Situações-problema

1. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 216) Para permitir o acesso a um monumento que está em um pedestal de 1,5 m de altura, será construída uma rampa com inclinação de 30º com o solo, conforme a ilustração. Qual será o comprimento da rampa?

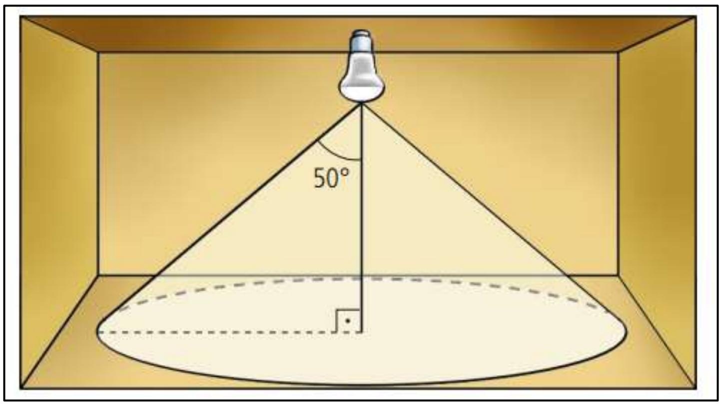
Figura 114 – Ilustração da primeira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 216).

2. (Andrini e Vasconcellos , 2012, p. 212) Veja a figura abaixo. A lâmpada está a 3 m do chão e lança um cone de luz de "abertura" igual a 50º. Qual é a medida do raio do círculo de luz no chão?

Figura 115 – Ilustração da terceira situação-problema



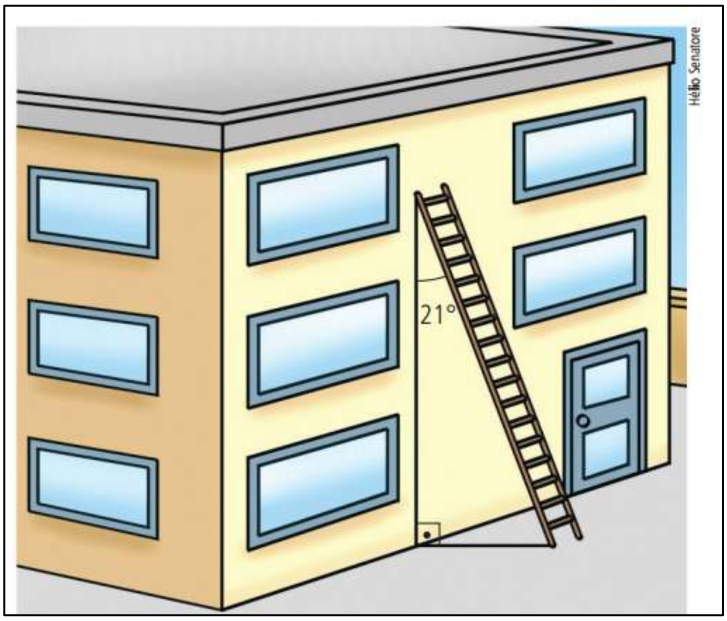
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 212).

3. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 218) Uma escada apoiada em uma parede de um prédio, num ponto que dista 8 m do solo, forma com essa parede um ângulo de 21º.

c) A que distância do prédio está o pé da escada?

d) Qual é o comprimento da escada?

Figura 116 – Ilustração da terceira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 218).

14 TAREFA 12: APLICAÇÃO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS III

Quadro 14 – Planejamento da décima segunda tarefa

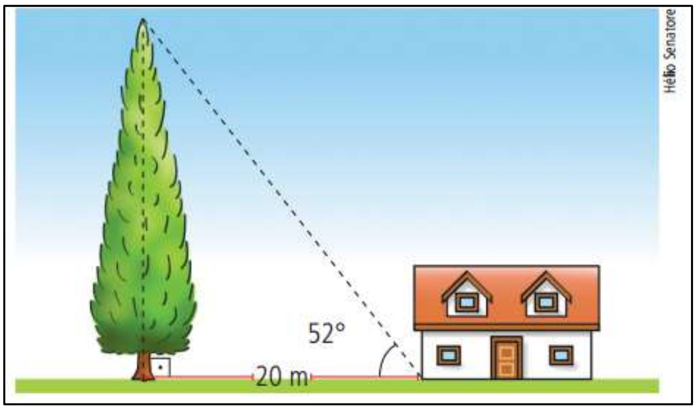
Tarefa 12–Aplicações de razões trigonométricas III	
Carga horária	1 hora-aula de 50 minutos
Conteúdo	Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Aplicar razões trigonométricas na resolução de situações-problema.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos, ângulos e medidas, e aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora (2018).

Situações-problema

1. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 211) Veja a figura abaixo. Pode-se tombar a árvore em direção à casa, sem atingir a construção?

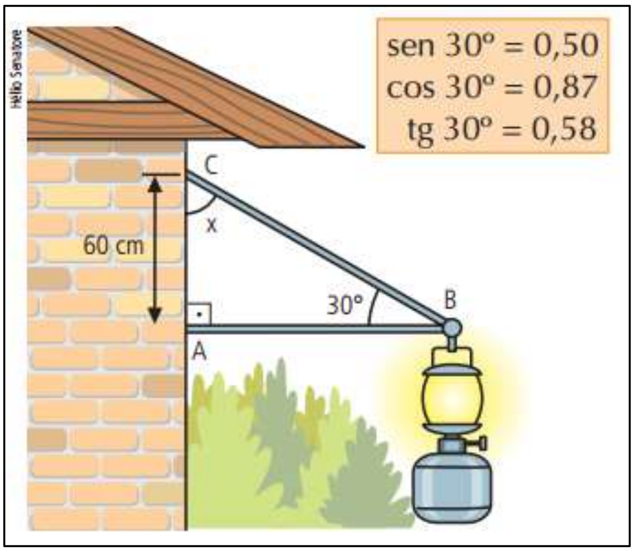
Figura 117 – Ilustração da primeira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 211.

2. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 220) (Ceeteps – SP) Numa pousada isolada, instalada na floresta, um lampião está suspenso na parede conforme a figura a seguir:

Figura 118 – Ilustração da segunda situação-problema



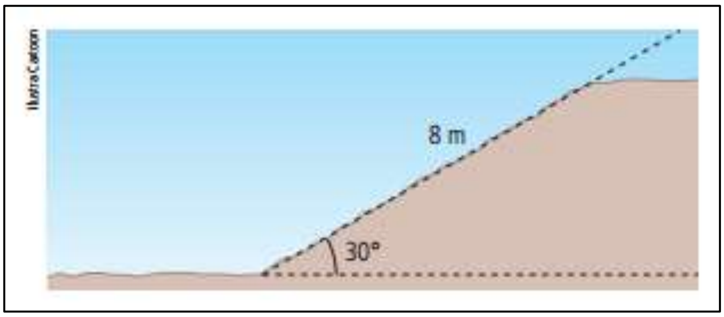
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 220).

A hipotenusa do triângulo ABC formado e o ângulo x medem, respectivamente:

e) 87 cm e 30º
f) 87 cm e 60º
g) 120 cm e 30º
h) 120 cm e 60º

3. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 218) Uma pessoa tem um terreno com o seguinte declive:

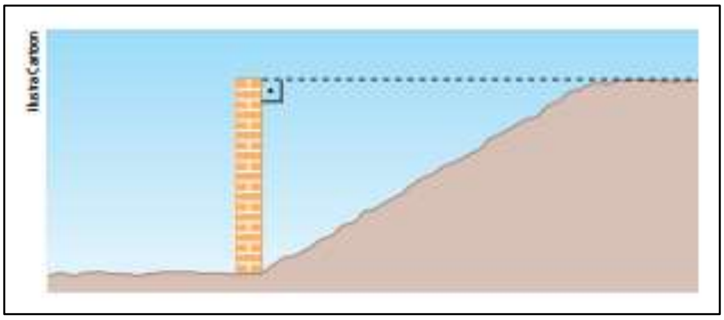
Figura 119 – Ilustração do terreno



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 218).

Ela quer construir um muro para nivelar o terreno. Que altura deverá ter o muro?

Figura 120 – Ilustração do muro



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 218).

15 TAREFA 13 – APLICAÇÃO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS IV

Quadro 15 – Planejamento da décima terceira tarefa

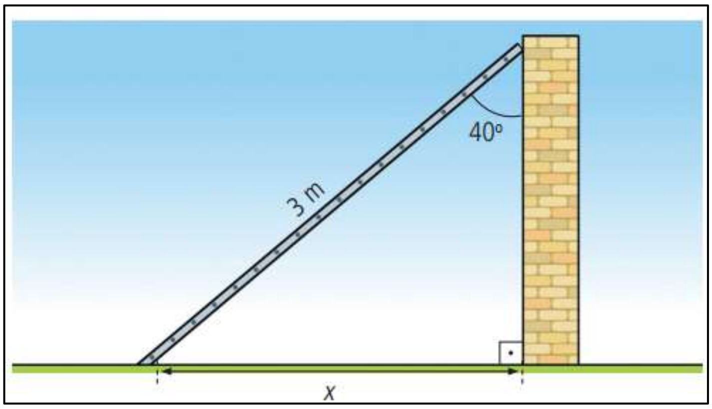
Tarefa 13–Aplicações de razões trigonométricas IV	
Carga horária	1 hora-aula de 50 minutos
Conteúdo	Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Aplicar razões trigonométricas na resolução de situações-problema.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos, ângulos e medidas, e aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora (2018).

Situações-problema

1. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 212) Uma escada medindo 3 m precisa fazer um ângulo de 40º com a parede para que não escorregue. A que distância o pé da escada precisa ficar da parede?

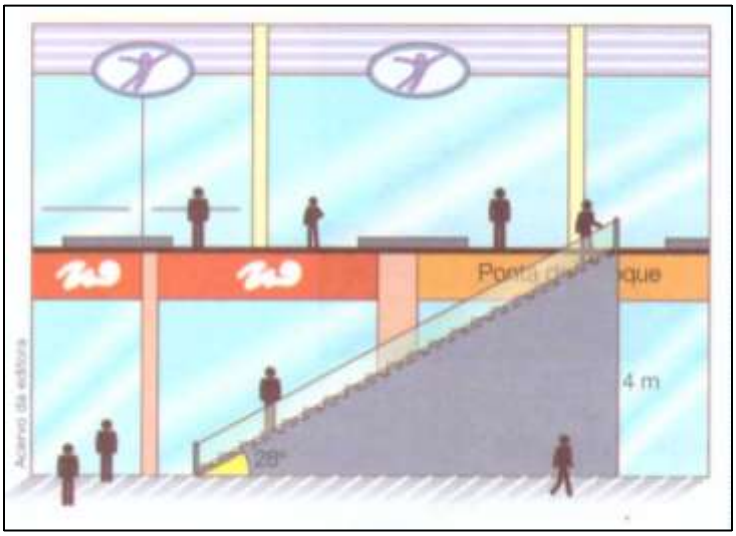
Figura 121 – Ilustração da primeira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (012, p. 212).

2. (Souza e Pataro, 2013, p.178) Para fazer a ligação entre dois andares de um *shopping*, deseja-se instalar uma escada rolante, cuja inclinação seja de 28º. Sabendo que a diferença de altura entre os pisos desses andares é 4 m, calcule a que distância horizontal do topo deverá estar situada a parte inferior da escada.

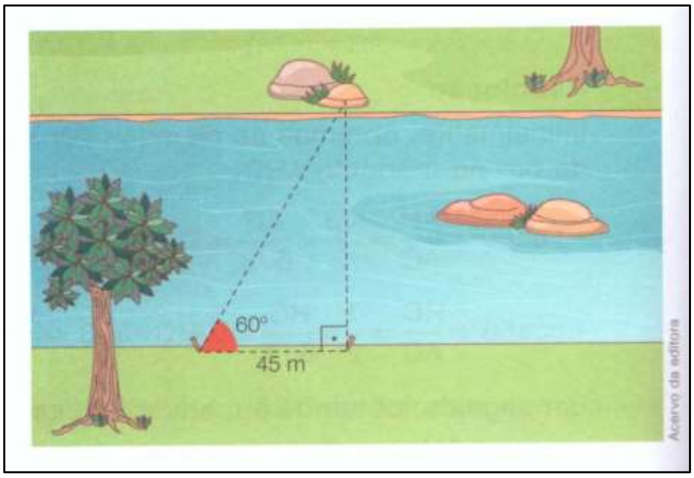
Figura 122 – Ilustração da segunda situação-problema



Fonte: Souza e Pataro (2013, p. 178).

3. (Souza e Pataro, 2013, p.274) Para medir a largura de um rio, um engenheiro utilizou como referência duas estacas de madeira, que fincou em uma das margens do rio, e uma pedra, localizada na margem oposta, conforme o esquema. Qual é, aproximadamente, a largura do rio?

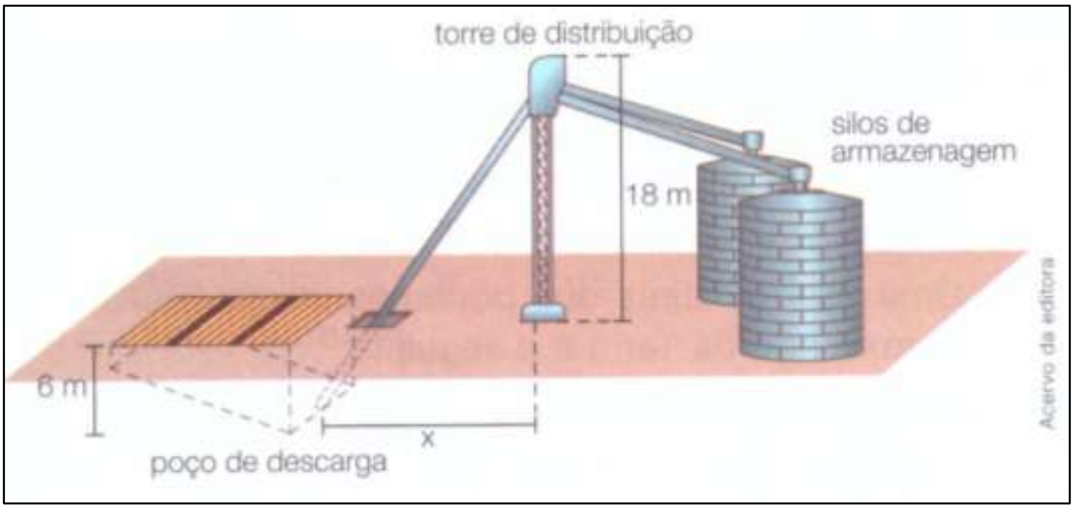
Figura 123 – Ilustração da terceira situação-problema



Fonte: Souza e Pataro (2013, p. 274).

4. (Souza e Pataro, 2013, p.279) Uma cooperativa deseja construir um poço com profundidade máxima de 6 m para descarga de grãos. Do fundo desse poço deve partir um tubo, cuja finalidade é transportar os grãos até o topo de uma torre de distribuição. O tubo que será instalado não deverá formar um ângulo maior que 50º com o solo. De acordo com essas informações, calcule a distância mínima x que deve haver entre a torre e o poço a ser construído.

Figura 124 – Ilustração da quarta situação-problema



Fonte: Souza e Pataro (2013, p. 279).

16 TAREFA 14 – APLICAÇÃO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS V

Quadro 16 – Planejamento da décima quarta tarefa

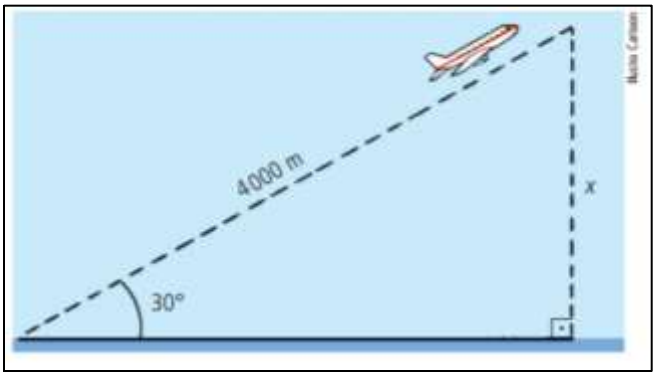
Tarefa 14–Aplicações de razões trigonométricas V	
Carga horária	1 hora-aula de 50 minutos
Conteúdo	Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.
Objeto Geral	Aplicar razões trigonométricas na resolução de situações-problema.
Recursos	Tarefa de estudo e calculadora.
Procedimentos	Investigar problemas envolvendo triângulos retângulos, ângulos e medidas, e aplicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na resolução das situações.
Avaliação/instrumentos	Análise do desenvolvimento dos alunos durante a realização da tarefa, e das respostas das questões/monitoramento, observação, tarefa e registro em diário pessoal.

Fonte: elaboração da autora (2018).

Situações-problema

1. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 216) Um avião levanta voo sob um ângulo de 30º em relação à pista. Qual será a altura do avião quando este percorrer 4000m em linha reta?

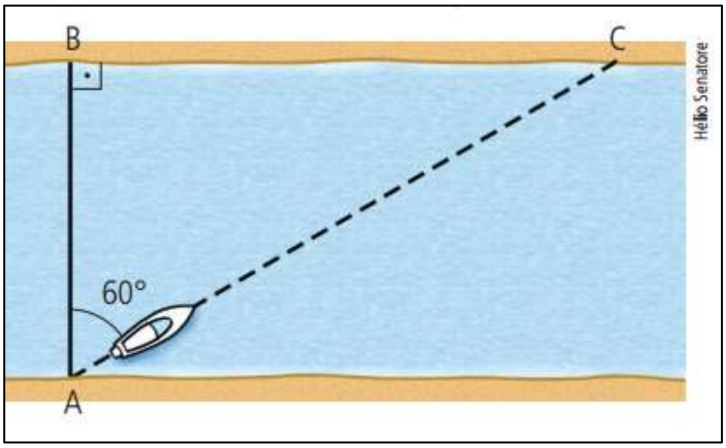
Figura 125 – Ilustração da primeira situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 216).

2. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 217) - (Unama - PA) A figura abaixo representa um barco atravessando um rio, partindo de A com direção ao ponto B. A forte correnteza arrasta o barco em direção ao ponto C, segundo um ângulo de 60º. Sendo a largura do rio de 120 m, qual é a distância percorrida pelo barco até o ponto C?

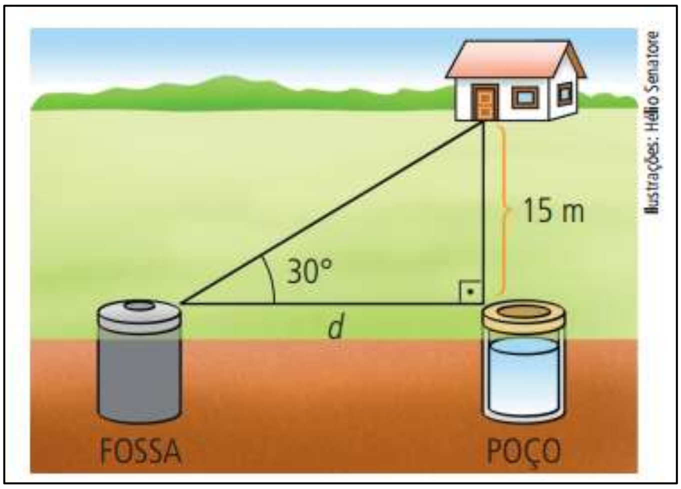
Figura 126 – Ilustração da segunda situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 217).

3. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 221) - (Ceeteps – SP) A informação pode evitar doenças: “Para evitar a contaminação da água pela fossa, deve-se construí-la distante, no mínimo, 20 m do poço de água”. Observando o esquema abaixo, podemos concluir que a construção da fossa e do poço está:

Figura 127 – Ilustração da terceira situação-problema

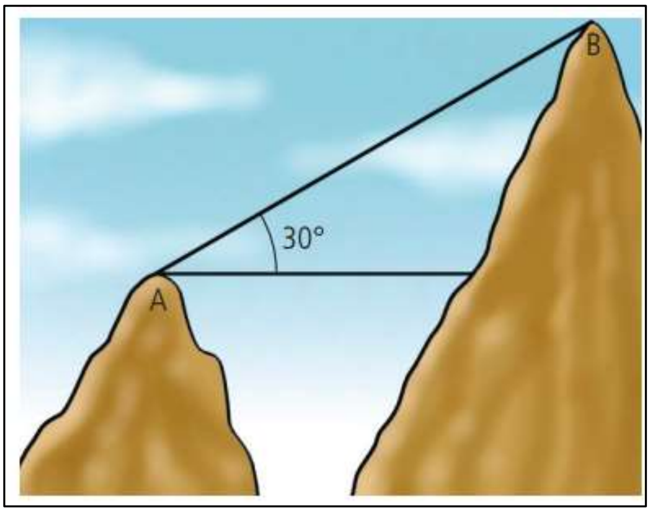


Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 221).

a) Correta, pois a distância do poço à fossa é de 20 m.
b) Incorreta, pois a distância do poço à fossa é de 15 m.
c) Correta, pois a distância do poço à fossa é de 22 m.
d) Correta, pois a distância do poço à fossa é de 25 m.

4. (Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 221) – (ETF-SP) As altitudes (altura em relação ao nível do mar) em que estão dois pontos A e B são, respectivamente, 812 m e 1020 m. Do ponto A vê-se o ponto B sob um ângulo de 30º com o plano horizontal (conforme figura).

Figura 128 – Ilustração da quarta situação-problema



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 221).

A distância entre os pontos A e B é:

a) 400 m

b) 416 m

c) $208\sqrt{3}$ m

d) $\frac{416\sqrt{3}}{3}$ m

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática, 9**. Coleção praticando matemática; v. 9. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática 9**. 4 ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Aprendendo Matemática com o Geogebra**. São Paulo: Exato, 2010.

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática aula por aula.** Volume único. Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2009.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini.** 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

COSTA, Váldina Gonçalves da. **Geometria**: semelhança, circunferência, polígonos regulares, áreas e geometria de posição. Uberaba: Universidade de Uberaba, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP. Editora: Unicamp, 2004.

FONSECA, Laerte. **Aprendizagem em Trigonometria:** obstáculos, sentidos e mobilizações. São Cristóvão: Editora UFS; Aracaju: Fundação Oviêdo Teixeira, 2010.

FLOOD; Raymond; WILSON, Robin . A História dos Grandes Matemáticos: as descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos. Coleção História da Matemática. São Paulo: M. Books do Brasil, 2013.

LIBÂNEO, José Carlos; FREITAS, Raquel A. Marra da Madeira. Valisy Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés. **Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. 2. ed. Uberlândia: EDUFU, 2015. p. 327-362.

MOTA, Ermerson Ferreira Batista; MAIA, Fernanda Alves; ALMEIDA, Maria Tereza Carvalho; FRANÇA, Silvana Diamantino. **Geometria Dinâmica/PIBID/Unimontes:** contribuições do Geogebra para a Matemática na educação básica. Curitiba: Prismas, 2013.

PITOMBEIRA, João Bosco (Coord.). **Matemática, primeira série, ensino médio**. Multicurso v. 1. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2004.

REGO, Tereza Cristina. **Vygotski**: uma perspectiva histórico-cultural da educação. 25 ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática, 9º ano**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2013.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. COLE, Michael; JOHN-STEINER, Vera; SCRIBNER, Sylvia; SOUBERMAN, Ellen (Orgs.). Tradução: NETO, José Cipolla Neto; BARRETO, Luís Silveira Menna; AFECHE, Solange Castro. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.