INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS JATAÍ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

WAGNA MENDES VIEIRA CAMPOS

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

JATAÍ
2019

WAGNA MENDES VIEIRA CAMPOS

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre (a) em Educação para Ciências e para Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática
Linha de Pesquisa: Fundamentos, Metodologias e Recursos para Educação para Ciências e Matemática
Sublinha: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira.

JATAÍ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

CAM/des

Campos, Wagna Mendes Vieira.
O desenvolvimento do pensamento algébrico, através da resolução de problemas, e suas contribuições para aprendizagem de equações do primeiro grau [manuscrito] / Wagna Mendes Vieira Campos. -- 2019.
205 f.; il.

Orientador: Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira.
Dissertação (Mestrado) – IFG – Câmpus Jataí, Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2019.
Bibliografias.
Apêndices.

1. Pensamento algébrico. 2. Resolução de problema. 3. Equações do Primeiro Grau. I. Ferreira, Nilton Cezar. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título.

CDD 512

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Rosy Cristina Oliveira Barbosa – CRB 1/2380 – Campus Jataí. Cód. F050/19.

WAGNA MENDES VIEIRA

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestra em Educação para Ciências e Matemática.

Esta dissertação foi defendida e aprovada, em 26 de novembro de 2019, pela banca examinadora constituída pelos seguintes membros:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Luciano Duarte da Silva
Membro interno
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. José Pedro Machado Ribeiro
Membro externo
Universidade Federal de Goiás

A Deus que nos criou. Seu fôlego de vida em mim foi-me sustento dando coragem para questionar realidades e propor sempre um novo mundo de possibilidades.

AGRADECIMENTOS

A Deus por te me dado forças nessa caminhada.

A toda minha família, em especial o meu esposo Marcelo Faria Campos que sempre esteve ao meu lado nessa jornada.

Ao meu orientador, Dr. Nilton Cezar Ferreira, pela suas correções, incentivos e paciência para ensinar.

À minha banca de qualificação e defesa composta pelos professores Dr. Luciano Duarte da Silva e Dr. José Pedro Machado Ribeiro, pelas valiosas contribuições

Ao coordenador, Dr. Paulo Henrique de Souza, que sempre esteve disposto a me ajudar.

Ao Instituto Federal de Goiás, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro.

A todos que direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação - o meu muito obrigado.

Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então você poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta.

George Polya

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar o resultado de uma investigação que buscou compreender como a resolução de problemas poderia contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico, de estudantes do 7° ano do ensino fundamental, e quais as suas implicações para aprendizagem dos conceitos relacionados às equações de primeiro grau, e, a partir disso, produzir uma sequência didática capaz de orientar professores que buscam um ensino diferenciado e eficiente sobre esses conceitos. Buscando alcançar esse objetivo, foi elaborado e aplicado um plano de ensino em que a pesquisadora, pondo-se como professora, buscou identificar, nos alunos investigados, a presença, ou não, de pensamento algébrico. Ademais, por meio desse diagnóstico, colocar em prática a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para fazer emergir, nesses estudantes, um pensamento algébrico, dentro das três vertentes estabelecidas nos referenciais teóricos deste trabalho, e a partir disso, levar os estudantes a conceberem conceitos relacionados às equações de primeiro grau. Esta pesquisa teve caráter qualitativo, e, para nortear as ações desenvolvidas, enquanto pesquisa científica, teve como apoio o Modelo Metodológico de Thomas A. Romberg. A coleta de dados foi feita durante a aplicação do plano de ensino, por meio da observação da pesquisadora; registros em caderno de campo; trabalhos produzidos pelos alunos; e gravações das aulas, em áudios e vídeos. Como resultado foi produzido um Produto Educacional, por meio de uma Sequência Didática, para auxiliar outros professores e pesquisadores. Desse modo, evidenciaram-se contribuições significativas sobre o entendimento das diversas formas de raciocínio de um estudante, frente a um problema de matemática; promoveu-se a capacitação da pesquisadora, em formação continuada; e foram levantadas outras questões que poderão servir de base para novas pesquisas.

Palavra-chave: Pensamento Algébrico. Resolução de Problema. Equações do Primeiro Grau.

ABSTRACT

This work aims to present the result of an investigation that wanted understanding how problem solving could contribute to the development of algebraic thinking of 7th grade students', and its implications for learning concepts related to equations, and, then, produce a didactic sequence capable of guiding teachers who seek a differentiated and efficient teaching on these concepts. Seeking to achieve this goal, a teaching plan was elaborated and implemented in which the researcher, working herself as a teacher, sought to identify, in the investigated students, the presence or not of algebraic thinking. Moreover, through this diagnosis, put into practice the Methodology of Teaching-Learning-Evaluation of Mathematics through Problem Solving to bring out, in these students, an algebraic thought, within the three strands established in the theoretical references of this work, to take students then conceive concepts related to the equations of the first degree. This research was qualitative and, to guide the actions developed, as a scientific research, was supported by the Thomas A. Romberg Methodological Model. Data collection was made during the application of the teaching plan, through the observation of the researcher; field notebook records; works produced by students and recordings of classes with audios and videos. As a result, an Educational Product was produced through a Didactic Sequence to assist other teachers and researchers. Thus, significant contributions were evidenced on the understanding of the various forms of reasoning of a student, facing a mathematical problem; The researcher was trained in continuing education and other questions were raised that could serve as a basis for further research.

Keywords: Algebraic Thinking. Problem Solving. Equations of the First Fegree.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELA

LISTA DE ABREVIATURAS E SICLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos de Resolução de Problemas
RS	Resolução de Problemas
TALE	Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UNESP	Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Considerando que o ensino de matemática e o conhecimento científico são importantes desde as séries iniciais e que a escola desempenha diversos papéis dentro da sociedade, sendo um deles o de formar pessoas para o mercado de trabalho, surge a necessidade de se repensar um desses papéis: o de formar profissionais críticos e capazes de participar das tomadas de decisões voltadas para questões sociais, culturais e econômicas. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconhece que a educação básica deve:

> Visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva. Significa, ainda, assumir uma visão plural, singular e integral da criança, do adolescente, do jovem e do adulto – considerando-os como sujeitos de aprendizagem – e promover uma educação voltada ao seu acolhimento, reconhecimento e desenvolvimento pleno, nas suas singularidades e diversidades. Além disso, a escola, como espaço de aprendizagem e de democracia inclusiva, deve se fortalecer na prática coercitiva de não discriminação, não preconceito e respeito às diferenças e diversidades (BNCC, 2017, p. 14).

De acordo com o que foi exposto, o professor agindo como mediador, pode promover condições para ampliar, transformar, sistematizar e facilitar o processo de ensino e aprendizagem para os alunos. Para isso, é importante que o professor mostre a necessidade dos conteúdos de matemática com os quais vai trabalhar, a fim de que os alunos tenham maior interesse em estudá-los e que entenda, segundo a BNCC (2017, p. 266) "O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais".

É possível perceber, em nossa experiência como docente, que os alunos não se sentem atraídos pela disciplina de Matemática, acham que é um "bicho de sete cabeças", e muitos chegam a abandonar a escola por esse motivo. A matemática apresenta desafios a serem superados, e algumas práticas pedagógicas aplicadas no ensino dessa disciplina focam na memorização de fórmulas e repetições de procedimentos executados pelo professor durante suas aulas. Com o passar do tempo, os alunos não se lembram mais de nada.

Este trabalho buscou investigar e propor o ensino das equações de primeiro grau, um dos pilares da matemática do Ensino Fundamental, a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. A construção ou ampliação desse tipo de pensamento pode, segundo diversos pesquisadores dessa linha, ampliar a cognição dos estudantes em relação ao entendimento de objetivos algébricos e até não algébricos, e, consequentemente, facilitar aprendizagem de conceitos e conteúdos matemáticos relacionados a esses objetivos. Diante disso e considerando a situação exposta no parágrafo anterior, acreditamos que este trabalho é pertinente, pois adentra em situações do ensino e aprendizagem que anseiam por metodologias mais eficientes em sala de aula, requerendo pesquisas e proposições de novas dinâmicas, como as que propusemos aqui.

Com intuito de atingir nosso objetivo de **compreender como a resolução de problemas poderia contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico, de estudantes do 7° ano do ensino fundamental, e quais as suas implicações para aprendizagem dos conceitos relacionados às equações de primeiro grau**, propusemos um trabalho de campo que fez uso da resolução de problemas, durante aulas de matemática, ministradas pela pesquisadora, para alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, na Escola Municipal Antônio Gomes de Lima, na cidade de Rio Verde/GO. Esse trabalho de campo ocorreu por meio da execução de um plano de ensino investigativo composto por trinta aulas de cinquenta minutos.

Neste trabalho, levantamos questões relacionadas às metodologias de ensino aplicadas na construção de conhecimentos de matemática e, principalmente, nas dificuldades que os alunos enfrentam em compreender equações do primeiro grau. Diante desse cenário, investigamos “como os alunos do sétimo ano da rede municipal, concebem uma aprendizagem na abordagem de resolução de problemas, de maneira que possam desenvolver seu pensamento algébrico, e como isso pode ser visto como uma possibilidade de se trabalhar conteúdos de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental”.

O referencial teórico que utilizamos para conceituação de um pensamento algébrico e para entender como se constitui um trabalho com Resolução de Problemas em sala de aula, foram os trabalhos de Lins (1992), Kaput (2008), Radford (2009), Polya (2006), Coelho (2005), Dante (1991), Ferreira (2017), Onuchic e Allevato (2011), dentre outros.

Como já mencionado anteriormente, fizemos o uso de uma pesquisa de campo, com um trabalho desenvolvido em uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental, no segundo semestre de 2018, na Escola Municipal Antônio Gomes de Lima, localizada na cidade de Rio Verde - GO. A pesquisadora responsável aplicou, nessa turma, um plano de ensino que fez uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, buscando desenvolver nos estudantes da referida turma, um pensamento algébrico, a partir de problemas relacionados com elementos de equações do primeiro grau. Nesse contexto, para nortear esta pesquisa, durante a coleta e análise de dados, procuramos responder a seguinte questão:

Como a resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico, de estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental, e quais as suas implicações na aprendizagem dos conceitos relacionados às equações de primeiro grau?

Em se tratando da divisão deste estudo no Capítulo 1 temos a presente Introdução, em que a pesquisadora faz uma apresentação de como se deu todo o processo de investigação, começando com as motivações da pesquisa, oriunda das dificuldades que os alunos do sétimo ano têm em intuir e/ou assimilar equações do primeiro grau; perpassando as ideias gerais, como a necessidade da criação e aplicação de um plano de ensino e também como este texto foi organizado.

No Capítulo 2, buscamos situar o leitor sobre um dos principais temas da nossa investigação – Pensamento Algébrico. Elucidamos um pouco da história do Pensamento Algébrico; suas vertentes, de acordo com alguns pesquisadores nessa área, como Lins (1992), Kaput (2008), Radford (2009). Apresentamos de maneira sucinta o nosso estudo sobre o surgimento da Álgebra, de acordo com Eves (2011) e, também, a história das equações do primeiro grau e o surgimento da Álgebra no Brasil.

No Capítulo 3, mostramos um estudo sobre Resolução de Problemas, dentro do contexto didático-pedagógico, cuja apresentação se embasa nas três formas de abordagem, segundo Schroeder e Lester (1989), apresentamos a nossa opção de metodologia pedagógica, ou seja, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta em Onuchic e Allevato (2011).

No Capítulo 4, apresentamos a metodologia de pesquisa guiado pelo modelo Metodológico de Thomas A. Romberg e, evidenciamos as variáveis-chave da nossa pesquisa: Pensamento Algébrico, Álgebra e Resolução de Problemas, também usamos uma intervenção pedagógica baseada no trabalho de Floriana (2012). Metodologicamente, essa pesquisa teve abordagem qualitativa, de acordo com Kauark et al. (2010) e, Goldenberg (2004).

No Capítulo 5, exibimos nosso plano de ensino e fazemos uma descrição de como cada etapa desse plano foi trabalhada em sala de aula. Durante a apresentação de como se deu a aplicação do plano de ensino, fizemos uma descrição detalhada de cada encontro, enfatizando as relações existentes nesse processo e, durante essa descrição, apresentamos a nossa análise, feita de forma criteriosa, das evidências levantadas nesse processo de investigação e, também, buscamos relacionar a nossa interpretação, com o posicionamento de pesquisadores do referencial teórico e nos posicionamos frente a essa relação, para obter os resultados da nossa pesquisa. Buscando envolver o leitor e fortalecer a nossa argumentação, apresentamos, nesse capítulo, alguns diálogos, relatos e documentos produzidos pelos alunos.

Finalmente apresentamos, no Capítulo 6, as Considerações Finais, destacando as principais contribuições dessa pesquisa com o campo da Educação Matemática, ou seja, apresentamos uma síntese crítica de todo movimento relevante para o campo da Educação Matemática, com um forte posicionamento da pesquisadora, apresentamos respostas e novas reflexões para a questão norteadora desta pesquisa.

Como resultado, além de diversas evidências – elementos importantes para o processo de ensino e aprendizagem de matemática produzimos uma sequência didática (Apêndice B), a partir da elaboração, aplicação e análise de um Plano de Ensino (Apêndice A), entendida como um “conjunto de atividades propostas para o desenvolvimento do pensamento algébrico através da resolução de problemas, seguido de um ensino sobre equações de primeiro grau, para alunos do sétimo ano do ensino fundamental”. Nosso plano de ensino, após análise criteriosa e as devidas correções, materializou-se como uma sequência didática que apresentamos como o nosso Produto Educacional. Seu processo de validação foi incialmente feito pelos próprios estudantes e pela pesquisadora, durante uso experimental (aplicação em sala de aula); depois foi submetido à avaliação por especialistas que compuseram a banca de qualificação e de defesa deste trabalho de mestrado. Contudo, poderá ainda estar em processo de constante avaliação, adaptação e aperfeiçoamento por professores e alunos, após sua divulgação e liberação para uso.

2 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Neste capítulo, apresentamos o significado de pensamento algébrico segundo Lins (1992), Kaput (2008) e Radford (2009). Procuramos entender quando esse tipo de raciocínio se originou, como ele se constitui atualmente e quais as suas características. Diante disso, apresentaremos as vertentes do pensamento algébrico em conformidade com os pesquisadores que embasaram nosso trabalho: Lins, Kaput e Radford. Com isso, por meio de atividades, buscaremos exemplificar cada uma dessas vertentes, a fim de observar elementos que as compõem e que foram evidenciados em nossa pesquisa. Ainda neste capítulo, buscaremos entender a configuração da álgebra a partir do pensamento algébrico. Para isso, faremos uma introdução do seu contexto histórico dando ênfase às equações e observando como a álgebra, se constituiu no Brasil, ao longo do tempo.

2.1 A Origem do Pensamento Algébrico

A origem histórica do pensamento algébrico, segundo Radford (2011), foi formulada durante os últimos quinze anos, por meio de uma nova interpretação, bastante diferente, sobre a matemática mesopotâmica, devido, em primeiro lugar, a uma nova análise filosófica e, em segundo, ao desenvolvimento de novos métodos da historiografia da matemática. Esses novos métodos têm ampliado muito a incorporação de conceitos antropológicos e sociológicos à compreensão do passado. Esses novos resultados modificaram a visão tradicional da matemática antiga do Oriente e sua influência na matemática grega que permitem questões antigas trazerem à tona outras novas.

Uma dessas questões, de acordo com Radford (2011), relaciona-se com a transição do pensamento aritmético na direção do pensamento algébrico. O pensamento algébrico (numérico) emergindo, a partir de um raciocínio proporcional, como meio rápido, direto e alternativo de resolução de problemas não práticos. Esses problemas não práticos são problemas contextuais relacionados aos números, observadas nas antigas civilizações da Babilônia e do Antigo Egito. Ademais, esses problemas eram resolvidos utilizando o raciocínio proporcional, que era uma das mais importantes áreas desenvolvidas pelo pensamento matemático mesopotâmico.

Outra questão relevante diz respeito ao papel desempenhado pela linguagem e pelo simbolismo no pensamento algébrico. A linguagem é submetida a uma compreensão da matemática, ou seja, é vista como uma manifestação da *semiótica*[1] dentro da cultura na qual a matemática é praticada. Assim, o simbolismo precisa ser estudado por meio do significado social da álgebra e por intermédio de diferentes formas de simbolização que a cultura, sob análise, utiliza para representar objetos (RADFORD, 2009).

2.1.1 Pensamento Algébrico e suas caracterizações

Tentaremos entender o significado de Pensamento Algébrico de acordo com a interpretação de James Kaput e Maria Blanton:

> [...] processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade. (BLANTON, KAPUT, 2008, p. 413)

O pensamento algébrico, de acordo com a citação anterior é um processo em que, por exemplo, os alunos resolvem tarefas matemáticas a sua maneira, a seu modo de pensar, e, no final, podem generalizar essas ideias matemáticas por meio de seus resultados, mas essas tarefas deverão ser elaboradas de acordo com cada série de escolaridade.

Na perspectiva de Lins (1992), esse tipo de pensamento tem como função produzir significados para os objetos algébricos e para situações em termos de números e operações aritméticas (igualdade ou desigualdades, propriedades das operações, etc.).

Na concepção de Kaput (2008), a caracterização do pensamento algébrico é uma atividade exclusivamente humana (o conhecimento está no sujeito), que surge das generalizações como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais formal usada na argumentação.

Por fim, Radford (2009, p. 319) caracteriza o pensamento algébrico como "um tipo de reflexão e ação cultural muito sofisticada, um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual".

Apesar de buscarmos apresentar uma visão geral do pensamento algébrico, foi preciso, para um entendimento mais profundo, observar as etapas ocorridas durante seu desenvolvimento. Essas etapas se constituem como vertentes de um raciocínio, o qual pode ser desenvolvido ao longo de atividades que requerem um processo cognitivo específico.

---

[1] A semiótica, estudo dos signos, é tratada aqui como semiótica Pierciana e, apesar da sua complexidade, signo foi entendido, neste contexto como sinônimo de representação.

2.1.2 As vertentes do Pensamento Algébrico

O pensamento algébrico assume três vertentes, segundo os trabalhos dos pesquisadores Rômulo Lins[2], que chama essas vertentes *de aritmeticismo*, *internalismo* e *analiticidade*; de Luis Radford[3], que as chama de pensamento *factual*, *contextual* e *padrão*; e de James Kaput[4], que prefere chamar essas vertentes de *aritmética generalizada*, *funcional* e *modelação*.

Apesar de os três autores citados darem denominações diferentes para cada uma das três vertentes do pensamento algébrico, eles referem-se aos mesmos tipos de pensamentos ou a pensamentos similares. Com efeito, *aritmeticismo*, *factual* e *aritmética generalizada* são denominações usadas para se referirem ao mesmo tipo de pensamento; *internalismo*, *contextual* e *funcional* são denominações também referentes ao mesmo tipo de pensamento; e, da mesma forma, *analiticidade*, *padrão* e *modelação* são designações dadas um uma mesma forma de pensar.

Apesar disso, gostaríamos de enfatizar que, dentro de uma mesma vertente de pensamento algébrico, existem variações que podem ser observadas e interpretadas de muitas maneiras, visto que dois indivíduos, mesmo dentro de uma mesma linha de raciocínio, sempre terão pensamentos diferentes, pois possuem um rol de experiências diferentes. Além disso, uma mesma vertente pode aparecer em contextos diferentes, fazendo um indivíduo pensar ora de um maneira, ora de outra, mesmo dentro da mesma vertente. Com isso, a visualização da forma de pensamento de cada indivíduo também pode ser vista e interpretada de formas diferentes.

Por esse motivo, nossos autores, buscando simplificar seu entendimento sobre esses tipos de pensamentos, então classificaram em três vertentes e configuraram cada uma delas de acordo com sua interpretação. Dessa feita, nós, na hora do nosso processo de análise, utilizaremos ora a interpretação de um autor, ora de outro, buscando sempre aquele que melhor nos puder auxiliar para visualizar e entender o pensamento do aluno durante a resolução de um problema.

A seguir, apresentamos cada uma das vertentes do pensamento algébrico, na concepção de cada um dos nossos teóricos:

---

[2] Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (1986) e doutorado em Educação Matemática pela University of Nottingham, UK (1992). Desde 1992 trabalha no Departamento de Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ambos no IGCE-UNESP, Rio Claro (SP). Nascimento em (21/08/1955 - 17/08/2017).

[3] Desde 1992 vem ensinado e conduzido pesquisas na École des sciences de l'éducation de l'Université Laurentienne. A Universidade está localizada em Sudbury, Ontário, Canadá. Tornou Professor Titular deste 1997.

[4] Diretor do Centro de pesquisa e inovação em Educação Matemática da Universidade UMASS/ Dartmouth de Massachusetts.

1) A primeira Vertente do Pensamento Algébrico

A primeira vertente do pensamento algébrico, na concepção de Lins (2003, p. 12), é o aritmeticismo que significa "modelar, em números, o que naturalmente implica a utilização das operações aritméticas a fim de produzir as relações que constituem o modelo", sendo que o objeto de trabalho são principalmente os números, as operações aritméticas carregam uma relação de igualdade, e são vistas como ferramentas para resolver determinadas situações.

Na visão de Kaput (2008), essa vertente é uma Aritmética Generalizada ou Pensamento Quantitativo que tem por base o potencial e o caráter algébrico da aritmética, que deve ser explorada explicitamente de forma sistemática, revelando a sua generalidade. A generalização com operações e suas propriedades e o raciocínio com números constituiem o coração da álgebra como aritmética generalizada, logo, existem outros aspectos que podem ser incluídos nesta vertente, como Blanton e Kaput (2008) apresentam:

- Explorar propriedades e relações de números inteiros (generalizar sobre adição e multiplicação de números pares e ímpares; generalizar propriedades como o resultado da subtração de um número de si mesmo, formalizado como $a - a = 0$; decompor números inteiros em possíveis adições e examinar a estrutura dessas adições;).
- Explorar propriedades das operações com números inteiros (explorar relações entre operações como a comutatividade da adição ou da multiplicação, ou a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação; procurar generalidades nas operações, como adicionar e subtrair a mesma quantidade;).
- Explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades (explorar o papel algébrico do sinal de "=" usando a ideia de equivalência ou expressões numéricas do tipo $8 + 6 = ... + 5$; tratar equações como objetos que expressam relações quantitativas como $3 \times n + 2 = 14$;).
- Resolver expressões numéricas com número desconhecido em falta (sentido de incógnita), resolver equações simples com uma incógnita; resolver equações com incógnitas múltiplas ou repetidas, por exemplo, se $K + K = 10$, quanto é $K + K + 9$?; completar os números que faltam como no quadrado mágico, propor equações no contexto de problemas.

Na concepção de Radford (2009), a primeira vertente do pensamento algébrico, chamada factual, está relacionada com situações mais particulares, referentes à indeterminação, ao desconhecido, à regularidade, etc. Ele afirma que:

> [...] apesar de sua natureza aparentemente concreta, pensamento algébrico factual não é uma forma simples de reflexão matemática. Pelo contrário, ele repousa sobre mecanismos altamente evoluídos de percepção e uma sofisticada coordenação rítmica de gestos, palavras e símbolos. A compreensão da regularidade e a imaginação das figuras na busca pela generalização dos resultados, permanece ancorado em um profundo processo de mediação sensorial mostrando assim a natureza multi-modal do pensamento algébrico factual (RADFORD, 2009, p. 40).

2) A Segunda Vertente do Pensamento Algébrico

Lins (1992) a chama de Internalismo e, para ele, esse tipo de pensamento implica considerar os números e as operações apenas segundo suas propriedades, envolvendo igualdade e desigualdade. O foco desse pensamento está na possibilidade de "distinguir soluções internas, isto é, aquelas produzidas dentro das fronteiras dos campos semânticos[5] dos números e das operações aritméticas".

Para Kaput (2008), trata-se de um pensamento funcional, ele o caracteriza pela generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, além de perceber as relações de variações e (co)variações, sendo que essas variações envolverão generalizações por meio da ideia de função, ou seja, a concepção de letras como variáveis e não apenas como incógnitas. O pensamento funcional Blanton e Kaput (2008) apresentam os aspectos que caracterizam esse tipo de pensamento:

- Simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas (usar símbolos para modelar problemas; usar símbolos para operar com expressões simbólicas.);
- Descobrir relações funcionais (explorar correspondência entre quantidades; explorar relações recursivas; desenvolver uma regra para descrever as relações, usar tabelas, simbolizar as regras descobertas.);
- Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos (formular conjecturas acerca do que não se sabe, a partir do que se sabe, sem repetir todo o processo anterior.);

[5] Segundo Lins (1992, p. 31) " é o modo [como outro] de produzir significado.

- Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos (identificar regularidades numéricas, por vezes, geradas geometricamente, identificar padrões em sequências de imagens, figuras geométricas; identificar padrões em conjuntos de expressões numéricas.).

Radford (2009) denomina esse pensamento como contextual, ou seja, o nível de objetivação é mais profundo do que o da ação e percepção característica do pensamento factual. Destacando ainda que "no pensamento algébrico contextual, a indeterminação se torna um objeto explícito do discurso. Gestos e ritmos são substituídos por dêiticos linguísticos, advérbios, etc." (RADFORD, 2009, p. 49).

3) A Terceira Vertente do Pensamento Algébrico

Lins (1992) chama essa vertente de analiticidade. Para ele, um pensamento nessa vertente é caracterizado como um "método de procura de verdades no qual o desconhecido é tratado como conhecido" (p. 16). Os números genéricos são apresentados como se fossem específicos e as incógnitas como dados. Por exemplo, as expressões algébricas que formam uma equação são manipuladas, como o "x", sendo o elemento desconhecido e tratado como valores conhecidos, gerando equações equivalentes até encontrar o desconhecido, como o valor de "x".

Essa vertente, para Kaput (2008), é a modelação, constituída por um tipo de pensamento caracterizado por um domínio para expressar e formalizar generalizações. Nessa perspectiva, ela se dá a partir de situações matemáticas ou de fenômenos como a generalização de regularidades, em situações do cotidiano nas quais a regularidade é secundária, relativamente ao objeto mais geral da tarefa. Dentro desse pensamento para representar um problema de estrutura algébrica, também é possível utilizar a linguagem gestual, pictórica, natural, numérica ou simbólica algébrica.

Radford (2009) chama, os pensamentos nessa vertente de pensamento algébrico padrão. Segundo ele, é nessa vertente que o aluno começa a utilizar fórmulas alfanuméricas, ou seja, uma linguagem simbólica algébrica para expressar o pensamento. As fórmulas alfanuméricas são narrativas vivas dos fenômenos estudados como atividades de generalizações de padrões, como o tipo de imagem, ícones em que os alunos oferecem uma espécie de descrição espacial da imagem e as ações a serem realizadas.

2.1.3 Atividades com as vertentes do pensamento algébrico

Mostramos, a seguir, algumas atividades para ilustrar cada uma das vertentes de Pensamento Algébrico. Começando uma atividade retirada de Rômulo Lins (1992). Na resolução da equação $2x + 10 = 100$, identificamos as vertentes do pensamento algébrico, como pode ser vista na Figura 1:

Figura 1 – Resolução da equação do primeiro grau

$$2x + 10 = 100$$

$$2x + 10 - 10 = 100 - 10 \quad (I) \qquad 2x + 0 = 90 \quad (II)$$

$$2x/2 = 90/2 \quad (III) \qquad x = 45 \quad (IV)$$

Fonte: Lins (1992)

Analisando a parte (I), foi adicionado o número *10* tanto no primeiro membro da igualdade, quanto no segundo, e também a operação de subtração para resolver, sendo assim, utilizando a primeira vertente, aritmeticismo, do pensamento algébrico. Desse modo, segundo Lins e Gimenez (2003, p. 152):

> [...] não há nenhum problema em dizer que "número é qualquer elemento do conjunto de base de uma estrutura algébrica". Outros autores colocam restrições, por exemplo, que essa estrutura algébrica tenha duas de tal e tal tipo, mas isso não é realmente necessário. Segundo nosso ponto de vista, números naturais, inteiros, reais e complexos são números, mas também o são: polinômios, vetores, matrizes, permutações, conjuntos, e assim por diante, sempre que estiverem sendo considerados do ponto de vista da estrutura algébrica correspondente. Por outro lado, o que caracteriza a "verdadeira" operação aritmética é a "sensação" de se estar "fazendo uma conta": dois elementos são associados para "produzir" um terceiro. É essa característica – forte – das operações aritméticas "verdadeiras" que persiste nas leis de composição da álgebra abstrata, de modo que não vemos inconveniente em utilizar a nomenclatura que adotamos, de modo a preservar o insight que ela oferece.

Analisando as partes (II), (III) e (IV) da figura 1, observa-se que foram utilizadas as propriedades que o sinal de igualdade (=) possui para separar tanto o primeiro membro quanto o segundo da equação, sendo assim, utilizando a segunda vertente que é o - Internalismo do pensamento algébrico.

Na terceira vertente que é a Analiticidade, destacamos na figura 1, em todas as etapas da resolução, a letra x, sendo representada pelo número desconhecido e que, não final da resolução, tal número desconhecido é tido como conhecido, para que possam ser geradas equações equivalentes até se encontrar o valor desconhecido. Daí, segundo Lins (1992, p. 15), "os elementos desconhecidos devem ser manipulados com base em propriedades gerais para a classe de objetos a que pertencem e não como uma manipulação real de um determinado, especifico, objeto". O número genérico é tido como os específicos, e as incógnitas funcionam como os dados da equação.

Para identificar as vertentes do pensamento algébrico de acordo com as ideias do pesquisador Kaput (2008), propomos o problema baseado em Almeida (2016): "*Divino, Paulo e José vão repartir 50 Pirulitos de modo que Paulo receba 10 pirulitos a mais que Divino e José receba 7 pirulitos a mais que Divino. Quantos pirulitos receberá cada um*? ". Nesse problema, quando o aluno desenvolve a capacidade de construir significado para a linguagem e para os objetos algébricos, ou seja, compreendem o problema como uma equação polinomial do primeiro grau e que existe uma relação de igualdade entre a quantidade de pirulitos que Divino, Paulo e José irá receber e o total geral de pirulitos. Através dessa relação de igualdade, estabelece um modelo matemático representado por letras, como é ilustrado pela Figura 2, a qual percorre as três vertentes de pensamento algébrico.

Figura 2 – Resolução do problema por meio de equação

Primeira etapa	Segunda etapa	Terceira etapa	
⬇	⬇	⬇	
Divino + Paulo + José = *50*	***Divino*** = *x*	*x + x + 10 + x + 7 = 50*	*Divino = x*
D + P + J = 50	***Paulo*** = *x +10*	*x + x + x + 10 + 7 = 50*	***Divino = 11***
(+10) (+7)	***José*** = *x + 7*	*3x + 17 = 50*	
		3x + 17 – 17 = 50 – 17	
		3x + 0 = 33	*Paulo = x + 10*
		3x/3 = 33/33	***Paulo = 11 + 10 = 21***
		1x = 11	*José = x + 7*
		x = 11	***José = 11 + 7 = 18***

Fonte: Almeida (2016)

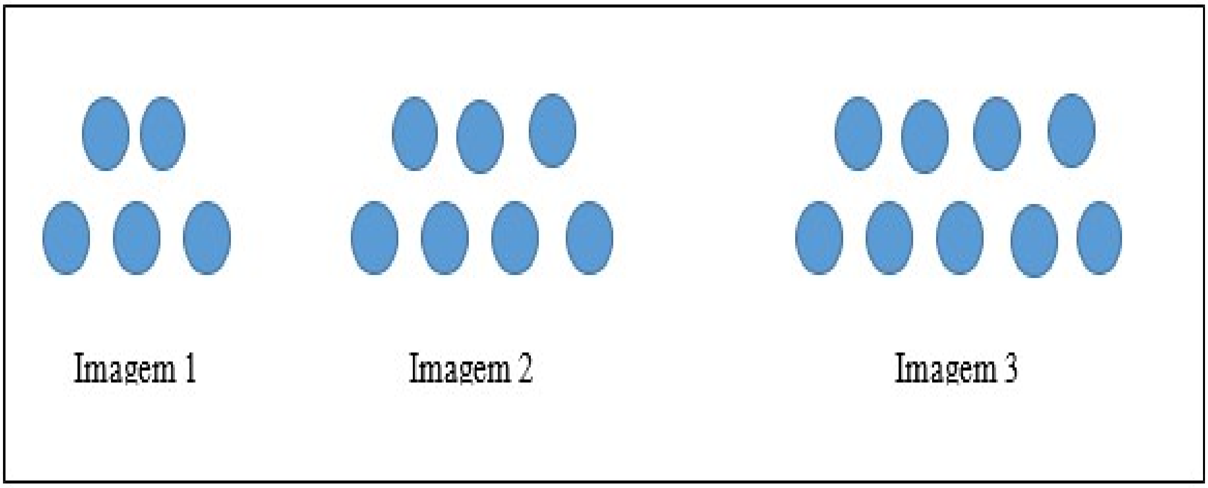
A aritmética generalizada ou pensamento quantitativo (primeira vertente de pensamento algébrico) está presente na primeira etapa da resolução do problema, visto na Figura 2, pois, se o aluno estabelece uma relação de igualdade, sendo representada pela expressão "$D + P + J = 50$", e também percebe, que a quantidade de pirulitos não é igual para todos, isso caracteriza o problema como de estrutura aritmética. Nessa etapa, o aluno se encontra na primeira vertente do pensamento algébrico.

Observe-se que, na segunda etapa, o aluno consegue estabelecer uma relação funcional entre a quantidade de pirulitos de um dos personagens Divino, com os outros, e ainda fazer uso da letra como uma variável, e no nosso exemplo representamos por "x". Nessa etapa, de acordo com Kaput (2008), o estudante desenvolveu o raciocínio dentro da segunda vertente do pensamento algébrico.

Note-se que, na terceira etapa o estudante consegue estabelecer um modelo matemático representado pela equação " $x + x + 10 + x + 7 = 50$". Enfatizamos que existe uma diferença entre essa equação e a equação da primeira etapa, pois, na primeira etapa, não temos o modelo matemático, de fato, não é possível resolver o problema a partir dela. Observe-se também que, nessa etapa, o estudante consegue manipular valores desconhecidos por meio de uma incógnita, conseguindo obter o resultado do problema, fazendo o uso de uma linguagem simbólica (algébrica), o que Kaput (2008), considera como a parte essencial da terceira vertente do pensamento algébrico.

Já Radford (2009) propõe uma atividade de generalizações de padrões que pode ser resolvida através da Figura 3:

Figura 3 – Atividades sobre sequências de padrões



Fonte: Radford (2009)

Nessa atividade, descrita em Radford (2009), é pedido aos alunos que desenhem as imagens 4 e 5 da sequência; descobriram o número de círculos nas imagens 10 e 100; escrevam uma mensagem para um aluno de outra classe, indicando como descobrirem o número de círculos de qualquer imagem; escrevam uma fórmula algébrica para o número de círculos na imagem “n”.

Agora, evidenciaremos em etapas as vertentes do pensamento algébrico na atividade proposta por Radford (2009). O aluno que conseguir responder a primeira parte da atividade, que é desenhar as imagens 4 e 5, percebendo que os números de círculos aumentam em dois de uma imagem à outra, se encontra na primeira vertente do pensamento algébrico que é, segundo Radford (2009, p.39), o pensamento algébrico factual, observando como “a relação entre o número de figura e o número de círculos nas suas linhas”, objetivando uma regularidade.

Ainda, poderá ser utilizando o pensamento factual para responder a segunda parte da atividade se o aluno for capaz de perceber que, para calcular o número total de círculos da imagem 10, basta adicionar 1 ao número 10, número da imagem, para encontrar o número de círculos da linha superior, que nesse caso é 11, e 2 ao número 10, para encontrar o número de círculos da linha inferior que é 12. Logo, o total de círculos é igual a soma da linha superior com a inferior 11 + 12 que dá 23 círculos. Então, para encontrar o número de círculos da imagem 100, utilizando a mesma estrutura, basta somar 101 com 102 que é igual a 203 círculos. Qualquer método construído por um aluno, utilizando essa forma de raciocínio está relacionada a números particulares como fórmula em ação, que segundo Radford (2009), “ A ‘fórmula’ desta forma concreta de pensamento algébrico pode ser entendida como um predicado concretizado por uma variável implícita: indeterminação não chega ao nível do discurso” (RADFORD, 2009, p.40).

De acordo com Radford (2009), o aluno que utiliza o pensamento algébrico contextual pode responder a terceira parte da atividade, como exemplo, a seguinte mensagem: “ Você tem que adicionar um círculo ao número da figura para encontrar o número de círculos da linha superior, e adicionar um círculo à linha superior para encontrar o número de círculos da linha inferior”. Essa frase pode ser vista como uma fórmula, ou seja, termos-chave descritivos, como superior e inferior.

Respondendo à quarta parte da atividade, escrevendo uma fórmula para representar o número de círculos da figura n, o aluno chega à seguinte expressão: (n +1) + (n +2). Percebemos que essa fórmula é mais evoluída, uma vez que o aluno utiliza a linguagem simbólica algébrica, baseada em sinais alfanuméricos. Reconhecemos no termo (n +1) a referência da linha superior da sequência e (n + 2) a referência da linha superior. Enfim, Radford (2009) destaca a importância do caminho percorrido pelo estudante no desenvolvimento dessa forma de pensar. Esse começa no pensamento algébrico factual, passando pelo contextual até chegar ao pensamento algébrico simbólico.

Segundo os pesquisadores Rômulo Lins, Luis Radford e James Kaput, pesquisadores assumidos como nosso aporte teórico sobre o pensamento algébrico, pensar algebricamente requer mobilizações da capacidade de estabelecer relações, modelar, generalizar, operar com o desconhecido como se fosse conhecido e a capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem algébrica. Diante disso, gostaríamos de enfatizar que os trabalhos desses pesquisadores vieram ao encontro da nossa pesquisa e foi de suma importância para que esse nosso trabalho se concretizasse.

É válido destacar que o papel do professor é fundamental para que esse processo ocorra, pois é ele o responsável por fazer as intervenções necessárias e instigar o aluno a pensar algebricamente, tornando-o capaz de representar e identificar um mesmo conteúdo matemático de diferentes maneiras e encorajá-lo a observar regularidades e a estabelecer generalizações, usar formas de representação convencionais como notação algébrica e tabelas com uma linguagem natural. Por isso, este trabalho, apesar de ter o aluno como objetivo de investigação, tem um foco direcionado ao professor do Ensino Básico, pois somente ele pode fazer com que essa nossa pesquisa chegue efetivamente à sala de aula.

2.2 Álgebra no contexto da história da matemática

A álgebra não se resume exclusivamente ao pensamento algébrico, ela envolve além desse tipo de raciocínio, uma linguagem formalizada, e isso tornar-se-ia difícil dar uma definição para álgebra de forma geral, pois ela possui características diferentes para cada contexto. Para tentarmos compreender como a álgebra se constitui, começaremos com um apanhado histórico, buscando elucidar suas origens e discorremos sobre as etapas de sua evolução tentando compreender suas concepções para cada contexto.

O matemático Diofanto foi considerado um dos precursores da álgebra aproximadamente no século III a.C., mas pouco se sabe acerca da sua vida, e o desconhecimento impede-nos mesmo de fixar com segurança em que século exato ele viveu. Considerado o principal algebrista grego da época, Diofanto contribuiu com o desenvolvimento da álgebra. Ele nasceu na cidade de Alexandria, localizada no Egito, mas foi educado na cidade grega de Atenas (EVES, 2011). Deduz-se que Diofanto viveu 84 anos, devido alguns versos encontrados no seu túmulo, escritos em forma de um enigmático problema:

> Diofanto passou 1/6 de sua vida como criança, 1/12 como adolescente mais 1/7 na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar, nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai. Quantos anos Diofanto morreu? (EVES, 2011, p. 225)

Diofanto escreveu três trabalhos: Aritmética; Números Poligonais, do qual restou apenas um fragmento; e, Porismas, que se perdeu. O Aritmética, considerado o trabalho mais importante, é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números. A parte remanescente desse trabalho se dedica à resolução de 130 problemas, numa variedade considerável, que levam a equações do primeiro e do segundo grau. O primeiro livro se ocupa de equações determinadas em uma única incógnita (EVES, 2011).

A principal inovação de Diofanto consistiu em utilizar símbolos que, na verdade, começam por ser abreviaturas de termos. O símbolo utilizado por Diofanto para abreviar a incógnita deriva por fusão das duas primeiras letras gregas da palavra *arithmos*, a saber **α** (Alfa) e **ρ** (Rô). Com o tempo, esse símbolo veio se parecer com a letra grega **ς (sigma)**. É o caso, a título de exemplo, de ς como abreviatura de número, M, como abreviatura de unidade. Todavia, Diofanto foi mais longe, escolhendo o caractere ***x*** para assinalar inversos, valores desconhecidos e também estava na posse do conhecimento das regras de multiplicação de expressões algébricas que envolviam subtrações, mas não fazia uso do conhecimento de números negativos, pois estes não existiam na época. (EVES, 2011). As obras de Diofanto foram divulgadas na Europa, depois que foram traduzidas pelos copistas, especialistas em traduzir obras antigas para outras línguas.

2.2.1 Uma descrição histórica das equações

O primeiro indício do uso de equações, mais formalizada, segundo Pereira (2008), surgiu em aproximadamente, 1650 a.C., no documento denominado Papiro de Rhind, que contém a escrita de problemas de matemática. Esse Papiro foi adquirido por Alexander Henry Rhind, na cidade de Luxor - Egito, em 1858. Que segundo Bianchine (2015) cita alguns detalhes do Papiro de Rhind:

> Esse papiro tem 32 cm de largura por 513 cm de comprimento e está escrito em hierático (que se lê da direta para a esquerda). O papiro contém uma coleção de 85 problemas. É também designado como papiro de Ahmes, nome do escriba egípcio que o copiou. (BIANCHINE, 2015, p. 96)

No século IX, de acordo com Eves (2011), o califa al-Mâmûn com a condição de um tratado de paz com o imperador bizantino, enviou especialistas para selecionar e trazer de volta manuscritos científicos gregos, incentivando a sua tradução por intelectuais sírios e cristãos, para o árabe, e esse califa também criou a casa da sabedoria (Dar al-‘ilm) nesse mesmo século, em Bagdá, a capital do império abássida. Com isso, estudos sobre a matemática (aritmética) voltaram, mas agora sobre o domínio do império árabe, seguidores de Maomé.

Um dos primeiros e mais ilustres matemáticos desse período (século IX) foi o estudioso Abu Jafar Mohammed ibn Mûsâ Al-Khowârizmî, um astrônomo do califa de Bagdá. O nome dele indica que ele era da cidade de Khwarezm (agora Khiva), sobre o rio Amu Dária, ao sul do Mar de Aral onde é hoje o Uzbequistão (Khwarezm era parte da Rota da Sêda, um caminho de negociação maior entre a Europa e o Oriente Médio) (EVES, 2011).

A tradução do nome do matemático Mohammed ibn Mûsâ Al-Khowârizmî pode ser traduzido para a língua portuguesa como "Maomé, filho de Moisés, nativo da cidade de Khwarezmi". O matemático Al-Khowârizmî escreveu para o Califa por volta de 813-833 D.C. um livro resumido de álgebra, qual tinha o objetivo de explicar os fundamentos da álgebra, de forma que ficassem mais claros e úteis para o uso dos homens, para serem usados para resolver problemas relacionados a casos de herança, troca de bens ou serviços, cálculos em processos jurídicos e partilha de bens (EVES, 2011).

O matemático árabe Mohammed ibn Mûsâ Al-Khowârizmî escreveu vários livros, mas o que mais se destacou foi o “Hisab al-jabr wa-al-muqa-balah”. Esse livro tratava da resolução de equações semelhante ao sistema aplicado hoje em dia, a diferença é que não utilizava símbolo algum, tudo era representado por palavras. O termo “al-jabr”, que era muito usado, significa restauração, ou seja, transferir termos de um lado da igualdade para outro e o termo qabalah significa redução, ou seja, cancelar ou reduzir termos semelhantes em uma equação, isto é, equacionar (BIANCHINI, 2015).

A obra “Álgebra de Mohammed ben Musa” foi traduzida por Rosen, e, ao todo, essa obra se divide em três partes, sendo que na primeira Al-Khowârizmî explica a solução de seis tipos de equações, às quais qualquer uma delas, seja quadrática ou linear, poderia ser reduzida; a segunda parte fala sobre medição; e a terceira, consiste, principalmente, de fórmulas para calcular áreas e volumes (EVES, 2011).

O matemático Al-Khowârizmî chamava o que hoje entendemos como incógnita e representamos, em geral, pela letra x, de raiz, e o que atualmente entendemos como x^2, ele chamava de quadrado. Veja-se por exemplo, na Tabela 1, a resolução da equação $12x + 8x +$

4x = 72, e como ela era escrita por Al-Khowârizmî em comparação com o que é feito, hoje em dia, em livros didáticos.

Tabela 1 – Comparação entre resolução de uma equação

Segundo o livro al-jabr	Livros atuais
É preciso, em primeiro lugar, que vocês somem doze raízes com oito raízes e com quatros raízes.	x . (12 + 8 + 4) = 72
Como vinte quatro raízes valem o mesmo que setenta e duas unidades.	24x = 72
então o valor de uma raiz é três unidades.	x = 3

Fonte: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/as-equacoes-atraves-simbolos-na-antiguidade.htm>. Acesso em: 07 de março de 2019.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p.8), "os símbolos permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas". Kieran (2007) defende que a Álgebra escolar deve ser trabalhada numa perspectiva de pensar e raciocinar, em que os alunos generalizem, modelem e analisem situações matemáticas, transformando sua aprendizagem.

A origem da palavra "equação" vem da palavra árabe "adala", que significa " ser igual a", com a ideia de igualdade. Na matemática, uma equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores que não conhecemos quando se tem uma igualdade e, segundo Dante (2015, p. 124), equações são "sentenças matemáticas que têm um sinal de igualdade (=) e que contêm pelo menos uma letra que representa um número desconhecido ". -Já na obra de James (1943 apud RIBEIRO, 2007, p. 93) equação é:

> Uma afirmação de igualdade entre duas quantidades. Equações são de dois tipos, identidades e equações condicionais (que são as que fazemos simplesmente uso). Uma equação condicional é verdadeira somente para certos valores das quantidades desconhecidas envolvidas.

Em tempos antigos, segundo Bianchini (2015), os valores desconhecidos de um determinado problema, ou seja, de uma equação, eram nomeados pelos árabes de "*coisa*" que em árabe essa palavra pronunciava-se "*xay".* Em dias atuais, a nomenclatura utilizada para denominar o que se quer encontrar em problemas matemáticos é conhecida como *incógnita.* De acordo com Dante (2015, p. 125), "incógnita é o que é desconhecido, o que procura saber".

As incógnitas são representadas por letras. Pode se observar que, nos livros didáticos brasileiros, de matemática, na maioria das vezes, utiliza-se a letra " x " para representar esse valor que não se conhece e, devido a ele " x ", também se criou uma expressão muito utilizada na língua portuguesa: "o *x da questão* ". Enfim, o conceito de incógnitas, segundo Ferreira (2019, p. 502), é uma " grandeza não conhecida. O que é desconhecido".

Como nossa pesquisa foi direcionada ao ensino fundamental, mais particularmente a alunos do sétimo ano, não tivemos a pretensão de trabalhar equações de maneira abrangente. Detivemos-nos especificamente às equações de primeiro grau com uma incógnita. Diante disso, entendemos equação de primeiro grau da forma em que ela foi definida por Dante (2015, p. 127), ou seja, " uma equação com uma incógnita *(x)* quando pode ser escrita na forma $\boldsymbol{ax = b}$ *e* $\boldsymbol{ax + b = 0}$*,* com **a** diferente de zero e ***a*** e ***b*** pertencente aos números Reais " .

2.2.2 A Álgebra no Brasil

A Álgebra foi introduzida no Brasil, Segundo Miorim (1993, p. 83), "a partir de 1822, através das chamadas aulas régias, isto é, aulas de disciplinas isoladas cujo objetivo era o preenchimento da lacuna deixada quando da eliminação da estrutura escolar jesuítica".

O ano de 1799, de acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), foi o período em que a Álgebra passou a fazer parte do currículo escolar no Brasil, até início da década de 1960, e naquele período, prevaleceu um ensino de caráter reprodutivo, sem clareza, em que tudo era essencial. A álgebra apresentava um caráter mais instrumental, útil para resolver equações e problemas matemáticos.

Já na década de 1960, segundo Pires (1995), com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna, que tinha como objetivo unificar a Teoria dos Conjuntos e as Estruturas Algébricas, a álgebra passou a ocupar lugar de destaque, mas, como consequência, perdeu seu caráter útil para resolver problemas, ou seja, o conteúdo programático de álgebra, trabalhados nas escolas, começava pelo estudo da Teoria de Conjuntos e o destaque era colocado nas operações e nas propriedades. Alguns fatores que caracterizavam a Matemática Moderna, ensinada nas escolas, levantados por Pires (1995) são:

> Atividades práticas que envolvem aspectos do cotidiano das pessoas, perderam-se de vista; aspectos característicos das diferentes culturas, como procedimentos de cálculos e medidas que as crianças aprendem fora da escola; um grande destaque foi conferido à matemática no currículo, ela era colocada numa posição tal que sua articulação com as demais disciplinas era mais um problema destas e não dela própria; os conteúdos matemáticos eram tratados

> desvinculados de quaisquer posturas pedagógicas centradas na socialização dando-lhes uma abordagem escolar. (PIRES, 1995, p. 44-45)

O Movimento da Matemática Moderna entrou em declínio a partir da segunda metade da década de 1970, em razão das fortes críticas feitas por educadores, pelos pais e pelos próprios estudantes. Diante disso, D'Ambrósio (1997) afirma que os movimentos naquela época começaram a dar maior destaque a uma aprendizagem mais participativa, com uma percepção da importância de atividades para os alunos. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) coloca como objetivo para o ensino de álgebra, dentre outro, o desenvolvimento do pensamento algébrico do estudante, ou seja, a álgebra pode proporcionar um:

> Desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BNCC, 2017, p. 270)

Para que ocorram mudanças no ensino de Álgebra nas escolas brasileiras, é preciso que se contemplem, além dos aspectos formais, a construção do pensamento algébrico, pois não se pode utilizar uma nova linguagem sem que lhe seja dado sentido, sem que não se sinta a necessidade de sua utilização no cotidiano.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Desde o início da civilização humana, o homem se depara com problemas do seu cotidiano e busca maneiras de resolvê-los. Logo, falar sobre problemas e resolução de problemas de uma forma geral, abrangeria, praticamente, todas as áreas do conhecimento, mas neste contexto, será apresentado apenas na área de matemática.

3.1 A Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas, enquanto atividade humana, tem feito parte do cotidiano das pessoas há milênios, mas ligada às questões relacionadas ao ensino de matemática e suas contribuições são recentes, ocorridas a partir do século XX. Nessa trajetória, as ideias de George Polya[6] sobre Resolução de Problemas foram mundialmente conhecidas através de seu livro "How to solve it", traduzido para o português como "A arte de resolver problemas", publicado pela primeira vez no ano de 1945. O foco principal de Polya era o professor, isto é, ele acreditava que, primeiramente, o professor deveria ser um bom resolvedor de problemas e, partir disso, fazer de seus alunos, também, bons resolvedores de problemas. Para isso, Polya apresentou uma sequência de quatro fases que ele afirmou serem essenciais para desenvolver habilidades, no indivíduo, para resolver problemas de matemática. Essas fases são: compreender o problema, estabelecer o plano, executar o plano e examinar a solução obtida. De acordo com Polya (2006) eis:

1) Compreensão do problema:

Antes de resolver o problema, é necessário compreendê-lo. O aluno deve estar em condições de identificar os pontos chaves desse problema, como descrevendo os dados do problema, relacionar o que é necessário e descartar o que não é necessário para resolução do problema, sendo o objetivo, de acordo com Polya (2006), que tenha havido entendido o problema:

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas.

[6] Nasceu na cidade Budapeste (Hungria), de família judaica de origem polaca. Em 1942 atuava como professor titular na Universidade da Stanford (USA), e se aposentou no ano de 1953 nessa mesma universidade, e, mesmo depois de se se aposentar, continuou atuando como professor emérito de Stanford. Polya, morreu em 7 de setembro de 1985, em Palo Alto, na Califórnia.

> O aluno precisar compreender o problema, mas não só isto, deve também desejar resolve-lo. (POLYA, 2006, p. 5)

2) Estabelecimento de um plano:

Depois de compreender o problema é preciso criar um plano de ação, ou seja, ter ideias através de indagações, sugestões. As ideias surgem através de experiências antigas e também de conhecimentos previamente adquiridos, então, de acordo com Polya (2006, p.07): "Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita".

3) Execução do plano:

Depois de estabelecer um plano é preciso criar estratégias que sejam capazes de executarem esse plano. Para conseguir isso, é necessário ter paciência para interpretá-lo e prestar atenção aos detalhes do problema. Então, "Para conseguir isto (executar o plano) é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo" (POLYA, 2006, p. 10).

4) Retrospecto:

Depois que o problema é resolvido, deve-se verificar se os dados são coerentes, se realmente o resultado está correto, e, caso a resolução do problema for longa então é necessário fazer verificações. Assim, segundo Polya (2006):

> Se fizeram um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas (POLYA, 2006, p. 10).

A teoria de Resolução de Problemas ganhou força como apresenta Moraes e Onuchic (2014, p. 24) apud Ferreira (2017, p. 73):

> Apesar do livro " How to solve it" ter sido lançado ainda no ano de 1945, a RP[7] enquanto pesquisa ganhou força nos Estados Unidos e, mais tarde, em outros países do mundo, a partir do final da década de 1960, com pesquisas importantes como as de Jeremy Kilpatrick que fez, em 1967, uma extensa revisão da pesquisa existente sobre RP em Matemática.

[7] Para Resolução de Problemas, serão usadas as letras R e P maiúsculas quando nos referirmos à Teoria.

Ao final da década de 1980, a Resolução de Problemas passou a desencadear a construção de novas metodologias de ensino. O estudo sistemático, as pesquisas nessa linha e os esforços de pesquisadores e professores, em levar a resolução de problema para a sala de aula, como um aporte metodológico, possibilitou a criação de metodologias de ensino com base na Resolução de Problemas, como Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, desenvolvida pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela professora Dra. Loudes de La Rosa Onuchic[8]. Esse grupo tem se dedicado com afinco na produzir pesquisas que possam entender melhor como a Resolução de Problemas pode contribuir com o processo de ensino, aprendizagem e avaliação de matemática.

Os participantes desse grupo reúnem semanalmente, desde 1992, na Universidade Estadual de Paulista - (UNESP) de Rio Claro, sempre buscando desenvolver pesquisas que atinjam a sala de aula tanto sob a perspectiva do aluno quanto do professor, em todos os níveis de escolaridade. Tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigação e de produção científica na linha de Resolução de Problemas em Educação Matemática.

3.2 Resolução de problemas e suas abordagens no contexto didático-pedagógico

Entenderemos como problema "[...] tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em resolver" (ONUCHIC, 1999, p. 215). Assim, entendemos também como um problema, qualquer tarefa apresentada em forma de texto, isto é, que contenha um enunciado inteligível pelos alunos e os motive para encontrarem uma técnica eficaz para resolvê-lo.

Enquanto problema sempre foi pensado apenas como uma relação entre o sujeito e uma tarefa a ele proposta, a Resolução de Problema, ao longo do tempo, passou a ser vista e entendida como algo muito mais amplo do que simplesmente a ação de resolver problema. Atualmente, ela, a Resolução de Problemas, transcendeu limites, antes inimagináveis, podendo ser um campo de pesquisa, metodologias de ensino, meios para avaliação, base para estudos em diversos níveis e, até mesmo, para alguns pesquisadores, uma filosofia da Educação Matemática.

---

[8] Possui graduação em Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP/SP (1954), mestrado em Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos-USP (1971) e doutorado em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP (1978). Professora e Pesquisadora Voluntária da Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho" – UNESP – Rio Claro/SP.

Apesar dessa diversidade de possibilidades que a resolução de problemas proporciona, um dos temas ainda muito discutidos é como ela se configura em sala de aula. Segundo Schroeder e Leste (1989), existem três formas de se trabalhar Resolução de Problemas em sala de aula: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolver problemas e ensinar através de resolução de problemas. Em seguida, apresentaremos as características de cada uma das abordagens.

a) Ensinar sobre resolução de problemas: Refere-se ao processo de resolver os problemas. Nessa abordagem, o professor utiliza o modelo de resolução de problemas de Polya (2006), que foi apresentado no subcapítulo 3.1, desse trabalho, o qual é composto por quatro fases interdependentes como: compreender o problema, criar um plano, levar avante esse plano e olhar de volta o problema original. Para que o aluno seja um bom resolvedor de problemas, o professor precisa ensinar estratégias ou heurísticas, que, segundo Polya (2006), fazem parte do dicionário de heurística, como segue:

> - *Analogia:* Uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em alguns aspectos, enquanto que objetos análogos *coincidem em certas relações* das suas respectivas partes.
> - *Condicionante:* Uma das partes principais de um *problema de determinação*. O problema está condicionado a algo.
> - *Considerar a incógnita:* Lembre-se do seu objetivo. Não esqueça sua meta. Pense naquilo que se deseja obter. Não perca de vista o que é necessário. Foque no fim. Considere a incógnita. Considere a conclusão.
> - *Contradição:* Observe a condicionante e leve em consideração o que a contradiz.
> - *Corolário:* Um teorema que se demonstra facilmente pelo exame de outro teorema que se acabou de demonstrar. A palavra *corolário* é de origem grega e sua tradução é “galardão” ou “recompensa”.
> - *Decomposição e Recombinação:* Constituem importantes operações mentais. Examinar um objeto que provoca interesse ou desperta curiosidade, decompondo-o em partes para serem observadas separadamente e recompondo-o em um todo mais ou menos diferente.
> - *Definições de termos:* Descrições de seus significados por meio de outros termos que se supõe que sejam bem conhecidos.
> - *Demonstração por Absurdo e Demonstração Indireta:* A *demonstração por absurdo* mostra a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante. A *demonstração indireta* estabelece a verdade de uma afirmativa por revelar a falsidade da sua suposição oposta.
> - *Diagnóstico:* Empregado aqui como um termo técnico da Educação, com o significado de “caracterização mais rigorosa do aproveitamento do aluno”.
> - *Equacionamento:* Expressar por símbolos matemáticos uma condicionante que está formulada por palavras, isto é, traduzir da linguagem corrente para a linguagem das fórmulas matemáticas.

> - *Examinar a sua Suposição:* É importante verificar a veracidade de sua suposição. Muitas suposições revelam-se erradas e, não obstante, foram úteis para conduzir a uma outra melhor.
> - *Execução de um Plano:* Conceber um plano e executá-lo são coisas distintas. Quanto mais cuidadosamente verificarmos nossos passos na execução do plano, tanto mais livremente poderemos utilizar o raciocínio heurístico na sua concepção.
> - *Figuras:* Não apenas o objeto dos problemas geométricos, como também importante auxílio para problemas de todos os tipos, que nada apresentam de geométrico na sua origem. Temos, assim, dois bons motivos para considerar a função das figuras na resolução de problemas.
> - *Generalização:* Passagem da consideração de um elemento para a consideração de um conjunto que contém esse elemento; ou a passagem de consideração de um conjunto para outro mais abrangente, que contém o conjunto restrito. (POLYA, 2006, apud FERREIRA, PEREIRA e LEMOS, 2018, p. 7)

Os professores que se utilizam essas estratégias para resolver problemas matemáticos em sala de aula, juntos aos seus alunos, acreditam que o ensino e a aprendizagem acontecerão de forma natural, levando assim o aluno a compreender e a usá-las no desenvolvimento de habilidades para resolver problemas.

b) Ensinar para resolver problemas: Ensinar a matemática necessária para resolver problemas. Situação na qual os professores ensinam, primeiramente, os conteúdos matemáticos e, em seguida, trabalham com problemas de aplicação, sendo esses fechados e que requerem o uso de conceitos e procedimentos anteriormente aprendidos. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la (FERREIRA, 2017). Nessa abordagem, o tipo de problema é uma característica importante para o sucesso do processo. Dante (2002) classifica os problemas em quatro tipos:

- *Problemas padrão* que envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos e não exigem nenhuma estratégia. A tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-los.
- *Problemas processo ou heurísticos* em que a solução envolve operações que não estão contidas no enunciado. Exigem do aluno tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, permitem que ele desenvolva criatividade, desenvolva estratégias e procedimentos para resolver situações problemas.
- *Problema de aplicação* que retratam situações reais do cotidiano e exigem o uso da matemática para resolver os problemas e também pode ser chamado de situações problemas. Por meio de “conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se

matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráfico, fazendo operações etc." (DANTE, 2002, p. 20).

- *Problemas de quebra-cabeça* que geralmente constituem a chamada matemática recreativa e sua solução depende, quase sempre dá sorte ou da facilidade de perceber alguns truques, que é chave da solução.

Essa abordagem é a mais usada no método tradicional de ensino e é bastante criticada por pesquisadores por servir de modelo e ter o foco específico no problema e não no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, o professor, em geral, valoriza demasiadamente o resultado e não tem muito interesse no método usado para se chegar à solução. Além disso, muitas vezes exige que o processo de resolução siga uma sequência de passos colocada por ele, tendo pouca flexibilidade e incentivo ao raciocínio do aluno, valorizando mais a memorização. Essa abordagem trabalhada dessa maneira pode facilitar o trabalho do professor, pois já se sabe de antemão o que o aluno irá fazer. Apesar disso, essa vertente, se aliada às outras, poderá ajudar de forma significativa no desenvolvimento da aprendizagem do aluno.

c) Ensinar através da resolução de problemas: Refere-se ao uso da resolução de problemas como uma metodologia de ensino. O professor, nessa abordagem, tem por objetivo levar o aluno a produzir um novo conhecimento. O professor propõe um problema e, durante a resolução deste por parte do aluno, sendo o professor mediador, novos conceitos e conteúdos vão sendo apresentados de forma que o estudante possa construir novos conhecimentos (FERREIRA, 2017).

De acordo com Coelho (2005, p. 32), a resolução de problemas apresenta-se: "como uma exigência cognitiva imprescindível na aprendizagem e contribui também para o renascimento da heurística, que estuda os métodos e regras que conduzem à descoberta e à invenção". Nessa abordagem é essencial ajudar os alunos a compreenderem os conceitos e as definições, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática.

3.3 Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Utilizando como a vertente do ensino através da Resolução de Problemas, Onuchic, coordenadora do GTERP, depois de diversas pesquisas, construiu uma metodologia de ensino denominada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A partir disso, que segundo Onuchic (1999, p. 203):

> A importância dada à Resolução de problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização de Educação Matemática, em termos de Resolução de problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental.

Essa Metodologia não valoriza a mecanização do conhecimento, pelo contrário, tem por meta ajudar os estudantes a se tornarem investigadores diante de uma situação desafiadora, um problema, de forma a compreender e questionar os conceitos de que irão necessitar para resolvê-lo (ONUCHIC et al., 2017).

O papel do professor de comunicador do conhecimento passa para observador, organizador, mediador, incentivador da aprendizagem. Dessa maneira, essa metodologia exige bastante do professor em sala de aula pois, segundo Rodrigues (1992, p. 29), “ [...] o professor terá que enfrentar situações inesperadas em sala de aula e, em algumas oportunidades, deverá alterar aquilo que tinha planejado, ainda mais, terá que estar atento às dificuldades apresentadas pelos alunos”.

Buscando auxiliar professores a trabalhar através da resolução de problemas, Onuchic e Allevato (2011), isto é, poôr em prática a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, apresentaram um roteiro de atividades a ser trabalhado em sala de aula. Elas alertam que esse modelo serve apenas como orientação para levar o aluno a ser coconstrutor do seu próprio conhecimento. Esse roteiro é composto pelas seguintes atividades:

1º Preparação do problema - *Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento.*

2º Leitura individual *- Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.*

3º Leitura em conjunto *- Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.*

4º Resolução do problema *- A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.*

5º Observar e incentivar *– Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento.*
6° Registro das resoluções na lousa *– Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções.*
7º Plenária – *Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas.*
8º Busca do consenso *– Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.*
9º Formalização do conteúdo *– Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal.*
10º Proposição e resolução de novos problemas *– Analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo de matemática, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas.*

Segundo Onuchic e Allevato (2011), uma das principais características da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é o problema ser o ponto de partida. Nessa metodologia propõe-se um problema e, durante sua resolução deste, por parte do aluno, o professor, agindo como mediador, faz o estudante aprender novos conteúdos. Para que isso aconteça, o professor precisa deixar de ser o centro das atenções e colocar o estudante como principal responsável pela construção de seu conhecimento. Nesse caso, o professor e o aluno precisam estar inseridos nesse processo e assumirem responsabilidades:

> O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011)

Dessa forma, quando o professor apresentar um problema sobre um dado conteúdo, no nosso caso, equações do primeiro grau, ele não deve apresentá-lo como um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou determinada técnica operatória, mas com um desafio capaz de motivar o aluno, fazendo com que ele tenha pensamentos ativos e reflexivos e se torne o agente principal para construção de um novo conhecimento.

4 PERCUSSO TRILHADO NA PESQUISA

Neste capítulo, apresentaremos o caminho trilhado pela pesquisadora: como se constituiu esta pesquisa e, qual foi a sua abordagem: a metodologia de investigação, que foi pautada no modelo metodológico proposto em Romberg (2007), e que posteriormente, sofreu algumas contribuições do GTERP, apresentado em Onuchic e Noguti (2014). Mostraremos, também os recursos utilizados bem como os sujeitos da pesquisa. Adiantamos que, para que nossa pesquisa se concretizasse foi necessário uma intervenção pedagógica que desenvolvemos por meio de uma pesquisa de campo na Escola Municipal Antônio Gomes de Lima, localizada na cidade de Rio Verde Goiás. Trabalhamos com uma turma composta por 42 alunos, do sétimo ano do Ensino Fundamental II, do turno matutino. Essa intervenção foi responsável para produzir os dados necessários ao propósito que estabelecemos como objetivo principal desta pesquisa: O desenvolvimento do pensamento algébrico para aprendizagem de equações de primeiro grau, através da resolução de problemas.

4.1 Metodologia da pesquisa

Frente à característica da nossa pesquisa, adotamos o uso de uma abordagem qualitativa, posto que esse tipo de abordagem trata do aprofundamento da compreensão de um grupo de indivíduos, busca explicar o porquê das coisas descrevendo o que deve ser feito, mas não quantificam os valores, e não preocupam com a parte numérica. Na conceituação de Goldenberg (2004):

> [...] consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Esses dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los. (GOLDENBERG, 2004, p. 53)

Para Kauark et al, (2010), a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de trabalho e o pesquisador como instrumento principal, estabelecendo uma comparação entre o ambiente natural e o pesquisador, preocupando-se com aspectos da realidade do sujeito, como pode ser visto seguinte consideração:

> Considera a existência de uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos

> fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. (KAUARK et al, 2010, p. 26)

O procedimento técnico utilizado para o desenvolvimento deste trabalho foi o de uma intervenção pedagógica que apresentasse planejamento e interferências realizadas pelos pesquisadores. Segundo Floriana (2012), esse tipo de pesquisa envolve:

> Planejamento e a implementação de interferências propositadamente realizadas, por professores/pesquisadores, em suas práticas pedagógicas (mudanças e inovações pedagógicas) destinadas a produzir avanços, melhoria nos processos de aprendizagem dos sujeitos. (FLORIANA, 2012, p. 03)

Uma pesquisa feita por uma intervenção pedagógica tem como função contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dos alunos propondo e inovando práticas pedagógicas, também tendo como finalidade contribuir para a solução de problemas práticos em sala de aula. Esse tipo de pesquisa adota como características, segundo Floriana (2012, p. 07):

> Pesquisas aplicadas, em contraposição a pesquisas fundamentais; intenção de mudança ou inovação, constituindo em práticas a serem analisadas; trabalham com dados criados, em contraposição a dados já existentes que são simplesmente coletados; envolve uma avaliação rigorosa e sistemática dos efeitos de tais práticas, isto é uma avaliação apoiada em métodos científicos, em contraposição às simples descrições dos efeitos de práticas que visam à mudança ou inovação.

A pesquisa do tipo intervenção pedagógica trabalha uma prática educacional voltada para inovar e avaliar ações pedagógicas na tentativa de contribuir com a aprendizagem dos alunos em sala de aula, ou seja, no mundo real e não em um ambiente fechado como um laboratório.

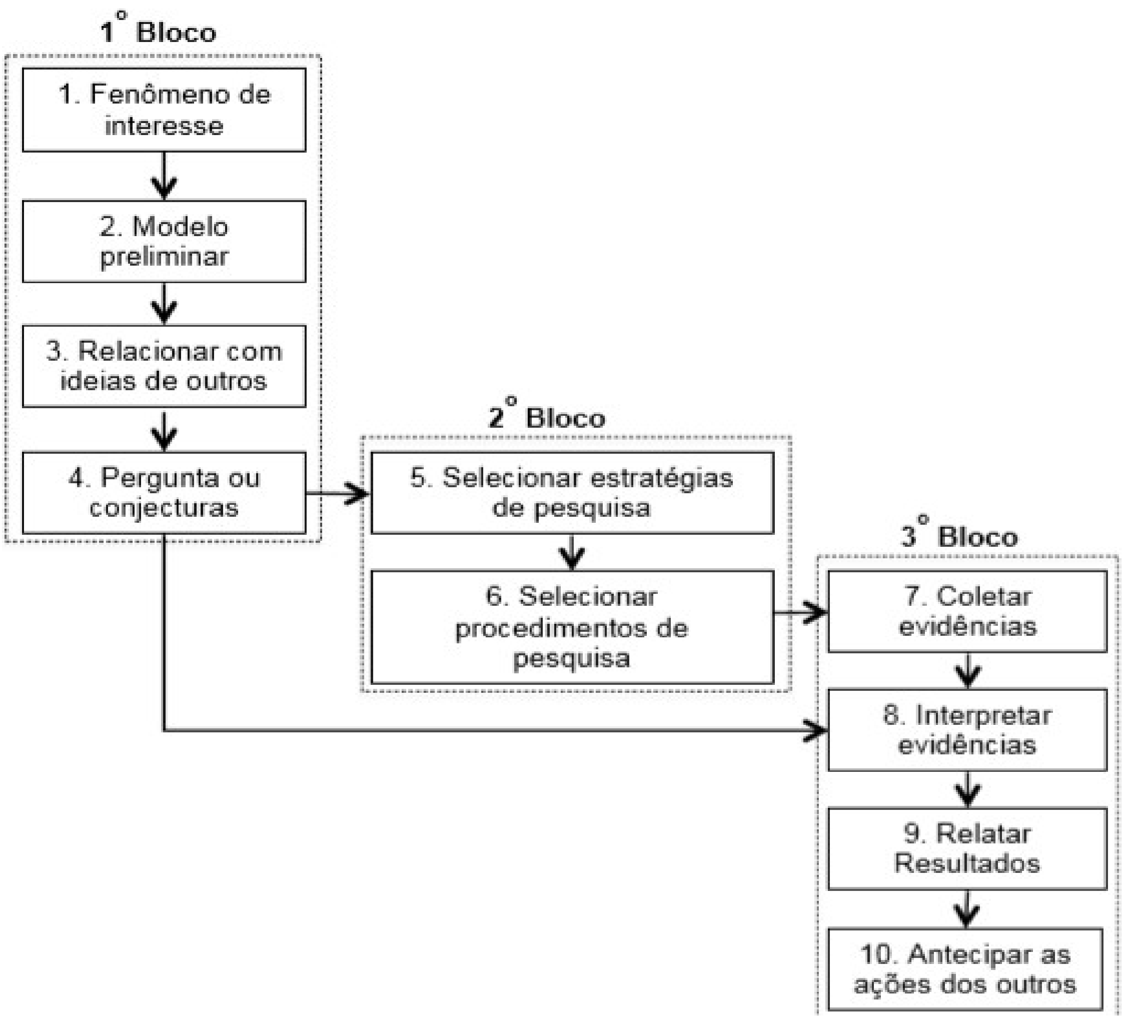
Usamos como guia para nossa investigação o modelo metodológico desenvolvido por Thomas A. Romberg[9], publicado em Romberg (2007). Com o objetivo de orientar os pesquisadores, ele apresentou, em seu modelo, um conjunto de atividades para orientar outros pesquisadores auxiliando-os durante sua pesquisa. Ele, Romberg, enfatizou que, esse modelo não é algo obrigatório a ser seguido, poderá servir apenas como uma orientação para

[9] Matemático e educador matemático, professor da Universidade de Wisconsin, no National Center for Research in Mathematical Sciences Education, Madison, USA.

pesquisadores novos no campo. Argumentou, também, que seus passos não necessariamente precisam ser seguidos na sequência em que são apresentados.

A seguir, apresentamos os Modelos de Romberg e Romberg-Onuchic, junto a uma descrição da nossa interpretação sobre atividades propostas, evidenciando a diferença entre esses modelos. Veja-se o Modelo de Romberg na Figura 4:

Figura 4 - Modelo de Romberg

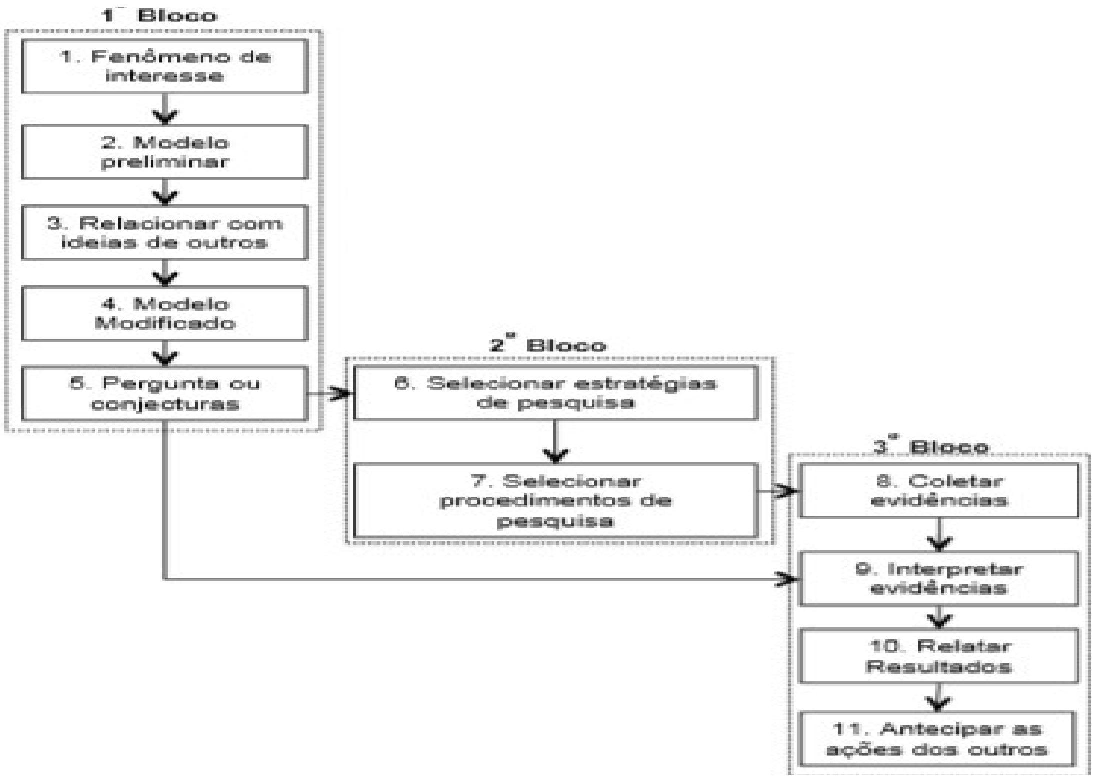


Fonte: Romberg (2007)

O modelo de Romberg (2007) é composto por 10 atividades distribuídas em três blocos: sendo o primeiro das atividades de 1 a 4, em que o pesquisador deve definir um problema particular a ser investigado; o segundo, corresponde às atividades de 5 e 6 que orientam o pesquisador na tomada de decisões de que tipo de evidências coletar e de como analisá-las; e, o terceiro de 7 a 10, momento em que o pesquisador deverá tirar suas conclusões, por meio dos dados coletados e divulgar os resultados na comunidade científica. Das atividades apresentadas nesse modelo, o Fenômeno de Interesse é o mais importante (ROMBERG, 2007).

Esse modelo vem servindo de referência às pesquisas desenvolvidas pelo GTERP[10] há alguns anos. Esse grupo adotou o Modelo de Romberg como metodologia científica para suas pesquisas e acrescentou-lhe, uma nova atividade a ser desenvolvida: o modelo modificado, além de novas interpretações, com a necessidade de colocar o procedimento geral em ação. O modelo de Romberg com as sugestões mencionadas passou a ser denominado, em Onuchic e Noguti (2014), por Modelo de Romberg-Onuchic, apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Modelo de Romberg-Onuchic



Fonte: Onuchic et al (2014)

Note-se, na Figura 2, que no primeiro bloco, foi acrescentado o "Modelo Modificado", estando esse concentrado em 5 atividades. O segundo Bloco, continuou com 2 atividades, e o Terceiro Bloco com 4, totalizando 11. A seguir, será apresentada uma descrição de cada uma das atividades do Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic:

1) Fenômeno de Interesse: O Fenômeno de Interesse, também chamado por alguns pesquisadores de objeto de pesquisa, nasce de uma curiosidade dos pesquisadores no contexto em que ele está inserido na comunidade onde reside, no trabalho, na escola ou em qualquer

---

[10] Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, sob a coordenação da professora. Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic.

ambiente a que ele frequente. Segundo Onuchic e Noguti (2014, p. 60) "[... em geral o fenômeno de interesse se manifesta no envolvimento de professores; de alunos; de como se relacionam professores e alunos; de como os alunos se comportam nesse processo; de como os professores ensinam e como os alunos aprendem".

2) Modelo Preliminar: O Modelo Preliminar é uma ideia inicial que um pesquisador/a tem dos procedimentos ou etapas que deverá seguir durante a pesquisa. Essas etapas são suposições feitas pela pesquisadora e como um guia para suas ações. Através desse Modelo Preliminar surgirá a pergunta para a pesquisa e também evidenciará as variáveis-chave para fundamentar a pesquisa. Segundo Romberg (2007, p. 99), "um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis de fenômeno de interesse e de como estes aspectos estão relacionados, depois os ilustra em um modelo".

3) Relacionar com as ideias de outros: Relacionar com ideias de outros significa, primeiramente, ouvir pessoas que já passaram pelos mesmos caminhos onde pretendemos trilhar, isto é, ouvir pesquisadores que já trabalharam sobre os mesmos temas que queremos investigar, ou sobre alguma das variáveis citadas pelo modelo preliminar (ONUCHIC e NOGUTI, 2014). É nessa atividade que o pesquisador geralmente localizará sua pesquisa dentro do aspecto daquelas já realizadas no campo de estudo em que ela se insere, criando referências teóricas importantes, principalmente para a interpretação das evidências.

4) Modelo Modificado: Como pôde ser visto, o Modelo Modificado não aparece no Quadro 1, apresentado por Romberg, porque, como já dissemos anteriormente, ele é umas das contribuições propostas por Onuchic (2014). A necessidade de um modelo modificado é justificada em Onuchic e Noguti (2014, p.62) quando dizem que: "[..] após 'ouvir os outros', o pesquisador percebe que seu Modelo Preliminar encontra-se defasado ou possui poucas informações para ajudá-lo a formular uma pergunta da pesquisa". Em geral, o modelo modificado é mais abrangente do que o inicialmente proposto.

5) Perguntas ou conjecturas: As Perguntas ou Conjecturas é um dos passos-chave no processo de pesquisa, porque, quando se examina um fenômeno particular, um determinado número de questões potenciais inevitavelmente surge, e decidir quais questões examinar não é fácil. As conjecturas baseiam-se na relação entre as variáveis que caracterizam o fenômeno de interesse e nas ideias sobre aquelas variáveis-chave e sua relação com o Modelo Preliminar (ROMBERG, 2007).

6) Selecionar estratégias de pesquisa: O segundo bloco do modelo metodológico de Romberg-Onuchic inicia-se com a seleção de uma estratégia de pesquisa (Estratégia Geral), que tem como ponto inicial o planejamento das ações necessárias para responder as questões evidenciadas pelo Modelo Modificado relativas ao Fenômeno de Interesse. Durante esse planejamento, são necessárias estratégias auxiliares que possibilitem atingir o objetivo proposto na Estratégia Geral. Como síntese, as estratégias podem ser imaginadas como: O que é preciso fazer para responder as questões da pesquisa?

7) Selecionar procedimentos de pesquisa: Após construir as estratégias, isto é, já sabermos o que devemos fazer para resolver o problema da pesquisa, surge uma outra pergunta: "como devo fazer isso? ". Essa deve ser respondida com a elaboração de procedimentos adequados às estratégias levantadas. Assim, a Estratégia Geral precisa de um Procedimento Geral e cada Estratégia Auxiliar demanda um Procedimento Auxiliar. Após configurado o Procedimento Geral, ele deverá ser aplicado, o que na interpretação desse modelo, Onuchic e Nogutti (2014) chama de colocar o. (Procedimento Geral em ação)

8) Coletar evidências: O terceiro bloco do modelo metodológico de Romberg-Onuchic, refere-se à coleta de evidências. Ao colocar o Procedimento Geral em ação, evidências deverão surgir e, nesse momento, o pesquisador deverá ter habilidade suficiente para selecionar aquelas que servirão para ajudá-lo responder as perguntas da pesquisa. Essas evidências podem ser coletadas por meio de entrevista, pergunta, gravações de áudio e vídeo, observação do pesquisador, teste feito aos investigados, questionário, diário de campo elaborado pelo pesquisador etc.

9) Interpretar as evidências: Ao término da coleta de evidência, é necessário que o pesquisador(a) faça uma análise sobre os dados coletados embasado em uma fundamentação teórica, deve-se interpretar os dados a fim de tirar as conclusões necessárias para dedução da sua pesquisa, ou seja, respondê-las.

10) Relatar resultados: Segundo Romberg (2007), após a interpretação das evidências, é importante relatar, à comunidade de pesquisadores, os resultados encontrados, para que ela possa emitir suas opiniões e fazer críticas sobre o trabalho, o que seria uma espécie de julgamento, feito por outros especialistas, no campo em que a pesquisa foi desenvolvida.

11) Antecipar as ações de outros: Concluindo o que foi proposto pela pesquisa, os resultados devem ser divulgados para a sociedade, dando oportunidade à comunidade de avaliá-los, criticá-los e, possivelmente, sugerir modificações, ou fazer uso desses resultados produzidos para desenvolver novas pesquisas.

4.2 Nossa Pesquisa no Modelo de Romberg-Onuchic

Neste tópico, faremos uma descrição de como nossa pesquisa se configurou dentro do modelo metodológico de Romberg-Onuchic. De acordo com Romberg (2007, p. 51), "as atividades envolvidas em fazer pesquisa englobam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica". Nesse sentido, a pesquisa pode tomar dimensões e direções em que, se ela não estiver bem fundamentada e direcionada, poderá fugir do nosso controle. Por esse motivo, nos apoiamos plenamente no modelo metodológico de Romberg-Onuchic. E, neste tópico, apresentaremos também, em detalhes, os passos da nossa pesquisa distribuídos nas 11 atividades, proposta por esse modelo.

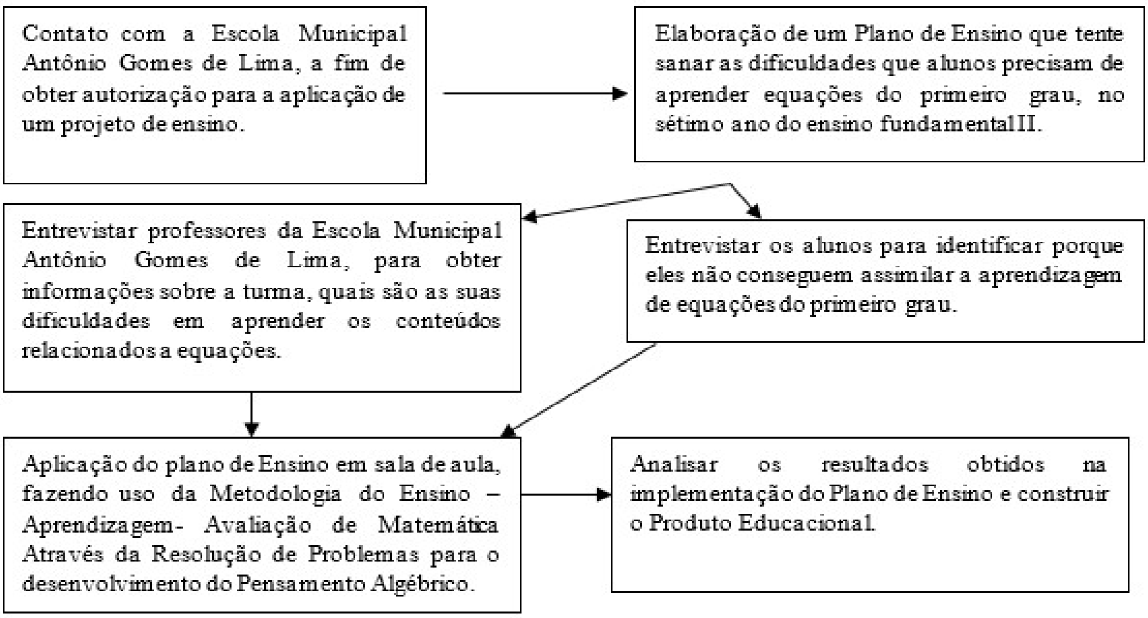
1) Identificando o nosso Fenômeno de Interesse: Durante minha atuação como docente no Ensino Fundamental na Escola Municipal Antônio Gomes de Lima, pude detectar as dificuldades dos alunos em compreender conteúdos matemáticos, principalmente, relacionados à álgebra, por esses conteúdos estarem fundamentados em operações com números variáveis ou desconhecidos, representados por letras e não por algarismos, como os alunos estavam acostumados, exigindo deles, uma mudança na forma de raciocinar. Esse assunto tem desafiado muitos professores, além disso, o que se percebe nos estudantes é uma desmotivação ligada a um "conteudismo" puramente teórico, sem ligação com o dia a dia deles e, até mesmo, sem justificativa, mesmo pela própria matemática, segundo suas afirmações e ações durante as aulas.

A aplicação de conteúdos estudados na escola no cotidiano dos educandos é discutida por Maslow (1943), qual afirma que as condições necessárias para melhor rendimento na aprendizagem dos conceitos estudados na escola, está na realização e satisfação/prazer naquilo que o indivíduo desenvolve, isto é, motivação. E Segundo Pilleti (2002, p.69), "se um aluno não está conseguindo aprender, é provável que sua dificuldade seja proveniente da não-satisfação de alguma ou de várias das necessidades que antecedem, na hierarquia, a necessidade do conhecimento".

Diante do exposto e no afã de poder detectar elementos geradores que dificultam a aprendizagem dos conteúdos por nós investigados, e fazer propostas de soluções, propusemos um trabalho que buscasse a melhoria da aprendizagem em matemática, e, para isso, inicialmente, detectamos Fenômenos de Interesse desta pesquisa: **Aprendizagem de Equações do Primeiro Grau.**

2) Modelo Preliminar dos Pesquisadores (a): Seguindo o modelo metodológico de Romberg-Onuchic, chegamos à parte em que foi preciso apresentar uma ideia geral das etapas, que, a priori, seriam necessárias para executar essa pesquisa, ou seja, um conjunto de ações que se materializou em nosso Modelo Preliminar, que pode ser visto na Figura 6:

Figura 6 – Modelo Preliminar da Pesquisadora



Fonte: Elaborado pela Autora

O primeiro passo para que essa pesquisa se concretizasse, foi o contato com os responsáveis da Escola Municipal Antônio Gomes de Lima, ou seja, diretora, coordenadora e professora da turma em que aplicamos um plano de ensino, chamado por nós de Professora Participante.

As perguntas em entrevistas destinadas aos alunos serviram para identificar quais as principais dificuldades na disciplina de matemática, o que eles gostariam que mudasse para melhorar a aprendizagem nas aulas de matemática, dentre outros questionamentos. As perguntas em entrevista com a professora participante serviu para verificar quanto tempo ela se dedica à preparação de suas aulas, se ela participa de eventos científicos regularmente e, principalmente, quais as dificuldades que, na visão dela, os alunos enfrentam para compreender equações do primeiro.

Esse modelo preliminar apontou variáveis que necessitariam ser levadas em conta para o êxito dessa pesquisa. Tais variáveis, que chamamos de variáveis-chave, são: Pensamento Algébrico, Álgebra e Resolução de Problema. Sobre para cada uma dessas variáveis-chave, foi necessário um estudo meticuloso, e o resultado desses estudos se configurou nos capítulos 2 e 3, deste trabalho.

3) Nossa Pesquisa frente ao Relacionar com as Ideias de Outros: Relacionar com as ideias de outros, segundo Romberg (2007), significa primeiramente ouvir o que outros pesquisadores já escreveram sobre o tema da nossa investigação. Nos capítulos 2 e 3, apresentamos detalhadamente como se constituiu a relação do que pretendíamos investigar com os trabalhos já desenvolvidos por outros pesquisadores, ou seja, o que outros pesquisadores já fizeram sobre assuntos que investigamos. Isso é importante para nos auxiliar no movimento de triangulação entre os dados da pesquisa, a literatura e os pesquisadores.

4) Modelo Modificado da pesquisadora: Depois de relacionarmos nossa pesquisa com as de outros pesquisadores nossas experiências aumentaram, porém, apesar de ampliarmos a visão sobre elementos importantes da nossa pesquisa, achamos que o nosso modelo preliminar seria suficiente para prosseguirmos na nossa investigação. Diante disso, não foi necessário criar um Modelo Modificado.

5) Identificando nossas Perguntas ou Conjecturas: O Modelo Preliminar foi criado tendo como base o Fenômeno de Interesse “A aprendizagem de Equações do Primeiro Grau”, para os alunos do sétimo ano do ensino fundamental II, na cidade de Rio Verde – Goiás, da Escola Municipal Antônio Gomes de Lima. Diante disso, acreditamos ser necessário, para conduzir a nossa investigação, elaborar a seguinte questão norteadora: **Como entender e desenvolver o pensamento algébrico, de estudantes do sétimo ano do ensino fundamental II, sobre equações do primeiro grau através da resolução de problemas?**

Depois de relacionar com ideias de outros, fizemos uma reflexão como o foco do nosso objetivo e achamos melhor reformular a pergunta norteadora da nossa pesquisa, para: **Como a**

resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico na aprendizagem de equações do primeiro grau com os alunos do 7° ano do ensino fundamental II?

Após novas reflexões oriundas de leituras feitas em grupo de estudo com os colegas do mestrado, achamos que não conseguiríamos responder essa pergunta, então reformulamos novamente a nossa pergunta de pesquisa, chegando à pergunta definitiva, orientadora no restante do desenvolvimento deste trabalho: **Como a resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do 7° ano do ensino fundamental e suas implicações na aprendizagem dos conceitos relacionados às equações de primeiro grau?**

6) Selecionar Estratégias da Nossa Pesquisa: O Modelo de Romberg-Onuchic, em seu segundo bloco, orienta-nos a selecionar estratégias e procedimentos, a fim de que possamos direcionar para o objetivo principal da nossa investigação. Essas estratégias precisam ser pensadas de forma que os procedimentos elencados por elas, quando colocados em ação, sejam capazes de produzir resultados significativos à nossa pesquisa, isto é, sejam capazes de fornecer evidências suficientes para respondermos a nossa pergunta. Frente à questão proposta: "**Como a resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do 7° ano do ensino fundamental e quais as suas implicações na aprendizagem dos conceitos relacionados às equações de primeiro grau?"** propusemos um plano de ação com a seguinte Estratégia Geral: Criar um plano de ensino a ser aplicado para os alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental II da Escola Municipal Antônio Gomes de Lima. Para que a Estratégia Geral se consolidasse, foi necessário assumir as seguintes Estratégias Auxiliares:

- E1: Consultar a Diretora e a Coordenadora da Escola Municipal Antônio Gomes de Lima em Rio Verde Goiás, – sobre a possibilidade de aplicação do plano de ensino, em uma disciplina de matemática dessa escola;
- E2: Consultar a professora da disciplina de matemática sobre a possibilidade de um trabalho colaborativo, (Esse trabalho colaborativo em sala de aula foi devido à professora pesquisadora estar de licença para o mestrado.) dela com a Professora-Pesquisadora, na aplicação do plano de ensino;

- E3: Elaborar um Roteiro de Atividades para a disciplina de matemática, que utilize a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;
- E4: Elaborar um Termo de Compromisso e Responsabilidade entre os alunos e a Professora-Pesquisadora, de acordo com o Conselho de Ética;
- E5: Executar o roteiro de atividades;
- E6: Analisar resultados e tirar conclusões.

7) Selecionar Procedimento da Nossa Pesquisa: Nesse bloco, foi necessária a apresentação do procedimento Geral originando da estratégia geral. Este procedimento foi " a criação de um Plano de Ensino a ser aplicado na disciplina de matemática. Para que o Procedimento Geral pudesse ser desenvolvido, precisamos assumir Procedimentos Auxiliares:

- P1: Reunião com a Diretora e a Coordenadora da Escola Municipal Antônio Gomes de Lima do turno matutino, em Rio Verde, Goiás;
- P2: Reunião com a professora de Matemática;
- P3: Elaboração do Roteiro de Atividades para a disciplina de matemática, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema;
- P4: - Elaboração de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) entre os alunos e a Professora-Pesquisadora;
- P5: Execução do Roteiro de Atividades, pelos participantes do sétimo ano do ensino fundamental;
- P6: Análise dos Resultados e conclusões.

A seguir, descreveremos como ocorreu cada um dos procedimentos auxiliares citados:

P1) Reunião com a Diretora e Coordenadora do Turno Matutino: A proposta de pesquisa que apresentamos foi elaborada com o propósito de ser realizada na Escola Municipal Antônio Gomes de Lima, escola a que pertence a Professora-Pesquisadora. A autorização para a aplicação de qualquer projeto que vise à sala de aula, nessa escola, é de competência da Diretora. Por esse motivo, fez-se necessária uma reunião com a diretora e coordenadora do curso do turno matutino, que aconteceu no ano de 2018, na cidade de Rio Verde, para obtermos autorização para a aplicação do plano de ensino nessa escola. A diretora e coordenadora deram total apoio e liberdade para aplicação desse Plano de Ensino.

P2) Reunião com a professora de Matemática: A aplicação do Plano de Ensino contou com a colaboração da professora de matemática da turma onde o plano de ensino foi aplicado, que designaremos neste texto por Professora-Colaboradora. A Professora-Pesquisadora não pretendia assumir totalmente a disciplina de matemática, apenas entraria em sala de aula em momentos pré-estabelecidos, assumindo, o papel de professora da disciplina, porém, contando com a ajuda da Professora-Colaboradora. Para obter a autorização e a colaboração da professora da disciplina, fez-se necessária uma reunião com ela, para apresentar a proposta da pesquisa e pedir sua autorização e colaboração na aplicação do plano de ensino, em sua turma de matemática. A professora de matemática também deu apoio à aplicação desse plano no segundo semestre de 2018 e se colocou à disposição durante todo decorrer do processo.

Após negociação entre a Professora-Pesquisadora e o Professora-Colaboradora, ficou decidido que a Professora-Pesquisadora acompanharia todas as aulas no decorrer da aplicação do plano de ensino, assumiria o papel de professora da disciplina de matemática, e, o plano de ensino deveria ser ministrado com um mínimo de 30 aulas de 50 minutos, previsto no planejamento escolar para ministrar conteúdos de equações do primeiro grau.

P3) Elaboração do Roteiro de Atividades para a disciplina de matemática, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema: Na elaboração do roteiro dessas atividades, foi necessário fazer problemas que relacionavam com o dia a dia desses alunos. Assim uns dos primeiros passos para criar essas atividades foi pesquisar em que os pais desses alunos trabalhavam, e o que esses alunos gostavam de fazer nos finais de semana. Depois passamos para o segundo passo, que foi fazer um "*estado da arte*" isto é buscar em trabalhos de outros pesquisadores que falavam sobre o pensamento algébrico e resolução de problemas, para podermos construir os problemas proposto neste trabalho.

P4) Elaboração do TCLE e TALE: Esses termos foram construídos de acordo com as normas da Plataforma Brasil, em negociação entre as Professoras Pesquisadores e Colaboradores e os alunos da turma do sétimo ano do Ensino Fundamental II. Eles serviram para definir a relação entre professor e alunos durante todo o processo de investigação na sala em aula. Nesses documentos, as Professoras, Pesquisadora e Colaboradora apresentaram uma proposta inicial dos termos que eles consideraram necessários e convenientes para ambas as partes (professoras e alunos), de forma a tornar possível o desenvolvimento das atividades de ensino e aprendizagem em sala de aula. As sugestões e modificações, que pudessem surgir, deveriam ser analisadas e aprovadas pelos sujeitos envolvidos diretamente nesse trabalho de investigação. Após acordo firmado pela maioria, esse documento será assinado por todos os presentes. Uma cópia desses documentos se encontrara no Anexo A (TCLE) e no Anexo B (TALE), neste trabalho.

P5) Execução do Roteiro de Atividades pelos participantes do sétimo ano do ensino fundamental: Durante a aplicação do plano de Ensino, não tivemos o propósito de fazer qualquer alteração no conteúdo de Equações do Primeiro Grau da disciplina de Matemática, nem mesmo criticar ou propor qualquer alteração curricular. O que pretendíamos era propor, na introdução do conceito de equações do primeiro grau, uma metodologia diferente da tradicional, que fosse capaz de promover uma aprendizagem com significado no contexto da escola investigativa, trazer as ideias oriundas dos significados produzidos para um nível de entendimento dos alunos, através de uma relação com conhecimentos que eles já possuíam.

Os problemas geradores, que apresentaremos no plano de ensino que se encontra no Apêndice A desse trabalho, com as atividades inicialmente propostas para serem desenvolvidas em cada encontro, foram selecionados ou criados, pela Professora-Pesquisadora levando em conta os conceitos referentes ao conteúdo de equações do primeiro grau que seriam introduzidos durante as aulas. Da mesma forma, os encontros que utilizariam a metodologia apresentada pelas Professoras Pesquisadora e Colaboradora deveriam dar continuidade às aulas anteriores ministradas pela professora Colaboradora sem provocar interrupções no processo de ensino. Apresentamos no Capítulo 5, os resultados da implementação desse Plano de Ensino.

P6) Analisar Resultados e tirar conclusões: Para análise dos resultados, foram utilizados recursos que serão escritos detalhadamente no item 8, Método de coleta das Evidências, e, para tirar conclusões serão apresentados no item 9, métodos da interpretação das Evidências desse mesmo capítulo.

8) Método de Coleta das Evidências: A seguir, exporemos em detalhes alguns dos recursos de coleta de dados e as estratégias que foram utilizadas durante a nossa investigação com os alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental:

I) Um relatório de campo construído através das observações da Professora-Pesquisadora foi estruturado levando-se em conta os seguintes itens: o ambiente escolar, composto pelo meio físico, econômico, social e cultural; o ambiente humano composto pelos professores, estudantes, administradores e pais; e, ambiente de aprendizagem promovido pela relação professor-aluno.

II) Aplicação do Plano de Ensino, com o objetivo de promover ações pedagógicas, através da resolução de problemas, evidenciando suas contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico, no ensino e na aprendizagem de equações do primeiro grau, para os alunos do 7° ano do Ensino Fundamental na cidade de Rio Verde.

9) Método de Interpretação das Evidências: No capítulo 5 (Descrição das Atividades desenvolvidas e Análise), são apresentadas as análises de todo o processo ocorrido na aplicação de cada atividade proposta no Plano de Ensino, e executada. Essa análise ocorreu de acordo com a fundamentação teórica deste trabalho. Examinaremos as evidências relevantes, levantadas durante a implementação das atividades na aplicação do plano de ensino mencionado anteriormente, buscando elementos indispensáveis para responder à pergunta de pesquisa e, a partir disso, obter resultados para nossa pesquisa. Assim, com tais resultados, melhorar e validar o nosso Produto Educacional, ou seja, uma sequência didática construída a partir do plano de ensino trabalhado. Esse produto educacional tem por objetivo ajudar professores e investigadores a melhorar sua forma de ensino sobre equação de primeiro grau com observância no pensamento algébrico dos estudantes, além de promover condições para desenvolvimento de novas pesquisas nessa linha.

10) Relatar Resultados à Comunidade Científica: Depois de analisadas e interpretadas as evidências oriundas da aplicação do Plano de Ensino (Apêndice A) propostas no capítulo 5 desse trabalho, elas se transformaram em resultados que se solidificaram nesta dissertação, entre as quais se incluem na qual inclui uma sequência didática, o nosso produto educacional apresentado no Apêndice B desta. Segundo Romberg (2007), todos os resultados de uma pesquisa científica devem ser apresentados à comunidade científica para passar por um processo de avaliação, importante para um feedback ao pesquisador, evidenciar falhas e dar a ele a oportunidade de corrigi-las e melhorar outros elementos. Esse relato à comunidade científica se deu por meio de discussão em grupos, apresentação de alguns elementos desta pesquisa em eventos da área e um processo de qualificação, exigida nos trabalhos de mestrados. A participação nos grupos de estudo, eventos científicos, oficinas, minicursos e as discussões realizadas sobre uma pesquisa, tanto no seu início no seu desenvolvimento e no fim são importantes para sua configuração e amadurecimento (ALLEVATO, 2004).

11) Antecipar as Ações dos Outros dos Pesquisadores (a): Os resultados desta pesquisa serão divulgados para a sociedade e futuramente dela poderemos buscar novos elementos e vertentes dos quais possam originar artigos capazes de contribuir ainda mais com o campo da Educação Matemática. Salomon (1999, p. 219) considera: “A importância da pesquisa científica se mede pelas mudanças que acarreta em nosso corpo de conhecimentos e/ou pelos novos problemas que suscita”. Então outros pesquisadores, poderão, a partir dessas experiências propostas neste trabalho, sugerirem modificações e elaborarem novas propostas para a realização de novos trabalhos para que possam contribuir com o ensino e aprendizagem.

5 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS E ANÁLISE

Neste capítulo, iniciamos o terceiro Bloco do Modelo de Romberg (2007). Começamos descrevendo como se deu a coleta dessas evidências após colocarmos o Procedimento Geral em ação. Em seguida, mostramos como foi feita a seleção e interpretação das evidências coletadas e, por fim, como se deu o processo de uma análise dessas evidências com o foco no nosso objetivo, centrado na busca de uma resposta à pergunta da pesquisa.

5.1 Procedimento Geral em Ação

Colocar o Procedimento Geral em ação significa, neste trabalho, implementar o Plano de Ensino, que foi elaborado com o objetivo de coletar evidências suficientes para responder as perguntas da pesquisa. Para isso, ele foi dividido em três partes. Na primeira, Parte I, o foco principal foi identificar ou entender que tipo de pensamento esses alunos possuíam. Então aplicamos atividades compostas com problemas para eles resolverem sozinhos, a fim de identificar e analisar se esses alunos já pensavam algebricamente. Na segunda, Parte II, o foco foi promover ações para levar os alunos a desenvolver um pensamento algébrico dentro de cada uma das vertentes.

Para isso, elaboramos atividades compostas com problemas relacionados ao seu cotidiano em que instigassem os alunos a desenvolverem seu pensamento algébrico dentro de cada uma das três vertentes. Depois a Professora-Pesquisadora aplicou novamente essas atividades, mas, fazendo, dessa vez, as intervenções necessárias para que os alunos desenvolvessem um Pensamento Algébrico, com intuito de melhorar sua aprendizagem.

Na terceira parte, Parte III, o foco foi introduzir o conceito de equações do primeiro grau. Para isso, foram aplicadas atividades que levassem o aluno a conceber o conceito de equações com uma extensão da terceira vertente do pensamento algébrico. Nas duas últimas etapas, utilizamos a Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pois essa metodologia, se trabalhada adequadamente, poderia levar os alunos a desenvolver um Pensamento Algébrico e, consequentemente, aprender equações do primeiro grau.

5.1.1 Os Encontros

Os encontros aconteceram nos momentos em que a Professora-Pesquisadora esteve em sala de aula, aplicando o Plano de Ensino, trabalhando, observando e analisando cada acontecimento. A Professora-Pesquisadora registrou em mídia (gravações de áudios e vídeos) e em diário de campo todos os detalhes desses encontros.

O diário de campo foi preenchido imediatamente ao término de cada encontro e cada anotação possuía características como: descrição, um relatório detalhado de tudo que havia ocorrido em sala de aula; e o olhar da pesquisadora: observações levando em conta, a percepção da pesquisadora, com relação ao comportamento dos alunos, da Professora Colaboradora e dela própria como professora. Esses encontros foram trabalhados de diferentes formas:

* Usando a Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para que os alunos desenvolvessem o Pensamento Algébrico.

* A Professora-Pesquisadora, partindo de um problema de nível básico, introduzia o conceito de Equações do Primeiro Grau, sendo que a maneira trabalhada seguiu o roteiro descrito.

* Utilizando atividades impressas, distribuídas para cada aluno, pedindo para que eles as resolvessem, e, em seguida, expusessem sua solução na lousa. Essa exposição desencadeava uma discussão sobre as soluções apresentadas e outros elementos pertinentes às atividades.

Além dessas formas trabalhadas, citadas anteriormente, a Professora-Pesquisadora utilizou um dos encontros para fazer uma avaliação diagnóstica sobre as Equações do Primeiro Grau, Resolução de Problemas.

Na descrição desses encontros, em determinados momentos, apresentaremos alguns diálogos entre os alunos e entre os alunos e a Professora-Pesquisadora. É conveniente esclarecer que, para uma melhor organização e preservação da identidade dos estudantes, adotamos as seguintes notações:

A1, A2, ..., A42 denotarão cada um dos alunos que participou do diálogo;

- P denota a Professora-Pesquisadora;

- Usaremos a palavra “Alunos” quando nos referirmos à fala de mais de um aluno, não necessariamente todos;

- Usaremos (...silêncio) para indicar que houve um instante de silêncio durante um diálogo;

- A escrita entre parênteses não faz parte do diálogo, são apenas comentários para ajudar o leitor a entender o diálogo.

Durante a nossa análise, apresentada em detalhes ao término de cada descrição do que ocorreu em sala de aula, buscamos apoio em um dos pesquisadores do nosso referencial teórico sobre Pensamento Algébrico, para tentar explicar se houve elementos suficientes que nós garantisse a emersão de algum pensamento algébrico e, se sim, qual vertente esse pensamento faz parte. Para isso, como já mencionamos no Capítulo 2, usaremos aquele pesquisador com sua denominação própria de cada vertente de pensamento, que melhor evidencia o pensamento algébrico desenvolvido por cada estudante. Às vezes, usaremos mais de uma denominação para que o leitor perceba e se convença de que o pensamento emergindo naquele momento realmente faz parte da vertente de pensamento algébrico mencionada.

1º Encontro

No primeiro encontro (20 de agosto de 2018), compareceram quarenta alunos dos quarenta e dois matriculados. A Professora-Pesquisadora iniciou com uma apresentação expositiva e dialogada (professora e alunos). Nesse momento foi lido para os alunos e apresentado o TCLE, ao qual explicava o que se pretendia com a pesquisa. Em seguida, foram entregues a cada aluno duas vias desse documento para que levassem para casa, pegassem a assinatura de seus pais e os devolvessem no outro dia. Além disso, os estudantes foram orientados a comunicarem a seus pais que, se tivessem dúvidas, fossem à escola procurar pela Professora-Pesquisadora para esclarecimentos.

2º Encontro

Neste encontro (21 de agosto de 2018) foram entregues à Professora-Pesquisadora o TCLE, anexo A assinado pelos pais. Como era esperado, alguns pais compareceram à escola pedindo esclarecimentos sobre alguns pontos do documento que eles ainda não haviam compreendido, e essas dúvidas foram esclarecidas pela Professora-Pesquisadora. Depois, foram entregues para cada aluno o TALE, anexo B, onde é necessário apenas assinatura dos estudantes e da Professora-Pesquisadora. Antes de ser assinado, foi feita uma leitura desse documento na sala.

3º Encontro

Neste encontro (22 de agosto de 2018) estava previsto fazer a entrevista oral com cada aluno, mas devido à quantidade de alunos, foi necessário mudar a estratégia e imprimir para cada aluno as perguntas da entrevista para que eles as respondessem por escrito. Também foi entregue à Professora-Colaboradora um questionário para ela responder.

4° Encontro

Este encontro (23 de agosto de 2018) foi uma aula de observação pela Professora-Pesquisadora, anexo C, observando tanto a Professora-Colaboradora com os alunos. Através desta observação foi constatado, pela pesquisadora, que o plano de aula é feito semanalmente; a turma era composta por 42 alunos; a escola dispunha de material didático como televisão, retroprojetor, data Show, jogos pedagógicos e dentre outros. Observou também que, a sala de aula era pequena pela quantidade de alunos desta turma. Nessa aula, a professora estava finalizando o conteúdo sobre números racionais e, na próxima aula, começaria os conteúdos relacionados à nossa pesquisa, ou seja, equações do primeiro grau. A pesquisadora observou que a turma era muito prestativa e mantinha um comportamento disciplinar.

5 ° Encontro

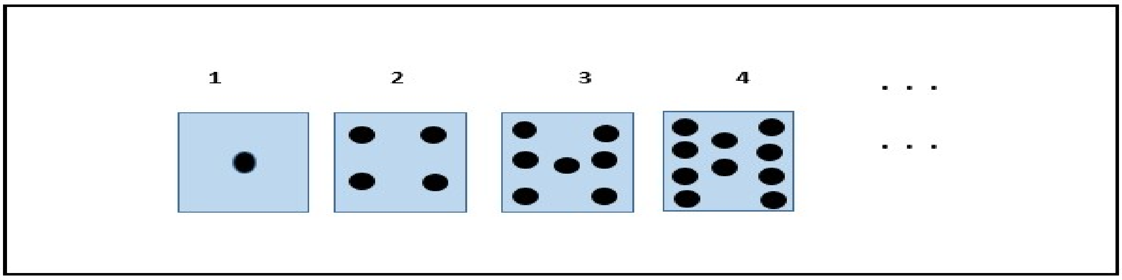
Já, a partir deste encontro (27 de agosto de 2018), começaram as atividades previstas no plano de ensino, estratégia geral da pesquisa. Neste primeiro encontro de pesquisa, compareceram quarenta alunos dos quarenta e dois matriculados. A Professora-Pesquisadora iniciou a aula com o primeiro problema da atividade 1, proposto no Plano de Ensino. Nessa aula, ela entregou, para cada aluno, uma cópia impressa a atividade 1. Após receberem o material, os alunos ficaram em silêncio por alguns instantes, lendo o problema.

A Professora-Pesquisadora seguiu as instruções de trabalho de acordo o roteiro estabelecido no Capítulo 4, ou seja, o objetivo da atividade foi verificar se o aluno tinha ou não um pensamento algébrico, e, futuramente o Problema 1, seria reaplicado novamente.

Atividade 1

Problema 1) Observando a Figura 7, responda:

Figura 7 – Sequência de imagens



Fonte: Adaptado de Souza (2015; 2018)

a) Quantas bolinhas terá a imagem 6 dessa sequência?

b) Quantas bolinhas terá a imagem 8 dessa sequência?

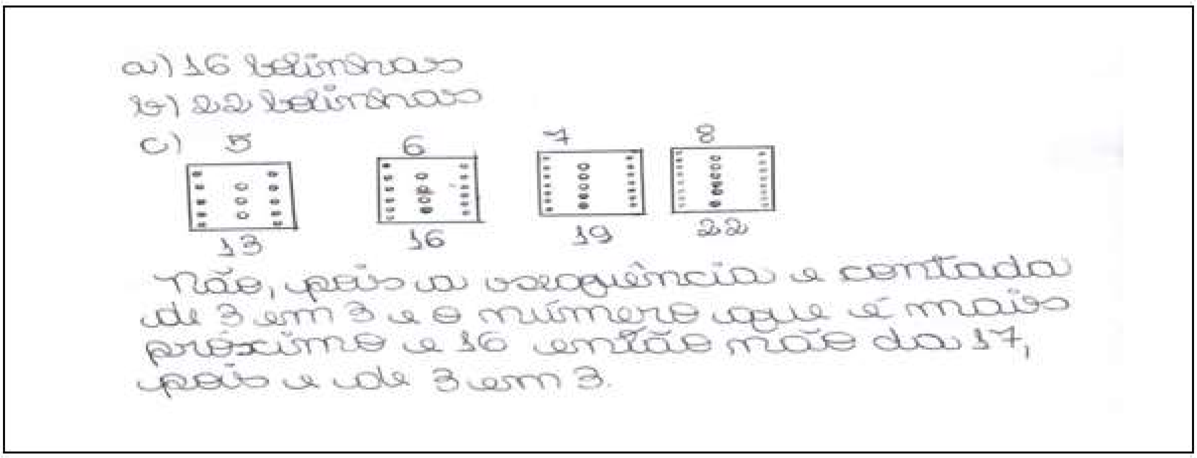
c) Existe, nesta sequência, uma imagem com 17 bolinhas? Explique.

A pesquisadora entregou uma cópia impressa do Problema 1 a cada aluno. Em seguida, ela pediu que os alunos lessem o problema e seguiu-se o momento do entendimento do enunciado do problema. Após a leitura, foi dado um tempo para que eles tentassem resolvê-lo. As professoras, Pesquisadora e Colaboradora, seguindo orientações Metodológica de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, procuraram não fazer nenhuma interferência antes que os estudantes lessem, procurassem e entendessem o problema. Após a leitura e entendimento, foi necessário que as professoras relembrassem, com os alunos, as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Logo depois, seguiu-se o momento de resolução, momento em que as professoras agindo como mediadoras incentivavam e questionavam os alunos, a fim de guiá-los ao caminho que os levassem à solução do problema.

Nesta aula, estavam presentes 34 alunos e, destes, apenas 14 conseguiram resolver corretamente o problema. A seguir, apresentaremos na descrição, à nossa análise, do processo de resolução desse problema pelos alunos, sob a mediação das professoras Pesquisadora e Colaboradora.

A aluna A20 desenhou as imagens e criou também, um padrão: deixando três bolinhas, sem pintar em cada imagem, dizendo que a sequência caminhava de 3 em 3, conforme a figura 8:

Figura 8 – Resolução feita pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

A aluna A20 segundo Kaput (2008), fez uso da primeira vertente do pensamento algébrico, que é perceber a existência de padrão, isso pode ser observado na sequência das figuras feitas por ela. Além disso, percebemos, de acordo com Radford (2009), que ela também utilizou a segunda vertente do pensamento algébrico, pensamento contextual, quando escreveu a mensagem de texto “ *Não, pois a sequência é contada de 3 em 3 e o número que é mais próximo é 16, então não dá 17, pois é de 3 em 3*.”, ou seja, ela justificou por meio de palavras o que entendeu.

Problema 2) Larissa tem R$ 20,00 a mais que Carlos e juntos eles têm exatamente a quantia necessária para comprar dois DVDs, ilustrados pela Figura 9:

Figura 9 – DVDs

Fonte: Elaborado pela Autora

Quantos reais tem cada um deles (Carlos e Larissa)?

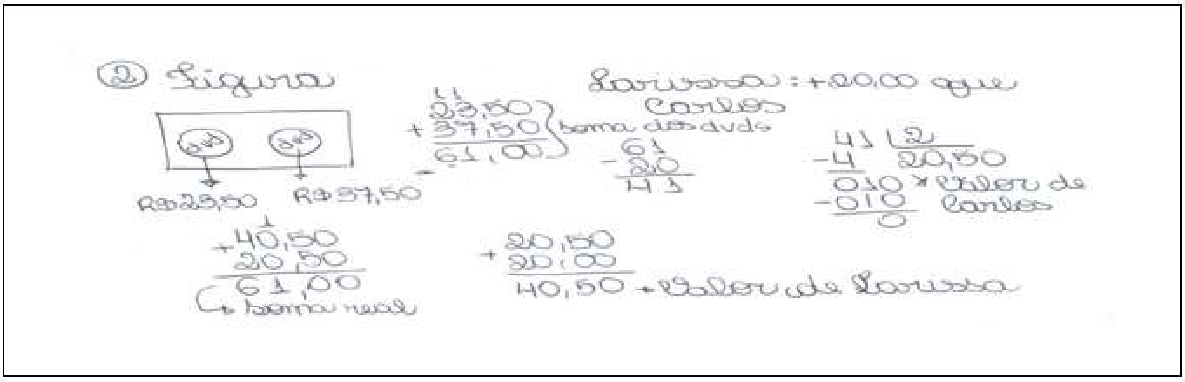
Nesta aula, estavam presentes 35 alunos e seguiu-se a mesma dinâmica da aula anterior, isto é, a proposição do Problema 2, com um tempo para entendimento, resolução e socialização dessa resolução. Observamos que 29 alunos não conseguiram resolver o Problema 2. A Figura 10 ilustra um momento ocorrido durante a aplicação desse problema. Nesse momento, ocorria a “***Leitura individual**, após a entrega de uma cópia do problema a cada aluno e a solicitação de sua leitura*”, de acordo com o roteiro apresentado pela metodologia de ensino utilizada pelas professoras, durante toda a implementação das atividades.

Figura 10 - Aplicação do problema 2

Fonte: Dados da pesquisa

Como já mencionamos, um número pequeno de alunos conseguiu resolver o problema. Umas das alunas, a A20, conseguiu interpretar o problema. Ela desenhou uma figura representando os DVDs, usou o princípio aditivo e multiplicativo, mostrando novamente a presença da primeira e segunda vertente do pensamento algébrico. A solução apresentada por A20 é ilustrado pela Figura 11:

Figura 11 - Resolução feita pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

Para entendimento do que ocorreu em sala de aula, apresentamos um dos diálogos ocorrido entre a aluna A20 e Professora-Pesquisadora:

P: Como que você resolveu o problema?
A20: Primeiro eu somei os valores dos 2 DVDs.

P: Por quê?
A20: Assim encontraria o total que Larissa e Carlos têm juntos, e, depois, diminuiria 20 reais.
P: Por que 41 dividido por 2?
A20: Porque Larissa já tem 20 reais, então basta somar resultado da divisão que é 20,50, obtendo 40, 50 (Valor de Larissa) e o restante que sobrou R$ 20,50 e o valor de Carlos.

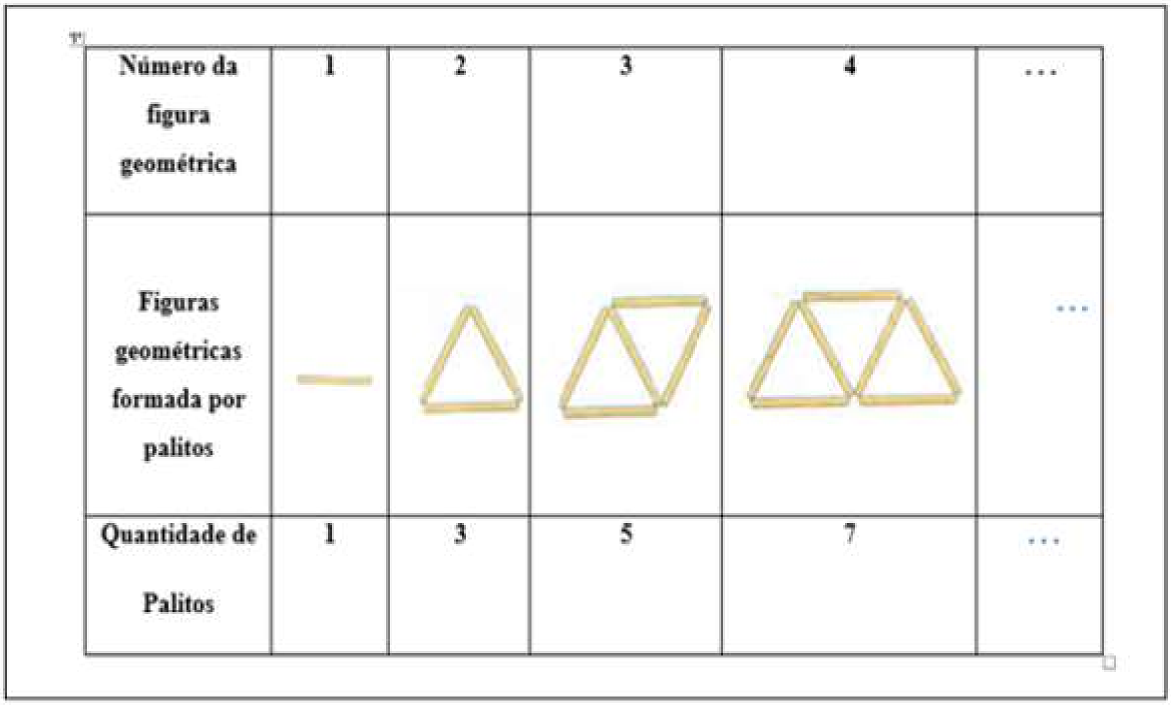
A aluna A20, de acordo com Lins (1992), usou um raciocínio na vertente do aritmeticismo, isto é, constatando porque ela utiliza as operações de adição, divisão com números naturais na resolução do problema 2. Ela revelou também sua capacidade de estabelecer relação entre quantidades, quando mostrou na Figura 11, a soma das quantidades dos valores de DVDs para encontrar o valor de Larissa e de Carlos.

6° Encontro

Nesse encontro (28 de agosto de 2018), compareceram trinta e cinco alunos. A Professora-Pesquisadora iniciou com o terceiro problema da atividade 2 do plano de ensino. Foi entregue impresso esse problema para cada aluno. Os alunos ficaram em silêncio para concentrar na resolução.

Problema 3) Uma sequência de figuras geométricas foi construída, utilizando palitos, como é mostrado na Figura 12 abaixo:

Figura 12 - Sequência de figuras geométricas construídas com palitos



Número da figura geométrica	1	2	3	4	...
Figuras geométricas formada por palitos					...
Quantidade de Palitos	1	3	5	7	...

Fonte: Adaptado Souza (2015; 2018)

a) Quantos palitos deverá formar a figura geométrica 7?

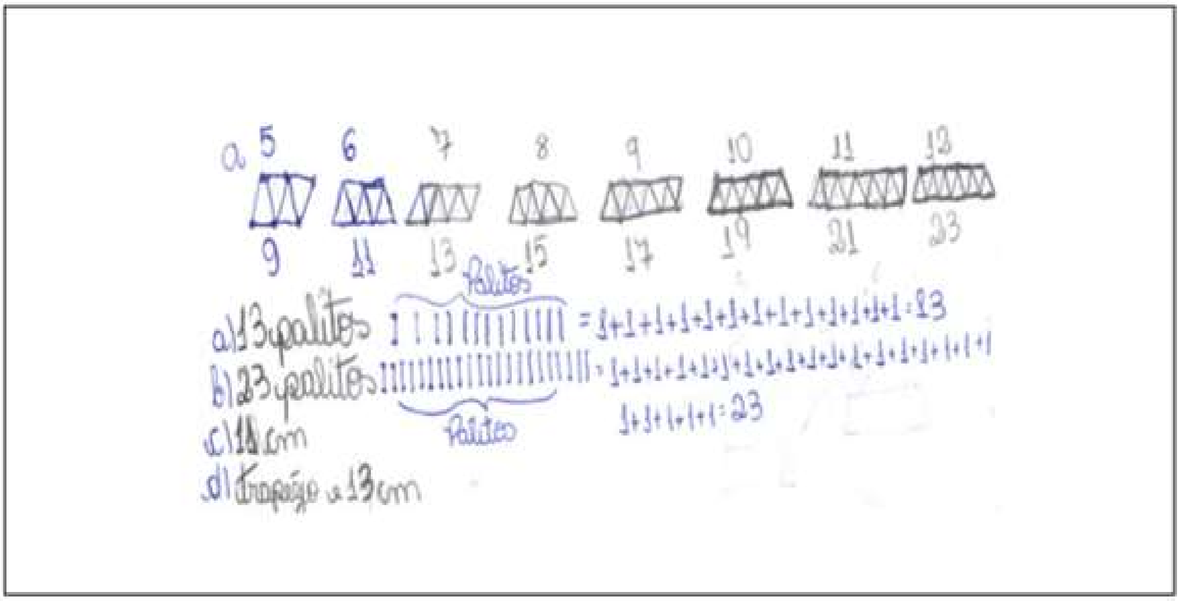
b) Quantos palitos formará a figura geométrica 12?

c) Qual é o perímetro da figura geométrica 10?

d) Qual figura é formada pela figura geométrica 12 e qual o perímetro da figura formada 12?

Após a conclusão dessa atividade, a Professora-Pesquisadora percebeu que 16 alunos haviam acertado o problema, ressaltando que, para que os alunos conseguissem progresso na resolução desse problema foi necessária a interferência da professora para revisar o conteúdo referente a perímetro e figuras geométricas. A aluna A20 desenhou uma continuação da sequência de figuras geométricas que foi apresentada na Figura 13 e escreveu, abaixo de cada figura geométrica, o número de palitos dessa figura, conforme pode ser representado a seguir:

Figura 13 - Resolução feita pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

A pesquisadora observou que os alunos, no geral, demoraram mais tempo, porque queriam desenhar as figuras, até encontrarem a solução. Segue o diálogo entre a professora e uma aluna.

> *P: Por que você desenhou as figuras de cada sequência?*
> *A20: Achei mais fácil para desenvolver a resolução do problema e encontrar a quantidade de palitos da sequência para formar as figuras geométricas.*

De acordo com Lins (1992), a aluna A20 utilizou o princípio aditivo na resolução dos itens a) e b) ao somar, de 1 em 1, a quantidade de palitos para formar a figura geométrica. Na concepção de Radford (2009), a aluna A20 apresentou um pensamento factual quando desenhou as figuras formadas com palitos e observou o aumento de 2 em 2, de um para outra.

7° Encontro

Neste encontro (29 de agosto de 2018), compareceram 33 alunos. E essa aula seguiu a mesma dinâmica das outras. Começou com a entrega de uma cópia impressa do Problema 4, foi feito o processo de entendimento desse problema, seguindo de um tempo para que os estudantes o resolvessem e terminou com uma plenária, na qual se discutiu a resolução, levando-se em conta os caminhos para se chegar à solução.

Problema 4) Considere uma máquina capaz de modificar qualquer valor numérico introduzido em sua entrada, de acordo com o que é mostrada na Figura 14: Observando o funcionamento desta máquina, e responda:

Figura 14 – Máquina

Fonte: Adaptado Dante (2018)

a) Se Márcio colocasse R$ 20,00 na entrada desta máquina, quanto sairia?

b) Robson colocou na máquina número -10, que número saiu?

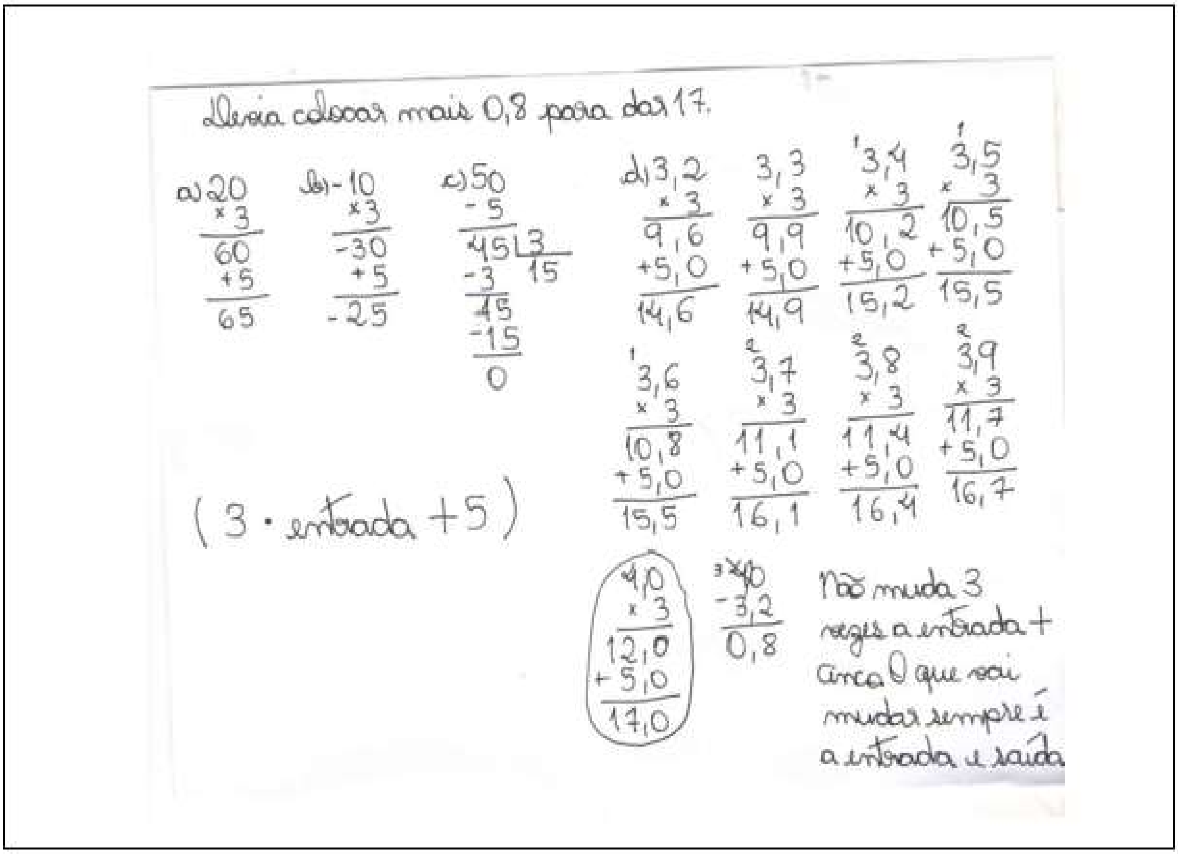
c) Que quantia Carla deverá pôr na máquina para sair R$ 50,00?

d) Anderson colocou o número 3,2, quanto ele deveria colocar a mais para sair o número 17?

A professora pesquisadora, no momento da aplicação deste problema, observou que os alunos resolveram rápido. A professora perguntou se eles tinham alguma dúvida em números inteiros, eles responderam que não tinham. Então, ela passou observando de carteira em carteira.

A aluna A4 compreendeu o problema, usou o princípio, multiplicativo do pensamento algébrico e ainda generalizou dizendo que o que muda é o valor da entrada e saída, isso pode ser constatado pela resolução apresentada por ela, conforme a Figura 15:

Figura 15 - Resolução feita pela aluna A4



Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos o diálogo entre a professora-Pesquisadora e a aluna durante a resolução desse problema.

> *P: Por que você já começou a resolução do problema multiplicando por 3?*
> *A4: Porque, professora, na letra a), Márcio colocou 20,00 reais na máquina que automaticamente multiplicava esse valor por 3, como: 20 x 3 = 60, e depois somava esse resultado por 5 como: 60 + 5 = 65.*
> *P: Por que você escreveu (3x entrada + 5)?*
> *A4: Porque eu posso colocar qualquer valor na entrada da máquina, mas sempre este valor escolhido por mim, vai ser multiplicado por 3 e o resultado somado com 5, sendo uma característica da máquina.*

A aluna A4 utilizou a primeira vertente do pensamento algébrico, o aritmeticismo ressaltado Lins (1992), quando usou a operação de adição, multiplicação. Ele utilizou o pensar contextual, no entendimento de Radford (2009), escrevendo o texto: "*Não muda 3 vezes a entrada mais cinco. O que vai mudar sempre é a entrada e saída.*".

Problema 5) Sandra alugou um carro popular na locadora LOCBEM. O preço de locação estava indicado, na porta da locadora, pelo cartaz apresentado na Figura 16 a seguir:

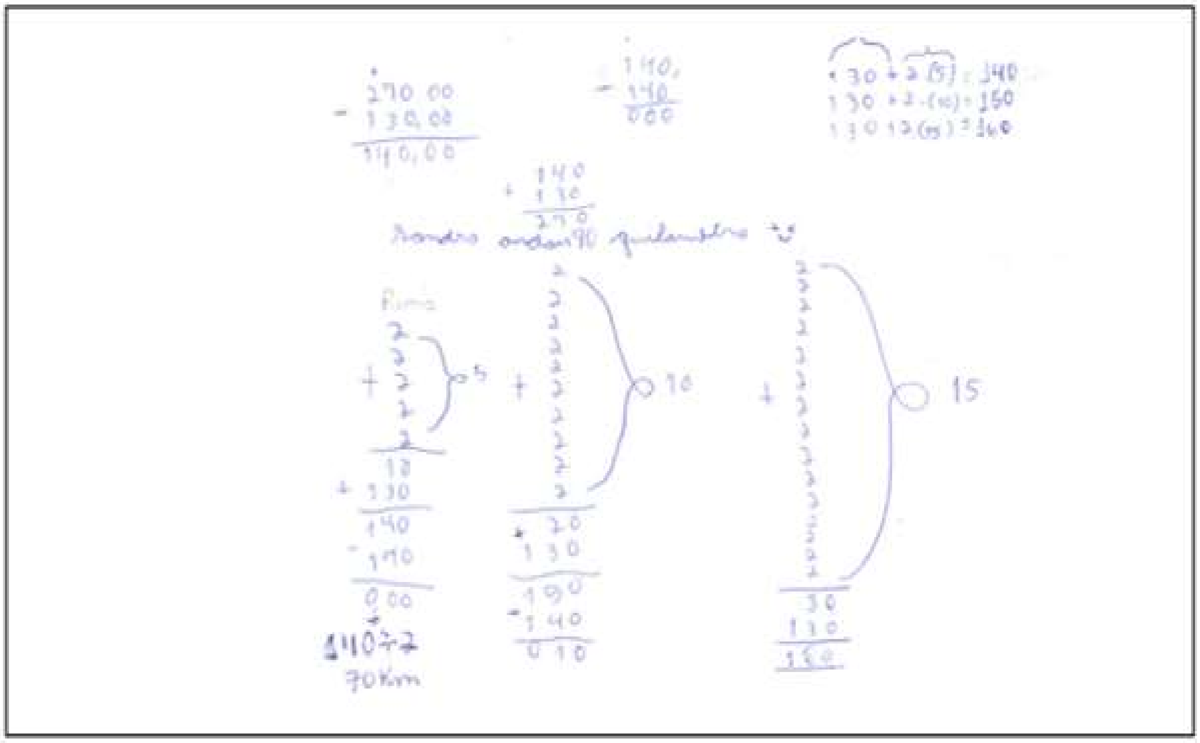
Figura 16 - Cartaz com preço de locação

Fonte: Adaptado Souza (2015; 2018)

Sabendo que Sandra alugou o carro por um dia e pagou pela locação R$ 270,00, determine quantos quilômetros ela percorreu.

O método que a aluna A37 resolveu foi interessante, pois ela montou um esquema relacionando quanta vezes o número dois poderia repetir. No primeiro momento, pensamos que ela tinha errado, mas, analisando com mais cuidado, percebemos que a solução estava correta e o método utilizado por ela fazia sentido. Conforme a figura 17:

Figura 17 - Resolução feita pela aluna A37



Fonte: Dados da pesquisa

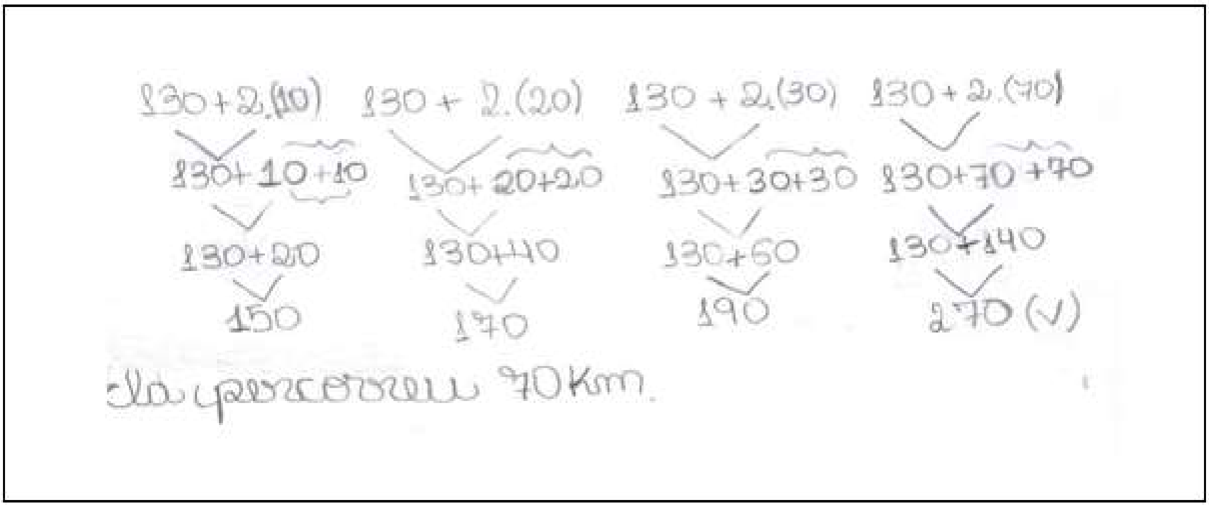
A Professora-Pesquisadora pediu para a aluna A37 explicar o processo que ela utilizou na resolução do problema.

> *P: Por que você repetiu o número 2 várias vezes?*
> *A37: Porque, professora, fiz por tentativas. Como 2 x 5 é a mesma coisa que 2+ 2+2+2+2, então fui repetindo o processo com 2 x 10 e 2 x 15, e depois somava o resultado por 130.*
> *P: Por que você subtraiu 130 de 270?*
> *A37: Porque o valor de locação que Sandra pagou foi 270 reais, então basta diminuir este valor de 130 (valor da diária) e encontrar o valor de 140. Depois dividir este valor por 2, para encontrar o resultado que é 70 Km, quilometragem que Sandra percorreu.*

Essa aluna utilizou a primeira e segunda vertente do pensamento algébrico. De fato, na perspectiva de Lins (1992), a aluna A37 apresentou a primeira vertente do pensamento algébrico que o aritmeticismo, modelando o processo de cálculo com as operações de adição e subtração, como: *"2 + 2 + 2+ 2 + 2 = 10 ; 10 + 130 = 140; 140 – 140 = 0; 140 / 2 = 70"* e o segundo quando percebeu uma generalização do método usado para obter os resultados, porém, usando apenas números, como *"130 + 2 x (5) = 140."* O fato dessa generalização não ter sido traduzida para uma linguagem algébrica, isto é utilizando letras, palavras ou símbolos não usuais para representar os números, ela não fez uso da terceira vertente do pensamento algébrico.

Esse mesmo problema foi resolvido pela aluna A20, sendo que ela também usou o método por tentativas repetindo, porém escrevendo de uma forma diferente e começou tentando a resposta 10 km, em seguida tentou 20km e 30km, respectivamente; percebendo que o valor era pequeno, ela utilizou um pensamento proporcional e já testou logo 70km e obteve a resposta. Isso é ilustrado pela Figura 18:

Figura 18 - Resolução feita pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

> *P: Por que você chegou à conclusão que a resposta do problema era 70 km?*
> *A20: Professora porque a locadora estipulou que o valor fixo por dia para alugar um carro era 130, então pensei o que não pode mudar é esse valor, mas os quilômetros rodados irão mudar.*
> *P: Por que você escreveu 130 + 2 (70) (V)?*
> *A20: Porque Sandra pagou um total de 270,00 reais, então fui acrescentado valores aleatórios até encontrar o valor que multiplicado por dois e somado com 130 desse igual a 270,00. Assim encontrei 70 km.*

Nesse problema percebemos que a aluna A20 estava raciocinando dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritmeticismo e o internalismo, Segundo Lins (1992). Isso foi constatado por nós porque ela utilizou os números 130 e o 2 fixos em todas as fases das tentativas, até encontrar o valor correto por km rodado, ou seja, apenas alterando o valor da quilometragem, utilizou as operações de adição e multiplicação em todo o processo, trabalhando apenas casos particulares numéricos, mostrando o uso da primeira vertente; a segunda vertente pôde ser percebida, quando ela saiu do 30km e pulou para 70km, nesse momento, seu raciocínio tomou dimensões de proporcionalidade que caracteriza uma generalização. Apesar de ela não destacar ou mostrar que percebeu a existência de padrão nas etapas que ela escreveu, a resolução apresentada caracterizou a presença de um pensamento factual, na concepção de Kaput (2008) que é a base para segunda vertente do pensamento algébrico.

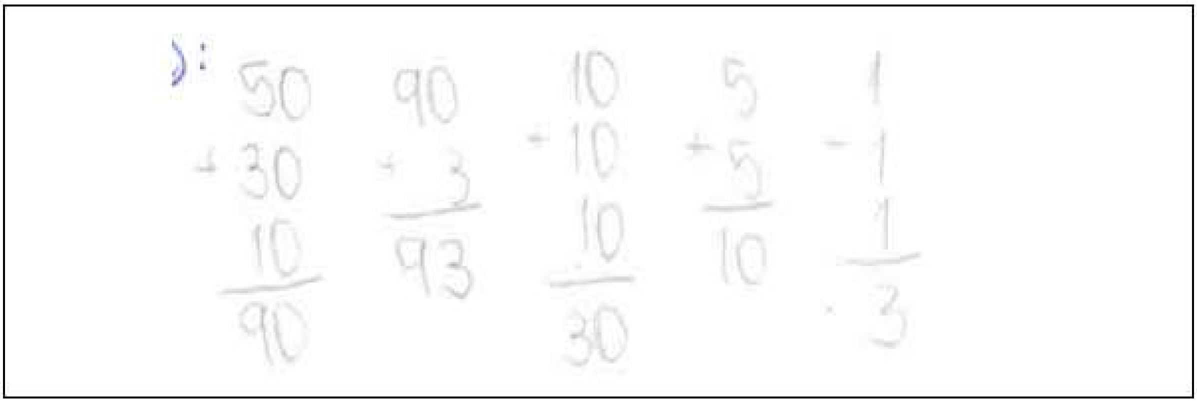
8° Encontro

Nesta aula (30 de agosto de 2018) foi aplicado o problema 6, compareceram 34 alunos.

Problema 6) Pedrinho tem nove cédulas, que somadas dão R$ 93,00. Estas cédulas são de R$ 1,00, R$ 5,00,R$ 10,00 e R$ 50,00. Quantas cédulas de cada valor Pedrinho poderia ter?

Os alunos que resolveram o problema 6 fizeram igual à aluna A3, demonstrado na figura 19:

Figura 19 - Resolução feita pela aluna A3



Fonte: Dados da pesquisa

Nesse problema, a pesquisadora observou que os alunos raciocinaram e gostaram do problema, pois estavam falando de dinheiro, algo que faz parte do dia a dia deles. A seguir, apresentaremos um diálogo entre a Professora-Pesquisadora e a aluna A3, a respeito da resolução do problema proposto.

> *P: Por favor, me explica o seu raciocínio.*
> *A3: Repeti o número 10, três vezes, e somei assim: 10 + 10 + 10 = 30, porque só pode ter três notas de 10,00 reais.*
> *P: Por que podemos ter duas cédulas de cinco reais como você apresentou: 5 + 5 = 10?*
> *A3: O mesmo raciocínio que fiz com o número dez, então posso ter 2 notas de cinco reais, e três notas de 1 real, totalizando dez e três reais.*
> *P: Por que você escreveu 50 + 30 + 10 = 90 e 90 + 3 = 93.*
> *A3: Porque além de separar as notas, que são nove, não devo ultrapassa o valor de 93 reais.*

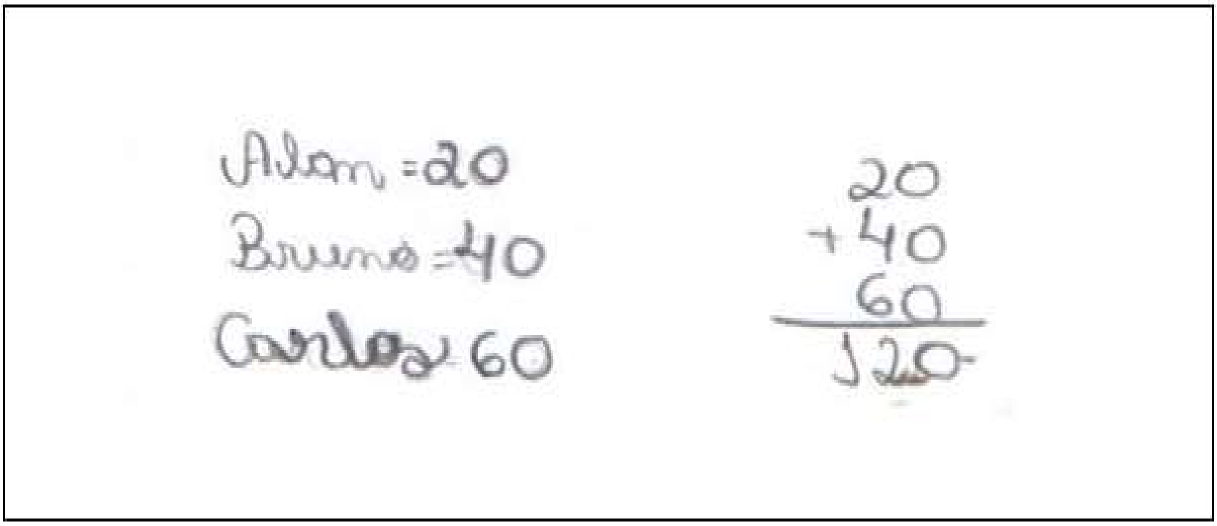
Podemos observar que A3 apresentou a quantidade de notas de forma a se obter um total de 93 reais. De acordo com Kaput (2008), esse aluno apresentou um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico que é o pensar quantitativo.

No encontro 8, também foi trabalhado o problema 7, apresentado na atividade 4.

Problema 7)"Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem o triplo de figurinhas de Alan. Quantas figurinhas tem cada um?"

A aluna A32 utilizou a operação de adição para encontrar o valor de figurinhas de cada um, dentro da primeira vertente de pensamento algébrico. A Figura 20 apresenta a resolução desse problema, feito por essa aluna. Em seguida, apresentamos um diálogo entre a professora-Pesquisadora e a aluna:

Figura 20 - Resolução feita pela aluna A32



Fonte: Dados da pesquisa

> *P: A32, você foi por tentativas para encontrar o valor de Alan, Bruno e Carlos, ou você tentou outros valores?*
> *A32: Professora, tive sorte de atribuído estes valores e de imediato encontrar o valor de figurinhas de cada um.*
> *P: A3 poderia ser outro valor?*
> *A3: Não, porque segundo as características do Problema 7, outro valor não daria certo à resposta.*

A maioria dos alunos fizeram a resolução do Problema 7, igual a aluna A32. Analisando a resolução da aluna A32, observamos que ela estabeleceu o valor da quantidade de figuras que Alan, Bruno e Carlos tinham a receber e também observou que não poderia ultrapassar 120 figurinhas. Então, estabelecendo uma relação de igualdade entre Alan, Bruno e Carlos, como "20 + 40 + 60 = 120", sendo assim, justificando a resolução do problema 7.

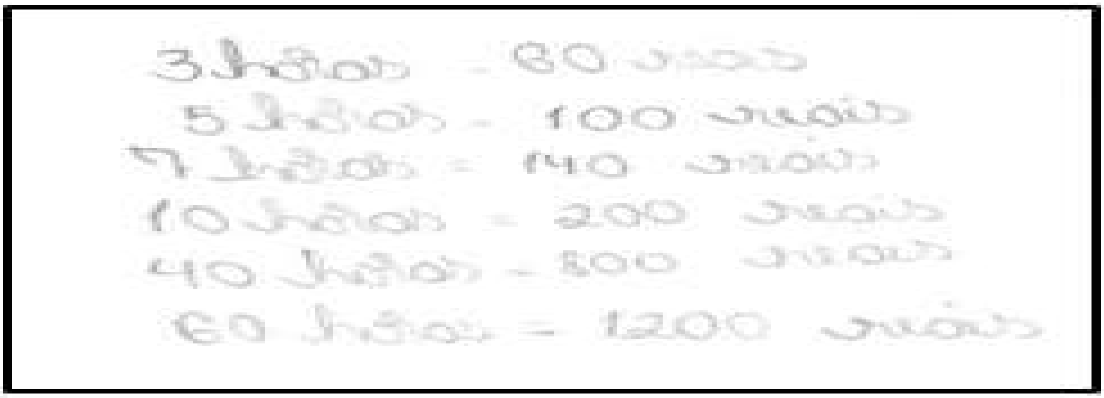
9° Encontro: Segunda parte do Plano de Ensino

Neste encontro (3 de setembro de 2018) foi feito o Problema 8 composto na atividade 5, e estavam presentes 35 alunos.

Problema 8) Carla está prestando serviço como técnica de informática em uma empresa durante algumas horas por dia. Ela ganha 20 reais por hora trabalhada. Quanto ela receberá se prestar serviço por 3 horas no total? E se no total ela trabalhar 5 horas? E se forem 7 e 10? E se fossem 40 e 60?

Os alunos pediram que a professora pesquisadora lesse este problema pois estavam com dificuldade de interpretação. Dos alunos que conseguiram resolver corretamente o problema, fizeram igual a aluna A22. Esses alunos tiveram um raciocínio dentro da segunda vertente do pensamento algébrico. Quando estavam resolvendo o problema, a pesquisadora passou observando de carteira em carteira, e notou que alguns somaram 20 reais três vezes; outros multiplicaram por 3, mas não registrando estes cálculos, como fez A22, e que apresentaremos aqui, por meio da Figura 21:

Figura 21 - Resolução feita pela aluna A22



Fonte: Dados da pesquisa

A pesquisadora, buscando entender a resolução dessa aluna, promove um diálogo, que apresentaremos a seguir:

P: Por que você escreveu 3 horas correspondendo 60?
A22: Porque no problema diz que Carla ganha 20,00 reais por hora trabalhada, então como ela trabalhou 3 horas, receberá 60,00.
P: Porque você não deixou escrito na resolução o que você me disse?
A22: Professora, realmente eu fiz os cálculos em uma folha de rascunho, mas depois joguei fora.

De acordo com Kaput (2008), a aluna A22 usou o pensamento funcional, sendo a segunda vertente do pensamento algébrico ao apresentar, na resolução do problema, uma relação entre a quantidade de horas e o valor recebido pela quantidade de horas trabalhadas.

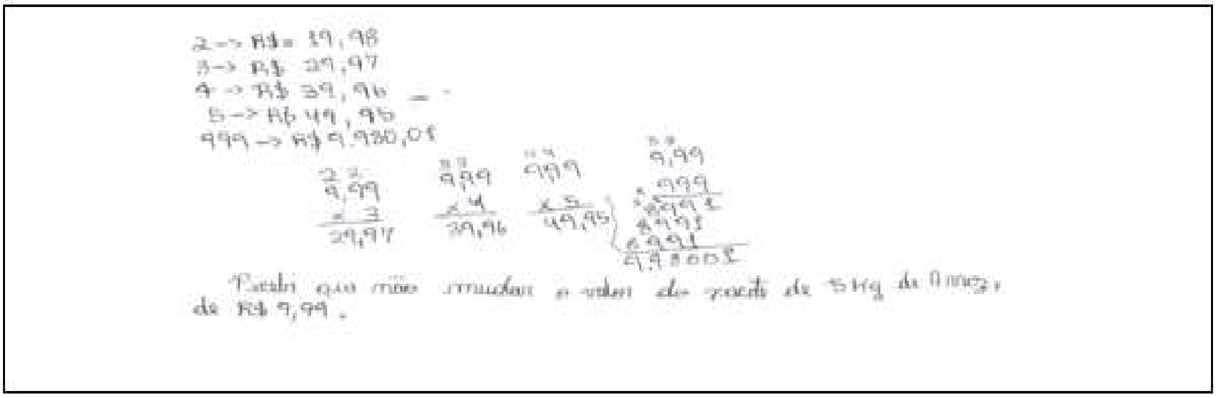
10° Encontro

Nesse encontro (4 de setembro de 2018), foi entregue para os 38 alunos presentes impresso o problema 9.

Problema 9) Assaí Atacadão (Redes de atacados no Brasil) comercializa grandes variedades de produtos abrangendo alimentos frescos, como verduras, frutas e peixes. Além desses produtos são comercializados como arroz, mercearia, alimentos, perecíveis, embalagens, bazar, higiene, bebidas e limpeza. No dia 20 de Agosto de 2018, o saco de 5 quilos de arroz da marca Gol estava de R$ 9,99. Quanto custariam 2 sacos de arroz? E quanto custariam 3 sacos de arroz? E se fossem 4 sacos de arroz? E se fossem 5 sacos de arroz? E se fossem 999 sacos de arroz?

Na atividade 6, composta pelo Problema 9, no momento da aplicação, observou-se que os alunos gostaram bastante deste problema, alguns comentaram que ajudavam seus pais nas compras de alimentos de casa, pois a maioria deles tinham dificuldades em matemática e outros em leituras; tinham falando que sempre acompanhavam seus pais ao supermercado para fazer compras. A maioria dos que acertaram responderam igual o aluno A11, apresentado na Figura 22:

Figura 22 - Resolução feita pelo aluno A11



Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo com o aluno, a Professora-Pesquisadora perguntou por que ele definiu que apenas a quantidade e valor total mudariam, então, através da fala relatou-se que:

> *P: Por que você escreveu "Percebi que não muda o valor a pagar de cada pacote de 5kg de Arroz, que é 9,99?*
> *A11: Porque cada pacote de 5kg de arroz da marca gol custa 9,99 reais, então posso comprar vários pacotes de arroz de 5kg, logo o que mudaria seria a quantidade de sacos de arroz, por exemplo 3 pacotes de arroz vou pagar R$ 29,87.*

O aluno A11 pensou algebricamente usando o princípio multiplicativo e ainda generalizou, dizendo que não poderia mudar o valor do pacote de 5kg de arroz, estabelecendo uma relação entre a quantidade comprada por pacote e valor pago pela quantidade de pacotes de arroz. Então o aluno A11 pensou dentro do pensamento funcional, que, de acordo com Kaput (2008), é a segunda vertente do pensamento algébrico, e consoante a Radford (2009), apresentou o pensar contextual, quando escreveu a mensagem: “*Percebi que não muda o valor do pacote de 5 kg de arroz de R$ 9,99*”, contextualizando a resolução do problema 9.

11° Encontro

Nesse encontro (05 de setembro de 2018), estavam compostos por 38 alunos para resolverem o problema 10 e 11, expressos na atividade 7 do Plano de Ensino.

Problema 10) Uma fábrica de roupas produz 15 peças de calças por hora. A quantidade de calça é registrada pelos jovens aprendizes (são jovens menores contratados temporariamente pelas empresas). Responda, na tabela abaixo, qual o valor correspondente a cada quantidade de calças que são fabricadas por hora?

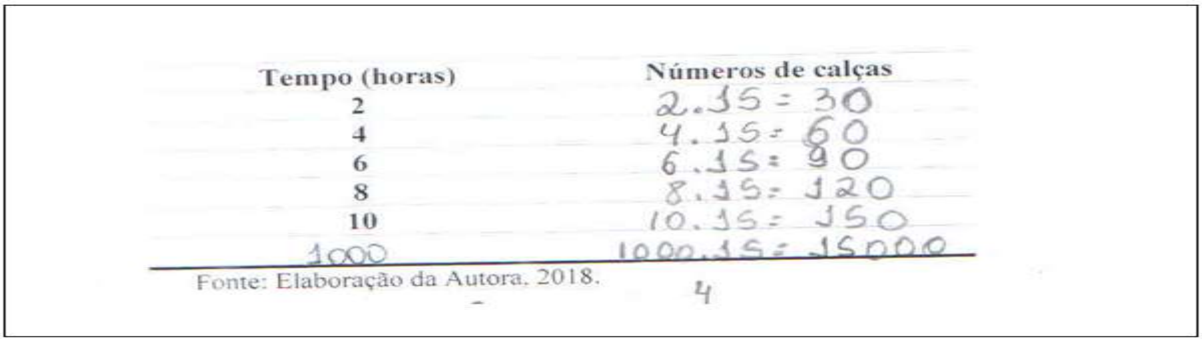
Tabela 2 - Produção de calças

Tempo (horas)	Números de calças
2	
4	
6	
8	
10	
1000	

Fonte: Elaborado pela Autora

Neste problema, o aluno A3, mostrou estar atento, ou foi levado a desenvolver, um raciocínio dentro da segundo vertente do pensamento algébrico, sendo o princípio multiplicativo. Conforme a Figura 23:

Figura 23 - Resolução feita pela aluna A3



Tempo (horas)	Números de calças
2	2.15 = 30
4	4.15= 60
6	6.15= 90
8	8.15= 120
10	10.15= 150
1000	1000.15= 15000

Fonte: Elaboração da Autora, 2018.

4

Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a professora pesquisadora e a aluna A3:

P: Por que você chegou à conclusão que representou na tabela como: 2x15 = 30, 4x15 = 60 e assim sucessivamente?
A3: Prestei atenção no que pedia no problema, quando relatou que a cada 1 hora esta fabrica produzia 15 peças de calças.
P: E o que você percebeu depois?
A3: Então percebi que, o que mudava eram as horas e o que permanecia constante era o número 15 (sendo a quantidade de calças produzidas por hora).
P: Então se eu te pedisse para você encontrar quantas calças poderiam ser produzidas por essa fábrica, em 3 dias, o que você faria?
A3: Ah, professora, em 3 dias, temos 24x3 = 72 horas.
P: O que está faltando ainda, aluna A3?
A3: Ah, agora basta multiplicar 72 por 15, que é a quantidade de calças produzidas em 1 hora, ou seja: 72x15 = 1080 calças.
P: Você sentiu-se à vontade em resolver esse tipo de problema aluna A3?
A3: Sim, professora.
P: Se mudasse o enunciado do problema em vez de ser produzida calça, fosse blusas, o que mudaria?
A: Professora, o valor encontrado na resolução do problema seria o mesmo, o que mudaria seria apenas as calças pelas blusas.

Todos os alunos que resolveram corretamente o Problema 10 usaram a mesma maneira que A3. De acordo com a teoria de Kaput (2008), eles estavam dentro da segunda vertente do pensamento algébrico, o pensar funcional, ao estabelecer uma relação entre horas e os números de calcas fabricadas, como “ *2. 15 = 30; 4. 15 = 45; ... 1000.15 = 15000*”.

Problema 11) Renato comprou uma impressora jato de tinta para imprimir panfletos de propaganda. A impressora imprime 18 panfletos a cada 2 minutos. Preencha a segunda coluna da tabela, a seguir, com o número de panfletos que esse equipamento imprime:

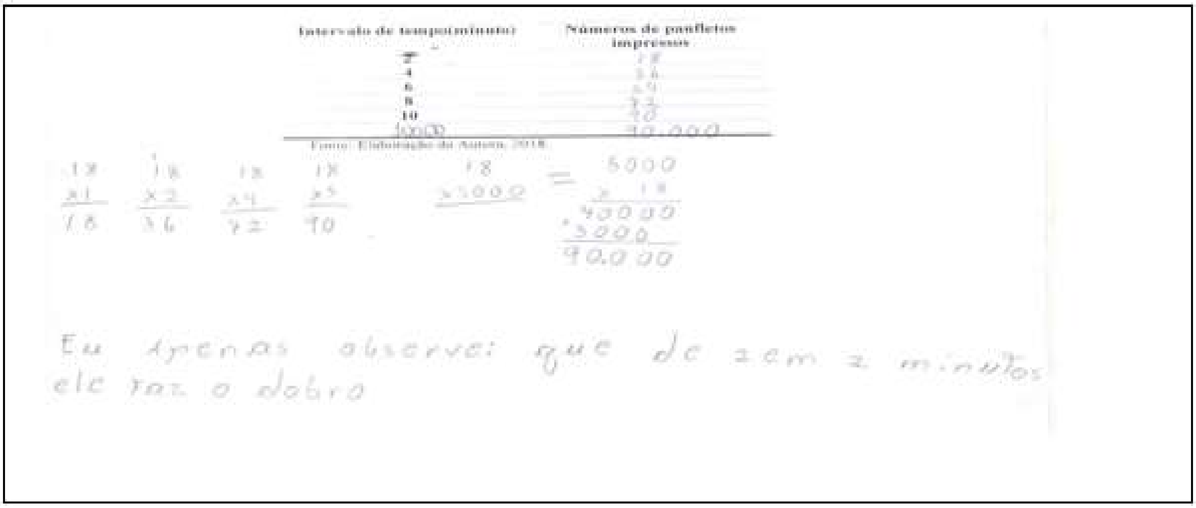
Tabela 3 - Impressão de panfletos

Intervalo de tempo(minuto)	Números de panfletos impressos
2	
4	
6	
8	
10	
10000	

Fonte: Elaboração da Autora, 2018.

Este problema lhes chamou muito a atenção, pois apenas um aluno acertou, e, dos que erraram, percebemos que a falha decorria da multiplicação do intervalo de tempo por 1 minuto, e, eles não observaram que em cada 2 minutos eram impressos 10 panfletos. O aluno A12 respondeu o problema apresentado na figura 24:

Figura 24 - Resolução feita pelo aluno A12



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a professora pesquisadora e o participante da pesquisa:

P: Como pensou e escreveu o valor 18, 36, 72, 90 ?
A12: Apenas observei que, em 2 minutos, a impressora imprimia 18 panfletos, então de imediato vou apenas multiplicar 18 por 2, depois por 4, 5, 8, sendo números pares e o dobro do anterior.

O aluno A12, único aluno a acertar o problema 11, apresentou elementos da segunda vertente de pensamento algébrico ao generalizar a partir de números particulares. Segundo Kaput (2008) e Radford (2009), ele utilizou o pensar funcional ao estabelecer uma relação entre o tempo e o número de panfletos e o pensar contextual com a frase "*Eu apenas observei que, de 2 em 2 minutos ele faz o dobro*", contextualizando a sua resolução deste problema.

12° Encontro

Neste encontro (6 de setembro de 2018) compareceram 36 alunos para resolverem o problema 12 composto na atividade 8.

Problema 12) Patrícia gosta de ir ao cinema com seus colegas no Buriti Shopping na cidade de Rio Verde-Go. Patrícia sempre convida seus amigos na quarta (matinê) para acompanhá-la à sessão de cinema e paga entrada para cada um deles. O valor cobrado pelo cinema pode ser visto na Figura 25:

Figura 25 – Cinema

Valores de segunda a Domingo

	Inteira	Meia
Seg e Ter (Matinê*)	R$ 18,00	R$ 9,00
Seg e Ter (Noite)	R$ 20,00	R$ 10,00
Quarta (Matinê*)	R$ 16,00	R$ 8,00
Quarta (Noite)	R$ 18,00	R$ 9,00
Qui,Sex, Sáb, Dom(Integ)	R$ 22,00	R$ 11,00

Fonte: Elaborado pela autora

a) Se Patrícia levar 1 amigo, que paga meia entrada, quanto ela pagará pelo ingresso?

b) Se Patrícia levar 2 amigos, que pagam meia entrada, quanto ela pagará pelos ingressos?

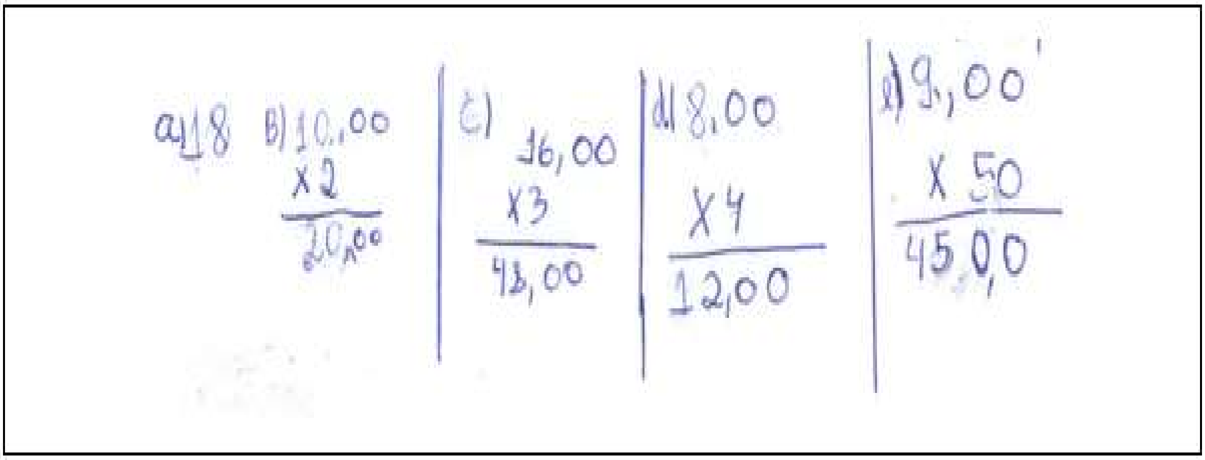
c) Se Patrícia levar 3 amigos, que não têm direito a meia entrada, quanto ela pagará pelos ingressos?

d) Se Patrícia levar 4 amigos, que pagam meia entrada, quanto ela pagará pelos ingressos?

e) Se Patrícia leva-se 50 amigos, todos pagando meia entrada quanto ela pagará pelos ingressos?

f) Se Patrícia leva-se 50 amigos, todos pagando inteira, quanto ela pagará pelos ingressos?

Figura 26 - Resolução feita pela aluna A5



Fonte: Dados da pesquisa

P: Você sentiu dificuldade para resolver esse problema?
A5: Sim, professora, nos valores que eram pagos em cada seção, e também não prestei atenção nos dias que eram pedidos em cada alternativa.

Nesse problema, os alunos ficaram em silêncio lendo-o, pois não estavam entendo o que o problema pedia. A Professora-Pesquisadora percebeu que a maioria cometeu o mesmo erro que a aluna A5, que usou o dia da semana errado, ou seja, como pode ser visto na Figura 20, ela usou: a) matinê de segunda, b) terça (noite), quarta matinê, quarta noite e quinta a domingo integral. Pode-se observar que, na resolução da aluna A5, ela utilizou um método sem produzir significado.

13° Encontro

Nesse encontro (10 de setembro de 2018), estavam presentes 36 alunos. Trabalhamos o problema 13, da atividade 9.

Problema 13) Observe a sequência das imagens feita por Sônia na Figura 21. Se Sônia continuasse desenhando estrelas, de acordo com o padrão apresentado pela Figura 27:

Figura 27- Sequências de estrelas amarelas

Fonte: Elaborado pela Autora

a) Quantas estrelas teria no 5° termo da sequência que Sonia determinará?

b) Quantas estrelas teria no 6° termo que Sonia determinará?

c) Qual o 100° termo que Sonia determinará? Como você encontrou a resposta? Explique sua resposta?

Nesse problema, 13 os alunos já estavam familiarizados, pois estavam lendo e interpretando melhor. O aluno A42 resolveu o problema, desenvolveu a segunda vertente de pensamento algébrico, conforme a Figura 28:

Figura 28 - Resolução feita pelo aluno A42

Fonte: Dados da pesquisa

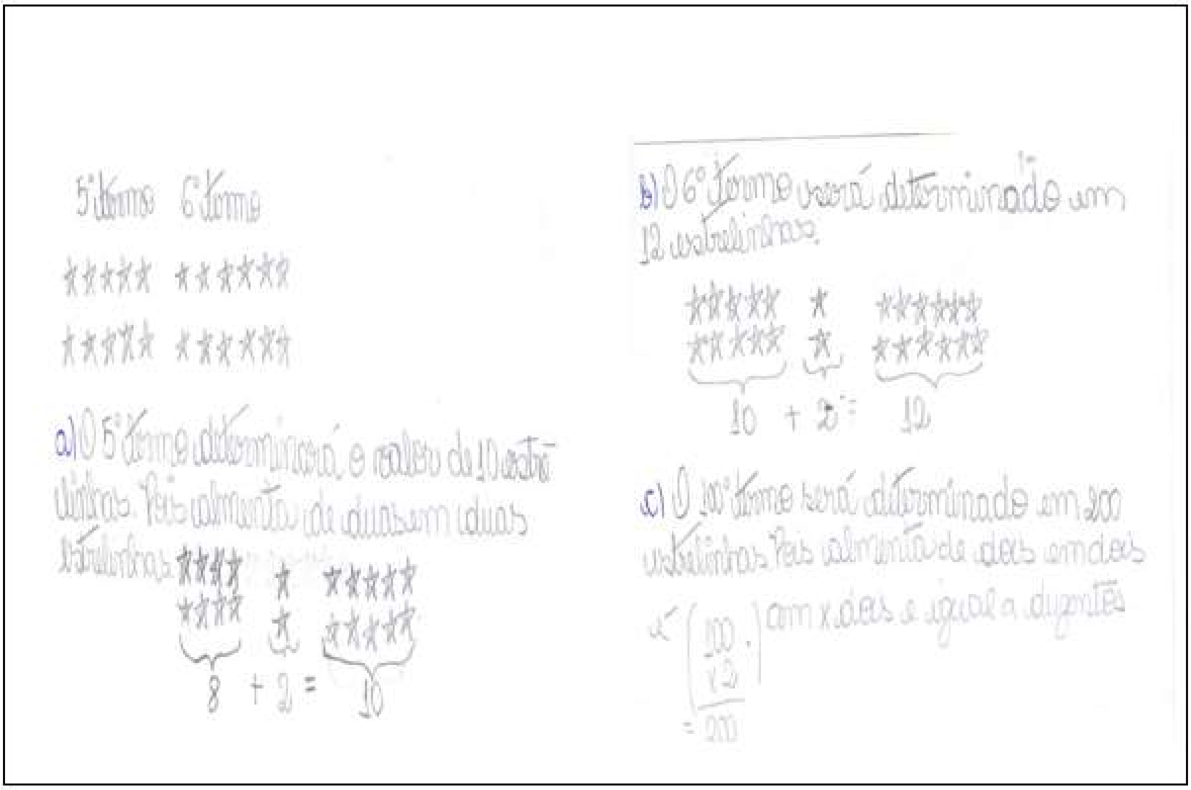
A seguir, para uma maior compreensão do leitor, sobre o que ocorreu em sala de aula, apresentamos o diálogo a seguir:

> *P: Por que você desenhou as estrelinhas na resolução do problema?*
> *A42: Porque, para compreender o problema, achei melhor desenhar as estrelinhas para que pudesse chegar na resposta de maneira correta.*
> *P: Como você chegou à resolução da letra c?*
> *A42: Professora no primeiro momento comecei a desenhar as estrelinhas, mais eram muitas, então parei e observei que na sequência, as estrelinhas aumentavam de 2 em 2, então conclui que bastava apenas multiplicar 100 (número da sequência) por 2, que encontraria a quantidade de 200 estrelinhas.*

Observamos que a maioria dos alunos que resolveram corretamente o problema fizeram da mesma forma que o aluno A42. De acordo com Radford (2009), ela fez o uso de um pensar contextual, quando escreveu a frase: "*200 estrelas, pois as estrelas aumentavam 2 em cada termo, então o resultado será 100. 2 é 200*".

A aluna A20, também teve um pensamento algébrico semelhante ao da A42, conforme podemos observar, na sua solução, apresentada pela Figura 29:

Figura 29 - Resolução feita pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

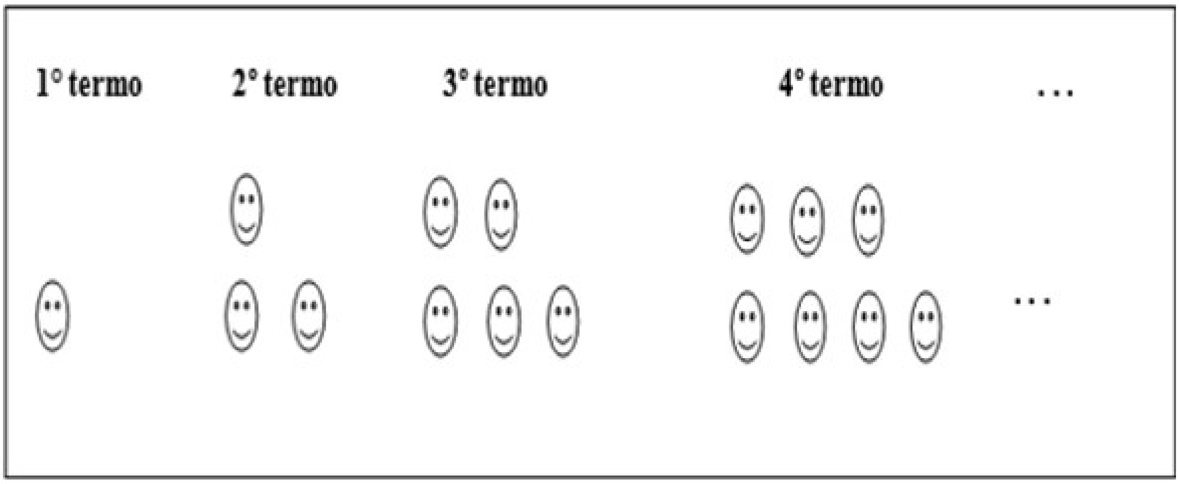
Observe-se que a aluna A20 teve mais clareza na sua resolução, de fato, nos seus desenhos, percebemos o aumento de estrelas que acontecem em cada termo. Os desenhos das estrelas evidenciam esse padrão. Ela também utilizou linguagem escrita sobre o que estava pensando durante a resolução do problema. Sendo assim, ela utilizou a capacidade de generalizar com números, que de acordo com Kaput (2008), seu raciocínio se enquadra em um pensar funcional, principalmente quando utiliza e descreve padrões numéricos de imagens. E, também percebemos um pensar contextual, na concepção de Radford (2009), apresentado nas resoluções das alternativas a), b) e c) do problema 13. Como exemplo do uso desse tipo de raciocínio, enfatizamos sobre o que ela descreveu na sua resolução do item a) , ou seja, "*o 5º termo determinará o valor de 10 estrelinhas, pois aumenta de duas a duas estrelinhas*".

14° Encontro

Neste encontro (12 de setembro de 2018), compareceram 36 alunos e, desses, 28 acertaram a letra a) e b) do problema 14 composto na atividade 10 do plano de ensino.

Problema 14) Observe a sequência das imagens feitas por Katia, na Figura 30:

Figura 30 - Sequências de rostinhos



Fonte: Elaborado pela Autora

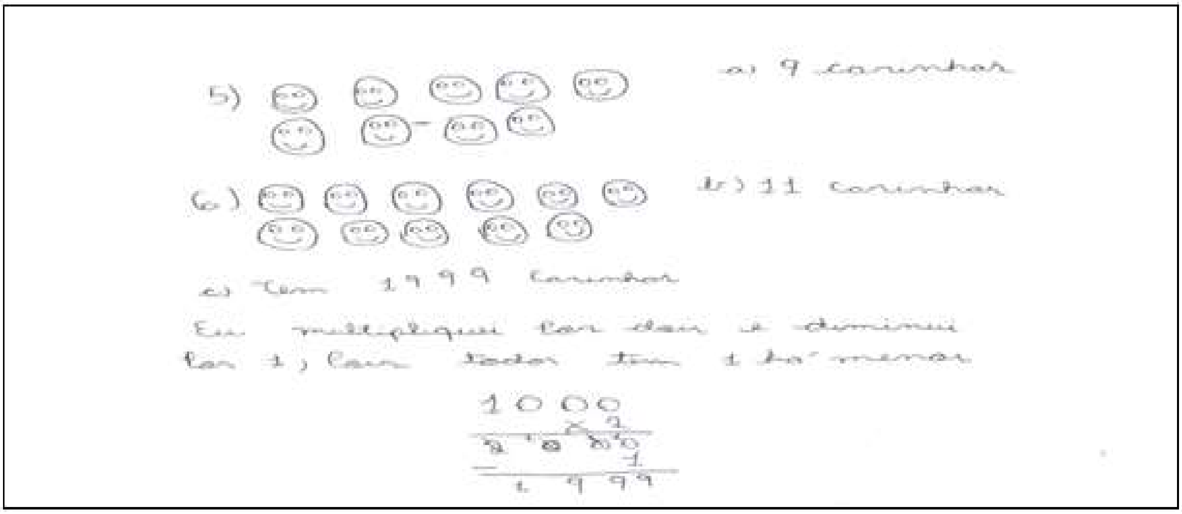
a) Quantas figurinhas deverá ter o 5° termo da sequência desenhada por Katia?

b) Quantas figurinhas deverá ter o 6° termo da sequência desenhada por Katia?

c) Qual o 1000° termo que Katia determinará? Como você encontrou a resposta? Explique sua resposta?

O aluno A42, ao resolver esse problema, desenvolveu um raciocínio dentro da segunda vertente do pensamento algébrico, isto e, promover uma generalização com números, ao escrever "*eu multipliquei por dois e diminui 1*", conforme a Figura 31:

Figura 31 - Resolução feita pelo aluno A42



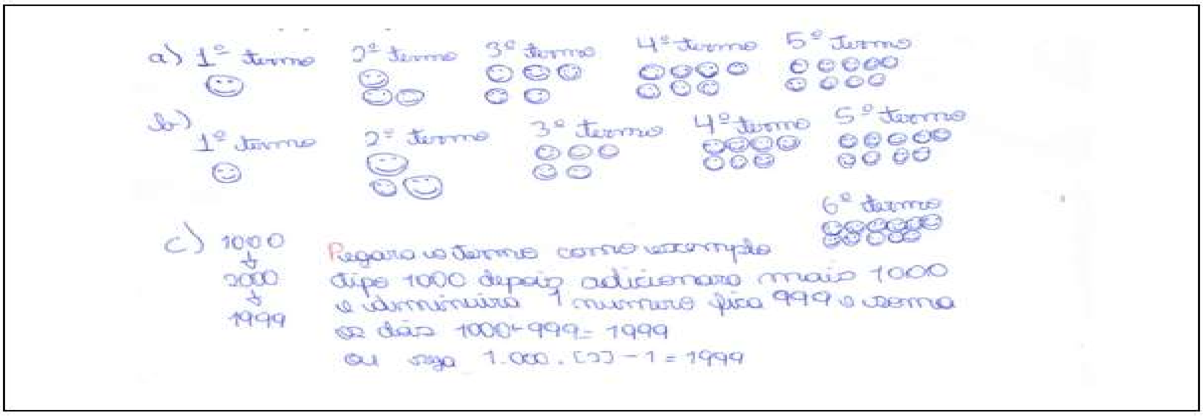
Fonte: Dados da pesquisa

Para melhor compreensão do que ocorreu em sala de aula, apresentamos um diálogo entre a Professora-Pesquisadora e o aluno que apresentou a solução ilustrado na Figura 31:

> *P: Me explica como você chegou à resposta do problema?*
> *A42: Na letra a) e b), achei mais fácil representar as carinhas para chegar na resposta. Agora, na letra c) ficaria muito grande desenhar tantas carinhas, então observei a sequência e multiplique 1000 por 2 e, depois, diminuir 1 do resultado que, no caso, é 2000 menos 1, obtendo 1999.*

O aluno A6 resolveu o Problema 14 e obteve um raciocínio dentro da primeira e segunda vertente do pensamento algébrico ao generalizar, de forma natural, a partir dos números, e com isso, conseguiu encontrar qualquer quantidade de carinhas em qualquer termo da sequência, como pode ser observado pela Figura 32:

Figura 32 - Resolução feita pelo aluno A6



Fonte: Dados da pesquisa

Neste problema, de acordo com Radford (2009), a resolução feita por A6 e A42 apresentaram o pensar factual, sendo uma das primeiras vertentes o pensamento algébrico, no qual se percebe a existência de uma relação entre cada termo, o número de carinhas desse termo. E, foi evidenciado um pensar contextual, tanto na resolução de A6, como pode ser visto na resolução da letra c) apresentado por A6, quando ele escreve o trecho*: Pegará o termo como exemplo tipo 1000 depois adicionará mais 1000 e diminuirá 1 o número fica 999 e soma os dois 1000 + 999 = 1999 ou seja 1000. (2) – 1 = 1999*", isto é, ele contextualizou o que pensou durante a resolução do Problema 14.

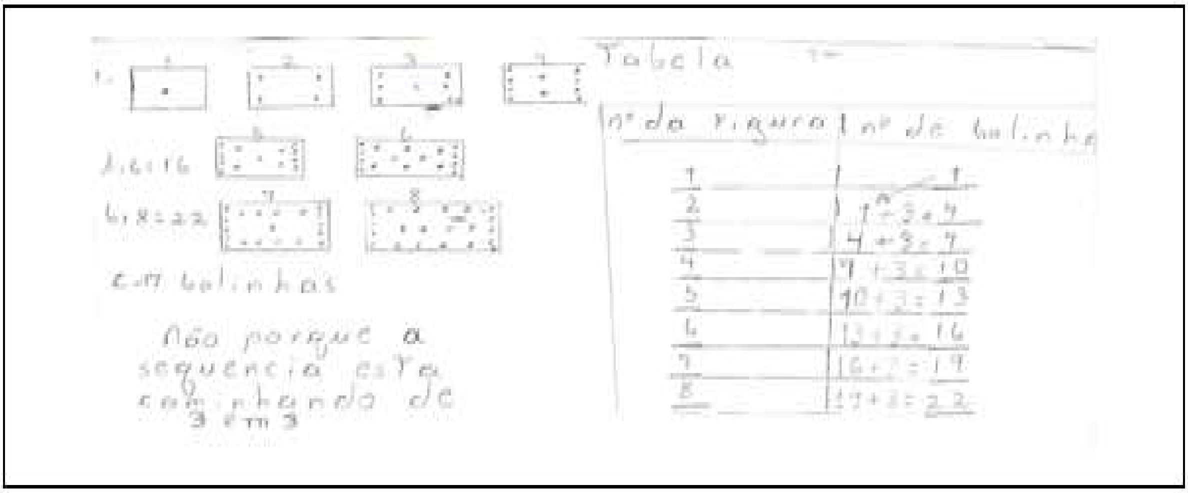
14° ao 18° Encontros

Nesses encontros (17 a 21 de setembro de 2018), a Professora-Pesquisadora promoveu uma discussão sobre todos os problemas trabalhados do 5° ao 8°. O objetivo inicial foi o de resolver novamente os problemas, dessa vez, feita pela Professora-Pesquisadora, em conjunto com os alunos, para que eles pudessem confrontar a resolução da professora com a sua resolução e, com isso, refletir e ser levados a desenvolver um raciocínio dentro da primeira e segunda vertente do pensamento algébrico, principalmente naqueles alunos que ainda não haviam sido evidenciado esse tipo de pensamento. Algumas intervenções da Professora-Pesquisadora foram necessárias para instigar o aluno a pensar algebricamente. Essas intervenções foram no sentido de torná-los capazes de representar e identificar um mesmo conteúdo matemático de diferentes maneiras.

Nestes encontros, os alunos eram convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Foram feitas plenárias em que os alunos discutiram as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas e defendiam seus pontos de vista e sanavam suas dúvidas. Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para cada problema, toda a classe buscava um consenso sobre o resultado correto. Essa dinâmica é apresentada por Onuchic e Allevato (2011) como parte do roteiro de atividade da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema.

O Problema 1, foi feito novamente por todos os alunos presentes na aula. Pôde-se observar que o aluno A12, inicialmente havia resolvido esse problema de forma muito direta, e, com a intervenção da Professora-Pesquisadora, ele refez o problema, dessa vez, evidenciando sua forma de pensar, desenhando as imagens da sequência, explicando o porquê de aumentar 2 a 2, o número de imagens, e, ainda, construiu uma tabela, a sua maneira para tentar deixar claro como ele pensou. Ele também desenvolveu uma regra para determinar qualquer termo da sequência e procurou justificar, conforme podemos observar na Figura 33:

Figura 33 - Resolução feita pelo aluno A12



Fonte: Dados da pesquisa

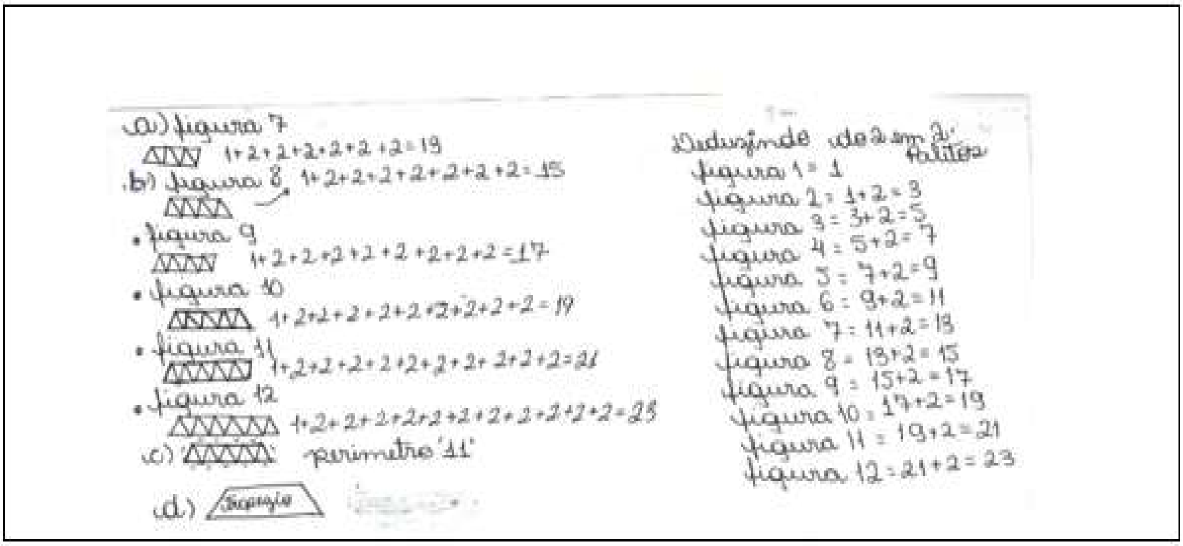
Com a intervenção da professora, foi possível ver que todos os alunos que participaram efetivamente das atividades desta pesquisa, de uma forma ou de outra, tiveram um desenvolvimento na sua forma de pensar. Com isso, conseguiram dar o primeiro passo na direção do desenvolvimento do pensamento algébrico, alguns de forma mais efetiva e outros de maneira mais tímida. Vale ressaltar também que, em alguns estudantes, foram evidenciados um raciocínio algébrico bastante avançado, como podemos ver na resolução apresentada pelo aluno A12. Ele conseguiu representar seu raciocínio sobre o entendimento do problema em forma de figura, fez a somatória dos dados evidenciados no problema, usando um raciocínio aditivo, ou aritmeticismo (primeira vertente), e ainda usou, de acordo com Kaput (2008), um pensar funcional no uso de tabelas para representar o resultado do problema.

Para explicar melhor como se deu esse processo, apresentaremos um diálogo entre aluno e Professora-Pesquisadora:

> *P: O que levou você a representar os seus resultados na tabela?*
> *A12: Através de sua intervenção professora junto comigo e com os colegas, cheguei à conclusão, que, para dar um significado ao conteúdo ministrado e também à organização dos dados, seria melhor uma tabela a fim de ficar mais claro para que possa entender o que eu mesmo construir.*

A atividade 2 composta pelo problema 3, foi feita novamente por 36 alunos presentes na aula. Com a intervenção da Professora-Pesquisadora, todos os alunos, que na primeira etapa desta pesquisa não tinham conseguido resolver o problema, conseguiram e ainda produziram significado para conceitos envolvidos. Na Figura 34, ilustramos a resolução da aluna A32.

Figura 34 - Resolução feita pela aluna A32



Fonte: Dados da pesquisa

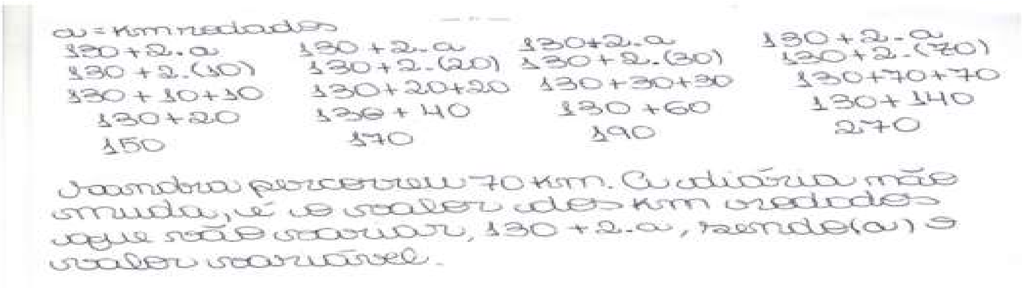
Buscando entender o processo da resolução dessa aluna, foi necessário um diálogo entre a Professora-Pesquisadora e ela, como mostramos, a seguir:

P: Como você chegou à solução desse problema?
A32: observando as figurinhas e também por meio da sua intervenção pude melhorar a minha resolução e deduzir que 1 + 2 = 3, 3 + 2 = 5, e assim sucessivamente.

A aluna A32 generalizou a relação entre a quantidade da figura e a quantidade de palitos usados para formá-la, demonstrando que os palitos caminham de 2 em 2, e também deduziu que, para formar a próxima figura com palitos, era necessário pegar a quantidade de palitos anterior e somar mais. Essa aluna desenvolveu relações numéricas entre as figuras, generalizou uma regra para determinar qualquer termo da sequência, em linguagem natural justificando a quantidade obtida, e isso mostra um desenvolvendo do seu pensamento algébrico. De acordo com Lins (1992), Radford (2009) e Kaput (2008), a aluna A32 apresentou um pensar dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, quando somou os termos da sequência.

A atividade 3, relacionada ao problema 5, foi feita novamente por todos os alunos presentes nesta aula, com a intervenção da professora pesquisadora. A aluna A20 respondeu o problema na primeira etapa desta pesquisa e, agora, respondeu ousando o mesmo tipo de raciocínio, mas com letras para representar o valor que variava. A professora-Pesquisadora perguntou para essa aluna, o porquê de acrescentar a letra ***a*** para representar os valores desconhecidos. A resposta dessa aluna pode ser observada em diálogo que apresentamos, logo após a solução apresentada por ela, ilustrada, aqui, pela Figura 35:

Figura 35- Resolução feita pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre aluna e Professora-Pesquisadora:

P: Por que você utilizou a letra "a" para resolver o problema proposto?
A20: Para representar o valor de quilômetros.

P: Como você chegou à resposta?
A20: Por estimativa, ou seja testando valores como 10, 20, 30 e 7, encontrando, assim, a resposta do problema na quarta tentativa.

Observando que nesse momento, todos os alunos já haviam conseguido resolver o problema, e pela forma como resolveram, pudemos perceber que eles desenvolveram um pensamento algébrico, dentro da primeira e segundo vertente. Observamos também que a aluna A20, além de desenvolver um raciocínio dentro dessas duas vertentes, conseguiu um pensamento algébrico caracterizado pelos teóricos que fundamentam nossa pesquisa, como um raciocínio em terceira vertente. Isso pôde ser constatado quando ela fez uso de letras para representar um valor numérico variável. De acordo com Lins (1992), Radford (2009) e Kaput (2008), a aluna A20 apresentou um pensar de primeira vertente, chamado por Lins (1992), de aritmeticismo, quando utilizou as operações de adição e multiplicação como "*130 + 2a*", e o pensar contextual e algébrico padrão, Radford (2009), quando escreveu o trecho *"Sandra percorreu 70 km. A diária não muda, é o valor dos km rodados que vai variar, 130 + 2a, sendo (a) o valor variável*".

A atividade 4, associada ao problema 6, foi feita novamente por todos os alunos presentes nesta aula. Dessa vez, assim como na atividade anterior, com a intervenção da Professora-Pesquisadora. Nessa intervenção, o aluno A42 foi convidado para ir à lousa e apresentar a sua resolução do problema com auxílio do restante da turma e da professora. Esse momento foi registrado por foto, apresentado aqui pela Figura 36:

Figura 36 - Resolução feita pelo aluno A42

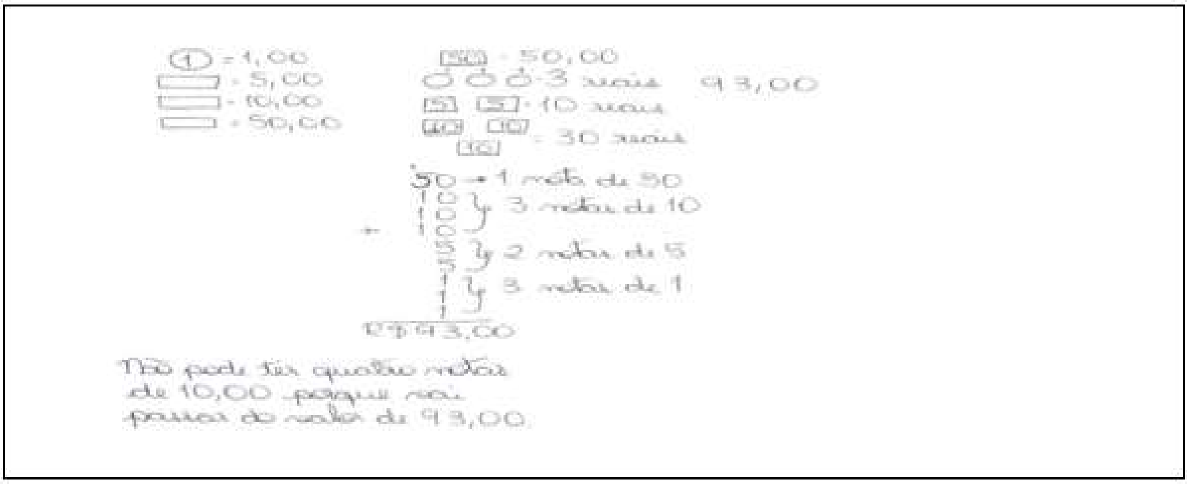
Fonte: Dados da pesquisa

Durante a apresentação desse aluno, da sua resolução do problema, houve uma discussão entre ele, os demais alunos da turma e a Professora-Pesquisadora. Essa discussão foi configurada em alguns diálogos que apresentamos a seguir:

P: Por que você escreveu no quadro 10 +10 +10= 30?
A42: Esses 10 repetidos três vezes quer dizer que posso ter apenas 3 notas de 10,00 reais.
A6: A42, eu posso ter 5 notas de cinco reais?
A42: Não, porque não podemos passar de 93,00 reais, então teremos que pôr apenas 2 notas de 5 reais.
P: O que seria para você esse valor de noventa e três reais?
A6: Professora, seria o total de toda o dinheiro que o problema descreveu.
P: Por que você escreveu 5 + 5?
A6: Porque pode apenas ter 2 notas de cinco reais.
P: A6 por que escreveu no quadro 1 + 1 + 1 = 3
A6: Pode apenas ter 3 moedas de um real.

A Aluna A3 resolveu o mesmo problema, segundo a Figura 37

Figura 37 – Resolução feita pela aluna A3



Fonte: Dados da pesquisa

Para que possamos entender essa resolução e o que ocorreu em sala de aula, apresentaremos um diálogo entre essa aluna e Professora-Pesquisadora:

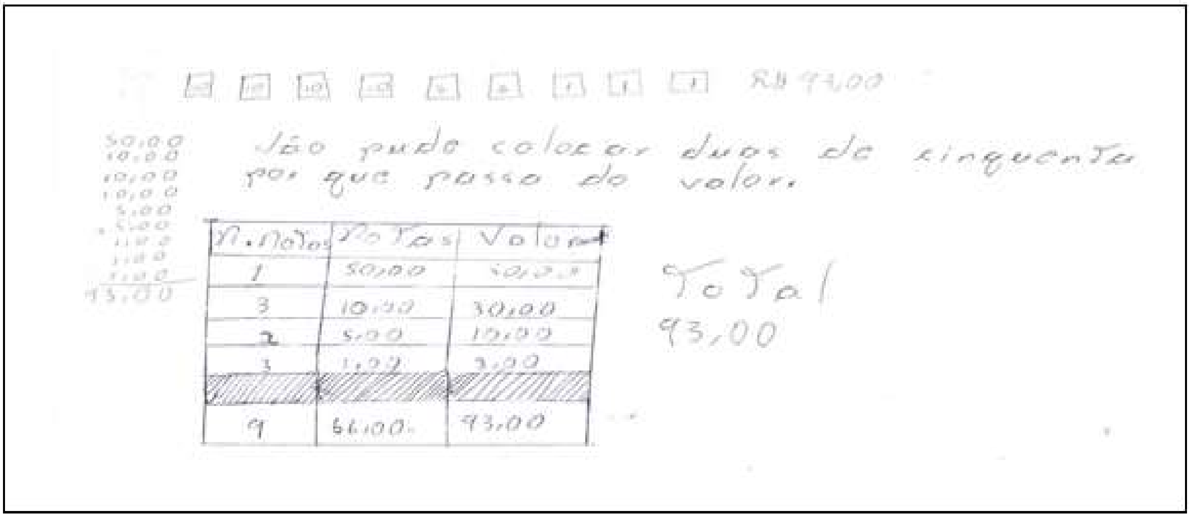
P: Por que você utilizou desenhos para representar os resultados?
A3: Tendo como total geral 93,00 reais, achei melhor desenhar as figuras para representar a quantidade de cada nota de cada valor, para assim, conseguir enxergar mais rápido e claro a resposta do problema.

A aluna A3 desenvolveu um pensamento algébrico dentro da primeira vertente, quando separou as notas e somou os seus resultados, obtendo o total de 93 reais, que, segundo Lins

(1992), essa forma de pensar se caracteriza como aritmeticismo, pois explora a ideia de igualdade. Como A3 apresentou a expressão “ 50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 = 93”, e também, criou um padrão real, desenhando moedas e as cédulas, ela desenvolveu um raciocínio dentro da segunda vertente do pensamento algébrico. Observamos que, antes da intervenção da professora, na primeira fase da nossa pesquisa. A aluna A3 apenas somou os valores e não fez nenhuma explicação detalhada, como fez nessa segunda parte, ou seja, após a intervenção da pesquisadora, a estudante fez esta resolução com produção de significado.

O aluno A12 desenvolveu, durante a resolução desse problema, um pensamento dentro da primeira e segunda vertente do pensamento algébrico. Trabalhou ideias em um raciocínio aditivo e multiplicativo, desenhou as cédulas, observou um padrão e, ainda, fez uma tabela para relacionar a quantidade de cada cédula com seus valores, conforme a Figura 38

Figura 38 – Resolução feita pelo aluno A12



Fonte: Dados da pesquisa

Um diálogo entre aluno e Professora-Pesquisadora, para ilustrar o que ocorreu em sala de aula, é apresentado a seguir:

> *P: Pude observar em suas resoluções você gosta de representar dados em tabela. Por que?*
> *A12: Professora na construção da tabela, pude separar os números de notas, depois o valor de cada um e, por último, a valor total de cada uma.*
> *P: A construção da tabela facilitou você raciocinar?*
> *A3: Então, utilizando uma tabela, o meu raciocínio fica mais claro para eu encontrar o resultado do problema.*

Segundo Kaput (2008), o aluno A12 usou o pensar funcional, porque fez uma relação entre o número de cédulas e o valor de cada cédula, recorrendo a uma tabela para representar essa relação. Para Lins (1992), ele usou um pensamento dentro do internalismo, ao considerar a igualdade. Isso ocorreu quando ele relacionou a operação “ *50 + 30 + 10 + 3 = 93*”.

Observamos que aqueles alunos que não obtiveram sucesso na resolução dos problemas propostos, durante a primeira fase da nossa pesquisa, conseguiram na segunda fase, um crescimento satisfatório, por meio das intervenções da pesquisadora, agindo como mediadora, isto é, através de questionamentos, ela conseguiu fazer com que os estudantes percebessem a necessidade de um raciocínio que os levassem a produzir significado no contexto de cada problema. Com isso, a Professora-Pesquisadora conseguiu alcançar o objetivo pretendido, levando seus alunos a entenderem o problema, desenvolverem um raciocínio algébrico em alguma vertente, e às vezes, até mais de uma. Gostaríamos de ressaltar que, apesar de a Professora-Pesquisadora se guiar pelo roteiro de atividades da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, ela não seguiu as etapas desse roteiro rigorosamente, usou apenas como orientação.

19° Encontro

Nesse encontro (24 de setembro, 1 aula), foi feita uma apresentação entre a Professora-Pesquisadora e alunos, na lousa dos problemas 2 e 8 do plano de ensino. O objetivo, nesse momento, era, a partir desses problemas, introduzir o conceito de equação do primeiro grau com variável.

A professora pesquisadora começou essa aula discutindo o problema 2, juntamente aos alunos. Durante essas discussões, a Professora-Pesquisadora fez intervenções necessárias para introduzir o conceito de equação do primeiro grau. Para melhor entendimento de como isso foi feito, apresentamos, a seguir, um diálogo com os alunos:

P: Tem como Carlos ter o mesmo valor que Larissa?
Alunos: Não professora.
P: Por quê?
A12: Porque Larissa já tem 20 reais a mais que Carlos.
P: Então, posso representar no quadro assim:
Valor de Larissa = 20 reais mais o Valor de Carlos?
Alunos: Sim, professora,
Professora: Teve 4 alunos que não concordaram.
A30: Eu não concordo.
P: Por que?
A30: Acho que tem que ser com números.
P: E, se agora, simplificamos os valores e acrescentamos esta expressão menor:
VL = 20 + VC.
A30: Agora ficou menor, assim pode.
P: A30 é a mesma coisa.
A20: Professora, pode ser representado assim: L = 20 + C.

P: A20, quem seria o L e o C?
A20: O L representa a primeira letra do nome de Larissa e C primeira do nome de Carlos.
A12: Professora, pode ser outra letra?
P: Sim.
A18: Mudando as letras, não alteram os resultados?
A12: Lógico que não.
Alunos: Então, posso por qualquer letra para representar os valores de Larissa e Carlos?
P: Sim.
P: Posso dizer que Larissa mais Carlos tem R$ 23,50 mais R$ 37,50?
Alunos: Sim, professora.
P: Qual outra maneira de representar os dados?
Alunos: Larissa + Carlos = 23,50 + 37,50
A12: Professora, poderia ser L + C = 61,00?
P: E se mudássemos a situação para: Larissa ganhou certa quantia para comprar uma blusa que custa R$ 36,90, mas se com esta quantia ainda lhe faltassem R$ 10,00?
A3: Professora, pode ser que Larissa tenha L + 10 = 36,90.
A5: Professora, pode ser também representado que Larissa tem 36,90 menos 10.
P: Perguntei para os alunos presente na sala se a representação de A5 estava coerente?
A33: Não pode, porque tem que apenas somar os valores.
P: A33 pode sim, a diferença é que A5 apenas fez a operação inversa da adição.
A35: Professora, então eu posso, também, abreviar a expressão de A5 como L = 36,90 – 10.
P: Sim pessoal.
P: Juntos da turma, criamos o problema: O dobro da quantia que Marcos possui, mais 15 reais, dá para comprar exatamente um objeto que custa R$ 60,00 reais. Quantos reais Marcos possui?
P: Como vamos descobrir o valor de Marcos?
A5: Professora o dobro da quantia de Marcos, é o valor que ele tem somado duas vezes.
A5: Então, poderia escrever isso, professora?
A12: Então, é o valor de Marcos duas vezes e depois igual a 15.
A18: Eu escreveria assim, marcos + marcos + 15
A6: Eu faria diferente, como 2marcos + 15
P: Então, juntando o pensamento de A12 com A18, temos:
Marcos + Marcos + 15.
2Marcos +15.
A20: Vocês esqueceram o valor do objeto que custa 60,00.
P: Então como ficaria?
A20: Marcos + Marcos +15 = 60, ou seja 2Marcos +15 = 60
P: Assim, continuando o mesmo raciocínio de A20:

Marcos + Marcos +15 = 60
2Marcos +15 = 60 pode simplificar a expressão.
M + M + 15 = 60
2M + 15 = 60.

A8: Como faremos para resolver essa expressão?
P: O que vocês fariam para eliminar o número 15 do lado esquerdo da expressão?
A12: Professora posso diminuir 15.
A15: Lógico que não pode, A12.
P: Realmente A12 pode, sim, diminuir de 15. Então como ficaria?
Alunos: 2M + 15 -15 = 60.
P: Neste caso, como vocês acrescentaram – 15 do lado esquerdo da expressão, logo é necessário acrescentar o mesmo valor do lado direto, mantendo uma equivalência em ambos os lados.
A20: E se fosse – 15 professora? Eu acrescentaria +15?
P: Sim, porque os mesmos valores que você acrescenta de um lado deve acrescentar do outro lado da expressão, pois senão o valor de um lado deixaria de ser igual ao outro.
A22: Professora, então ficaria assim: 2M + 15 – 15 = 60 -15

2M + 15 – 15 = 60 -15
2M + 0 = 45
2M = 45.
A12: Agora professora só dividir 45 por 2.
P: __ Sim, concordo a A12, mas como você elimina o número 2?
A12: Professora, não sei.
A24: Professora, pode dividir os dois lados por 2?
P: Como?
A24: Assim. 2M/2 = 45/2
1M = 22,50.
P: Assim pode, A24.
P: Todos concordam com o raciocínio de A24?
Alunos: Sim.

Depois do diálogo anterior, a professora introduziu o conceito de equação para a turma que segundo Bianchini (2011, p. 106), "É toda sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta letras representando números".

A12: __ Ah! Professora, então quando construímos juntos as expressões anteriores, podemos chamar todas de equações.
P: Sim. Vocês gostaram de construir o conceito desta maneira?
A32: Professora, foi diferente, porque sempre nós temos o conceito e depois resolvemos o problema. E deste jeito foi gratificante, sem sabermos o problema nos proporcionou ao chegar ao conceito de equações.
P: Marcos tem 22,50 reais, neste problema esta quantia pode ser outro valor turma?
Alunos: Não pode.
A12: __ Por que professora, a quantia não pode ultrapassar de 60,00 reais.
P: Depois de construído o conceito de equações, conceituamos também o que é incógnitas que indicam algo desconhecido e que se pretende conhecer. Então, antes de responder o problema, vocês conheciam o Valor de Marcos.
A20: Não. Logo o valor de Marcos, representado pela letra M, pode ser chamado de incógnitas?
P: Sim.
P: Refazendo o Problema 8 (proposto no plano de ensino) novamente. Então perguntei para os alunos se teria como trocar os números pelas letras?
Alunos: Tem, professora.
A37: Professora, basta dizer Carla = 20 reais por horas, sendo cada uma hora de trabalho.
A32: Então Carla = 20 reais a mais por horas que trabalhadas
A12: Posso afirmar que Carla receberá 20 reais multiplicado a cada 1 hora trabalhada.
C = 20. h
P: Está correto o pensamento do A12?
A22: Sim, professora, só basta o A12 multiplicar pelas horas trabalhadas, como por exemplo 3horas, então: C = 20. (3), então C = 60 horas.
P: O valor das horas pode mudar, ou seja, poderia ser qualquer valor?
A33: Sim, pois vai depender das horas que Carla trabalhar.
P: O valor de três horas que Carla trabalhou a mais, ela receberá 60 reais, e para fazer os cálculos matemáticos esssa horas estão sendo representadas pela letra h. O valor de h está funcionando como incógnita?
A3: Não, professora, porque o h está mudando de acordo com as horas.
P: Realmente A3, a letra h pode assumir diversos valores. Neste caso, a letra h é chamada de variável.

A27: Professora, veja se compreendi, quando o valor de determinada letra pode assumir vários resultados é chamado de variável e quando determinada letra, no caso de Marcos, que pode, encontrar um único valor, é chamado de incógnitas.
P: Sim, é basicamente isso, A27. Então, agora podemos fazer apresentar um conceito para variável. Uma variável é um símbolo, normalmente uma letra, que pode assumir qualquer valor num determinado conjunto, ou seja, pode sofrer variações.

A professora pediu aos alunos(as) que criassem um problema no caderno e depois expusessem a resolução na lousa. Na Figura 39 é apresentada uma ilustração desse momento:

Figura 39 - Resolução de problemas criado pelas as alunas

Fonte: Dados da pesquisa

Essas alunas, que apareceram na Figura 39, apenas descreveram os resultados do problema que criaram. Pode ser visto, por meio da ilustração, que, cada uma escolheu a letra que quis, para representar a incógnita da equação que construiu. Salientamos que há outras resoluções que foram apresentadas por outros alunos (as) e não estão nessa foto. Esses outros estudantes se recusaram a serem fotografados, alegando não gostarem desse tipo de exposição, e a Professora-Pesquisadora respeitou essa decisão. Nesses encontros, a Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas estava presente, e entendemos esse momento, destacado pela Figura 39, como uma plenária, em moldes semelhantes às que são propostas por essa metodologia.

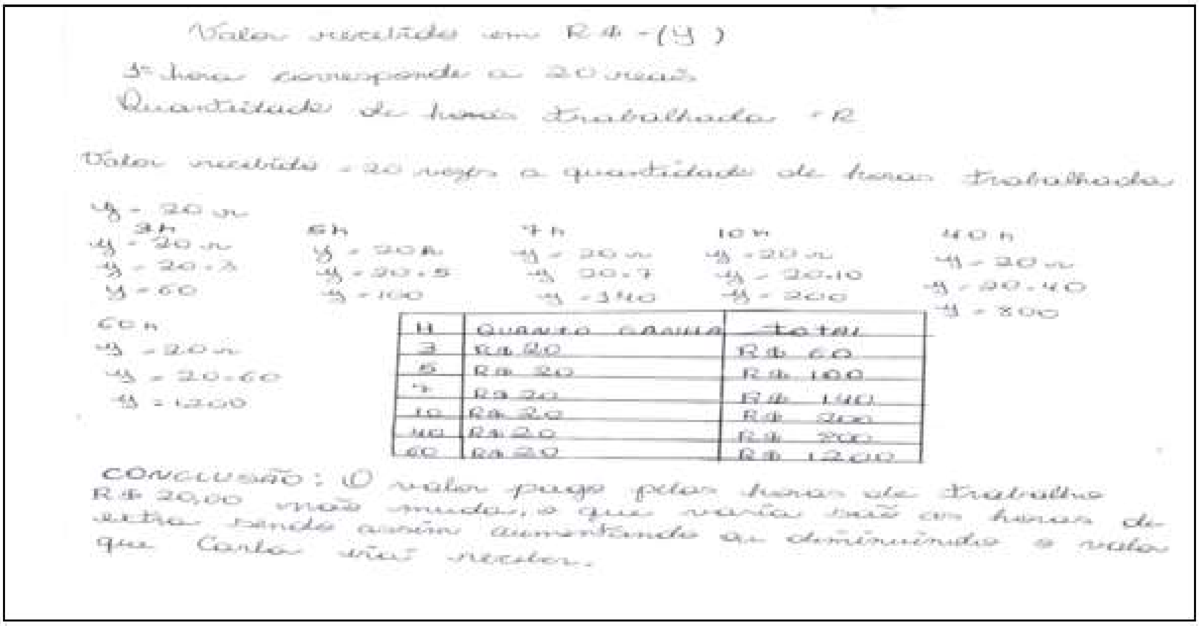
20° e 21° Encontro

Nesses encontros (24 e 25 de setembro), com uma aula em cada um desses dias, os alunos refizeram a segunda parte do plano de ensino, compostas com os Problemas 8, 9, 10 e 11, que foram feitos no encontro 20° e os Problemas 12, 13 e 14 que foram feitos no encontro 21º, empregando a definição de equações e variável, como serão apresentados nos resultados produzidos pelos alunos a seguir. Começando como o Problema 8 resolvido novamente por todos os alunos presentes.

Já a aluna A19 usou letras para representar os valores. Assim, como definição de variável, ela descreveu o que cada letra representava, dando significado à aprendizagem e através de sua conclusão, pôde observar que ela entendeu o que é realmente variável.

Desenvolveu o segundo princípio do pensamento algébrico, utilizou tabelas para representar os dados de como pensou e principal desse trabalho a aprendizagem de equações. Isto pode ser visto na figura 40:

Figura 40 - Resolução feita pela aluna A19



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre aluna e Professora-Pesquisadora:

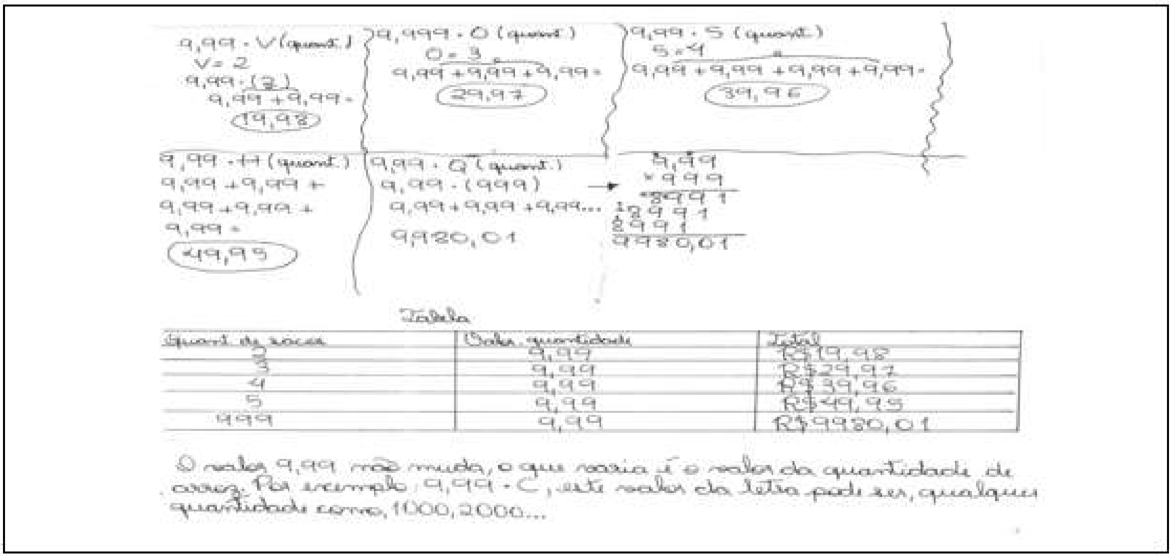
P: Por quê A19, você utilizou as letras y e r para resolver o problema?
A19: A letra y seria o valor recebido e r, a quantidade de horas trabalhadas, podendo variar de acordo com as horas trabalhadas de Carla.
P: Você se identificou com esse problema?
A19: Sim, professora, porque minha mãe trabalha de diarista e recebe por horas trabalhadas.

Todos os presentes nessa aula resolveram o Problema 8 e evidenciou-se o uso da segunda vertente do pensamento algébrico, mas a maioria utilizou letras para representar e desenvolvendo a terceira vertente de pensamento algébrico.

Segundo Kaput (2008), a aluna A19 fez o uso de um pensamento funcional ao explorar correspondência entre horas e quantidade de horas e usar tabela para representar os resultados. De acordo com Radford (2009), essa aluna desenvolveu, teve um pensamento contextual, quando fez o seguinte relato "*O valor pago pelas horas de trabalho, R$ 20,00, não munda, o que varia são as horas extras*".

Apresentamos a seguir a resolução do Problema 9, feita pela aluna A3. Observamos que essa resolução foi bem detalhada, pois o aluno atribuiu letras para representar o valor da quantidade comprada, registrou resultados em tabela e, mostrou um processo de generalização ao dizer que o valores atribuídos às letras, quantidade de arroz, poderia variar, mas o valor R$ 9,99, valor de cada saco de arroz, mantinha-se se fixo. Conforme a figura 41:

Figura 41 - Resolução feita pela aluna A3



Fonte: Dados da pesquisa

Nesse tempo, ela usou a definição de variável, desenvolveu o primeiro, segundo e terceiro vertente do pensamento algébrico, que pode ser visto no diálogo entre aluna e Professora-Pesquisadora:

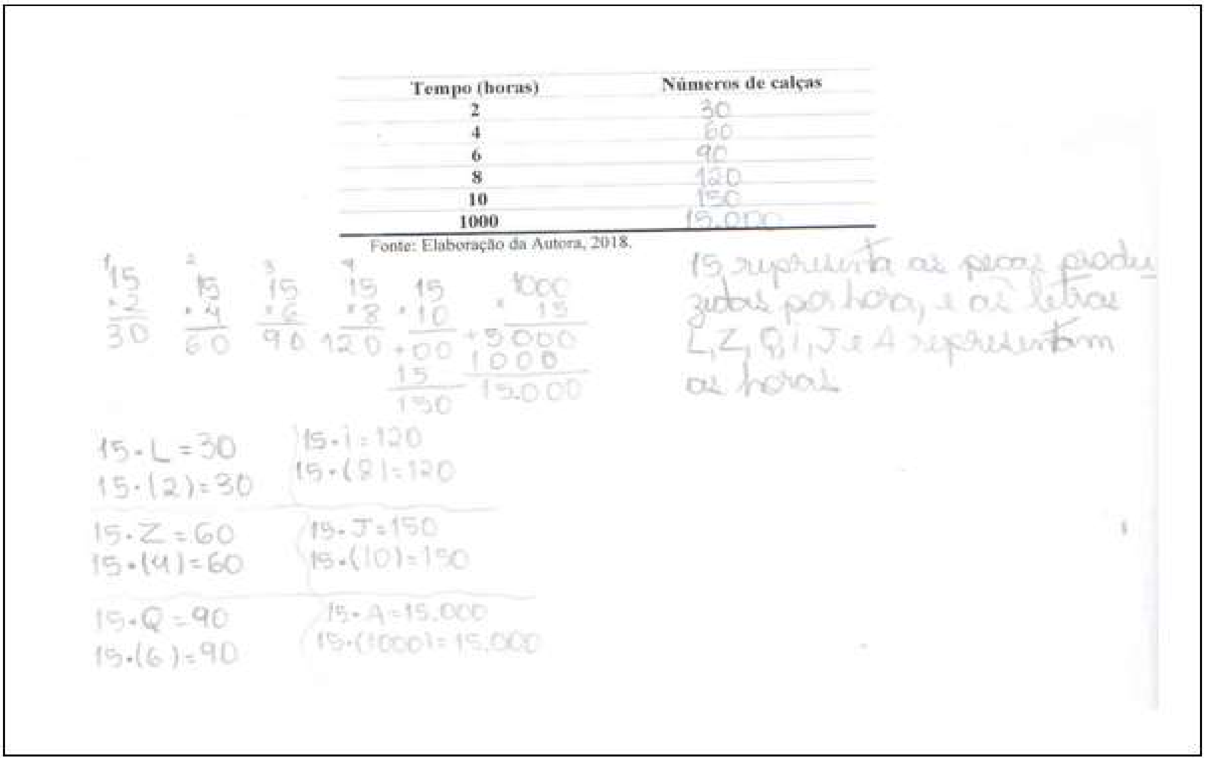
P: Por que A3 você escreveu "R$ 9,99. V (quanti.)" e, também, porque representou em tabelas para representar os resultados do problema?
A3: Professora depois que foi introduzido o conceito de variável e equação, na aula anterior, percebi, nesse problema, que os valores da quantidade poderiam variar sendo qualquer valor como 2, 4, 5, e assim por diante, e o que não mudaria era o valor 9,99. E, no sentido de

representar os valores em tabela, foi porque tinha que estipular uma quantidade depois multiplicar por 9,99 e, por fim, encontrar o valor total. Então criei uma tabela com três colunas para melhor apresentar esses resultados.

De acordo com as ideias de Lins (1992), a aluna utilizou um pensamento quantitativo, já, de acordo com Radford (2009), ela apresentou o pensamento contextual, evidenciado no trecho "*O valor 9,99 não muda, o que varia é o valor da quantidade de arroz*", e o pensamento padrão, ao utilizar letras para representar os valores desconhecidos como pode ser visto no trecho "*9,99.V* ".

No Problema 10, os alunos já estavam mais preparados para responder, conforme pode ser visto na Figura 42, desenvolvida pela aluna A3:

Figura 42 - Resolução feita pela aluna A3



Tempo (horas)	Números de calças
2	30
4	60
6	90
8	120
10	150
1000	15.000

Fonte: Elaboração da Autora, 2018.

15 representa as peças produzidas por hora, e as letras L, Z, Q, I, J e A representam as horas

15·L = 30
15·(2) = 30
15·Z = 60
15·(4) = 60
15·Q = 90
15·(6) = 90
15·I = 120
15·(8) = 120
15·J = 150
15·(10) = 150
15·A = 15.000
15·(1000) = 15.000

Fonte: Dados da pesquisa

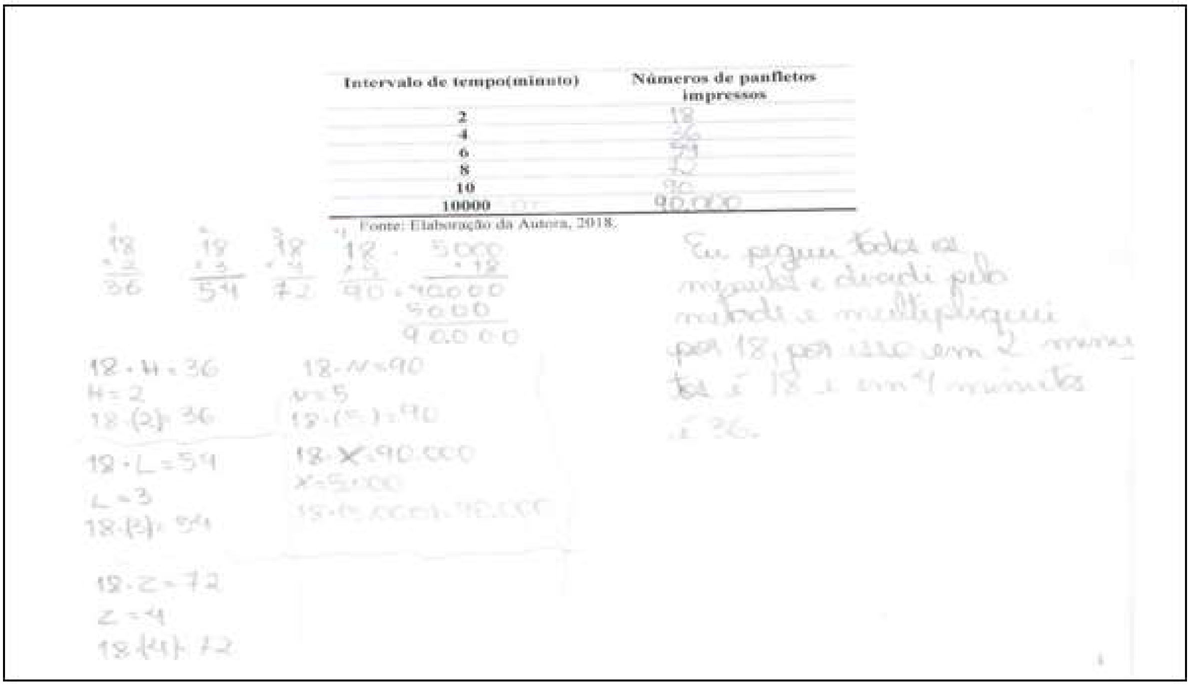
A aluna A3 mostrou estar com um raciocínio dentro da segunda e da terceira vertentes do pensamento algébrico. De fato, ela utilizou letras para representar um valor que varia, como como pode ser visto no trecho " *15x L; 15xZ, 15x* i", conforme pode ser visto na fala da aluna durante o diálogo, que descrevemos a seguir:

P: Por que você deixou o valor 15 sem mudar?
A3: Porque, professora, a cada uma hora são produzidas 15 peças de calças.

P: Por que você utilizou letras diferentes como L, Z, Q, I, J para representar o resultado do problema:
A3: Porque o que pode mudar são as horas de fabricação das calcas, então representei por letras diferentes.

No Problema 11, os alunos foram mais rápidos para responder. A figura 43, ilustra a resolução da aluna A3:

Figura 43 - Resolução feita pela aluna A3



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e a aluna.

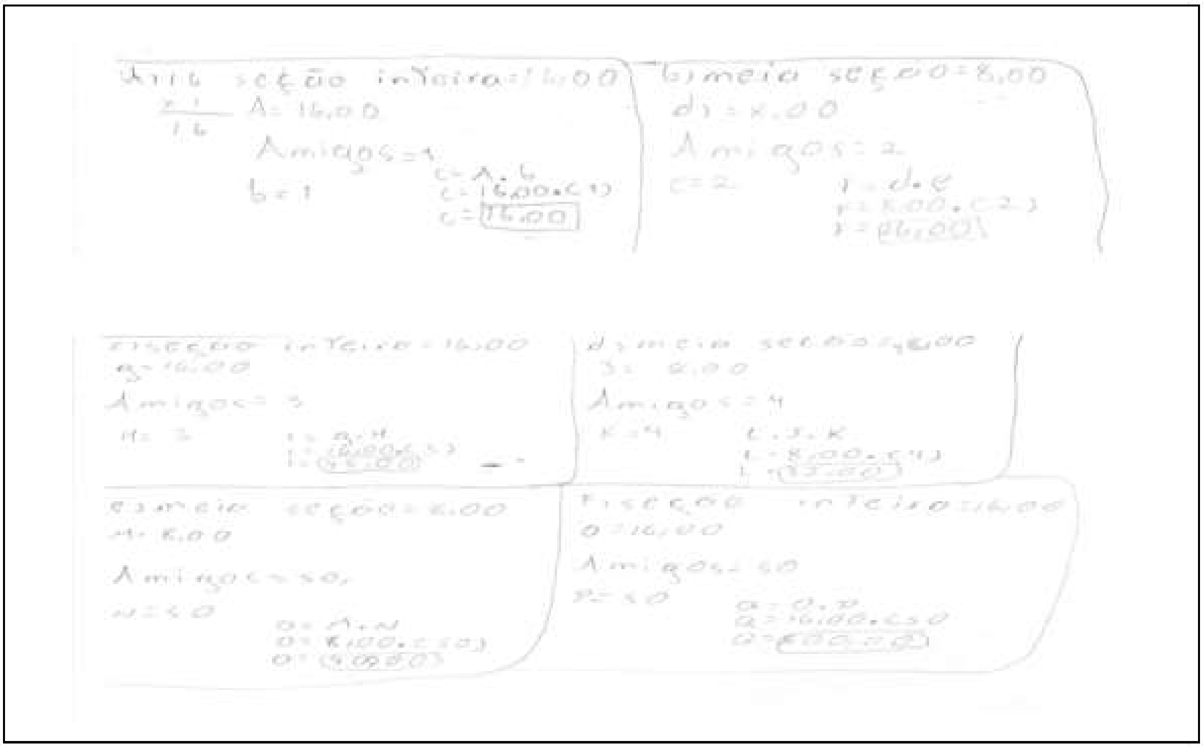
P: Como você chegou à resposta?
A3: Nesse problema pode ser utilizado o mesmo raciocínio do Problema 10, então, novamente estipulei letras diferentes para os resultados como H, L, Z, N. E mantive fixo o valor 18.
A aluna A3 teve um raciocínio dentro de acordo com a segunda e a terceira vertentes do pensamento algébrico. Ela utilizou letras para representar o valor que muda. E relembrando que quando este mesmo problema foi aplicado pela primeira vez sem a intervenção da professora, apenas um aluno conseguiu resolvê-lo.

Depois que a Professora-Pesquisadora interveio, agindo como mediadora, ou seja, por meio de questionamentos, conseguiu levar os alunos a refletirem, de modo a desenvolverem um raciocínio algébrico necessário para o entendimento e a resolução desse problema, todos conseguiram chegar à solução correta. E, foi possível perceber, enquanto eles estavam resolvendo este problema novamente, alguns comentavam entre si, expressões do tipo "*nossa como eu não havia prestado atenção? de agora em diante vou ficar mais atendo*".

Notamos que os alunos tanto na resolução do Problema 10, quanto na do 11, apresentaram um pensar funcional dentro da concepção de Kaput (2008). Isso pôde ser notado quando eles utilizaram letras para expressar o valor que vai variar como "*18.H*", que aparece explicitamente na resolução apresentada pela aluna A3. Isso é também o pensamento contextual de acordo com as ideais de Radford (2009).

O encontro 21º começa com o Problema 12 e encerra com o Problema 14. Na resolução do problema 12, feita pelo aluno A12, observamos que ela registrou os colegas descrevendo a quantidade, usou o conceito de variável, destacando os valores que vão variar. Conforme pode ser visto na figura 44:

Figura 44 - Resolução feita pelo aluno A12



Fonte: Dados da pesquisa

Segue diálogo entre a Professora-Pesquisadora e o aluno:

P: Por você utilizou letras para representar os resultados? E essas letras funcionam como incógnita ou variável?
A12: Professora, por exemplo, no item a), utilizei a letra H, para representar a quantidade de amigas que ela levaria ao cinema, então posso dizer que, neste caso, a letra H assume o papel de variável, pois esses valores de amigos podem variar.

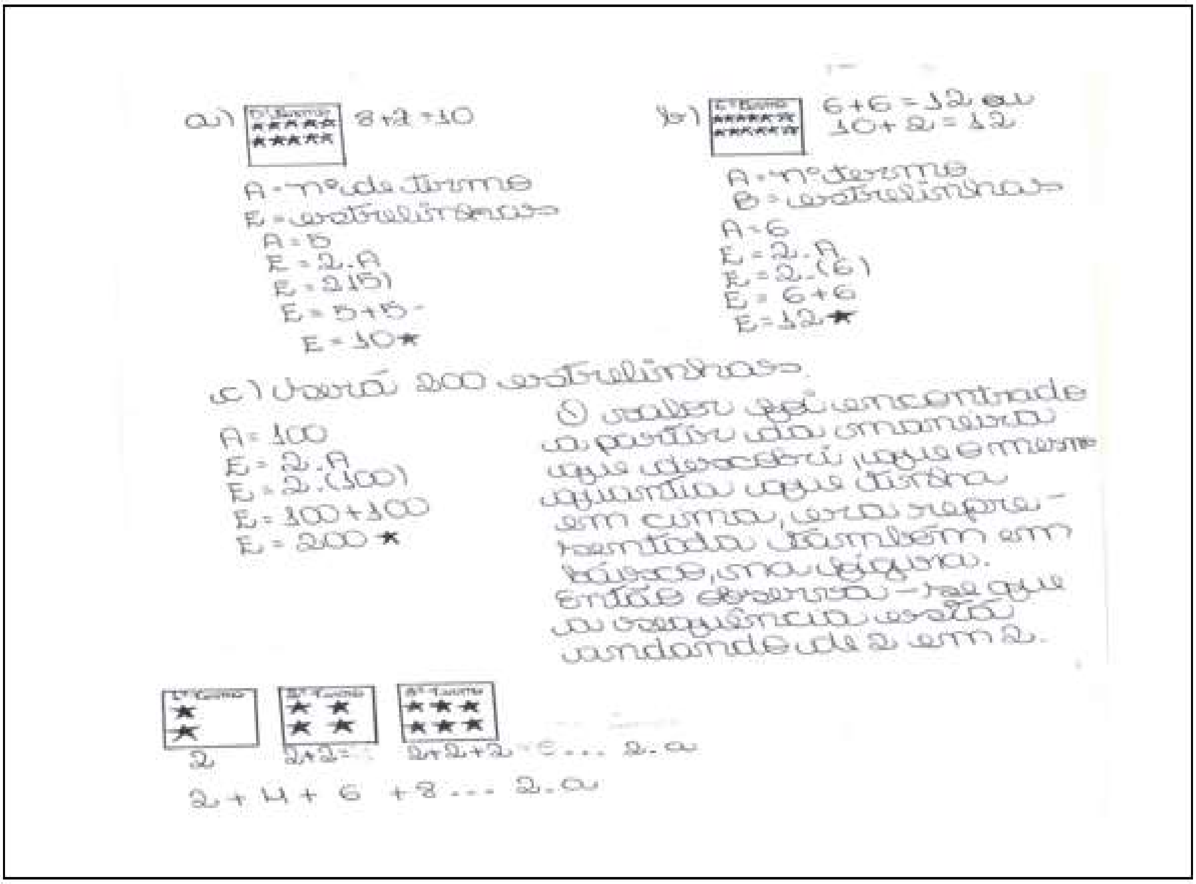
O aluno A12 produziu significado para variável e equações, promovendo a aprendizagem sobre esse conteúdo. Isso pôde ser percebido nos seus métodos de registros dos dados, evidenciando, nesse caso, o pensamento algébrico dentro da segunda vertente, que Kaput (2008) chama de pensar funcional, da terceira vertente, designada por padrão e modelação por Radford (2009) e Kaput (2008), respectivamente.

O Problema 13 foi refeito por toda a turma. A aluna A20 resolveu este mesmo problema no início da pesquisa, quando este problema foi aplicado pela primeira vez. Na primeira resolução apresentada por ela, foi possível perceber a primeira e a segunda vertente do pensamento algébrico. Agora, nesse segundo momento, quando a problema foi refeito por essa aluna, constatamos a presença da terceira vertente, quando ela utilizou letras no seu processo de generalização, isto é, configurou suas ideias em uma linguagem concebida com significado. "[...] temos convicção da importância do domínio, pelo aluno, da linguagem, concebida com significados.[...]. Porém, o aluno deve perceber a importância da utilização dessa linguagem e construí-la com compreensão, com significado" (KAPUT, 2008, p. 45).

Os outros alunos que estavam presentes nesta aula, com intervenção da Professora-Pesquisadora, também conseguiram responder esse problema.

Na figura 45 está a resolução feita pela aluna A20:

Figura 45 - Resolução feita pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

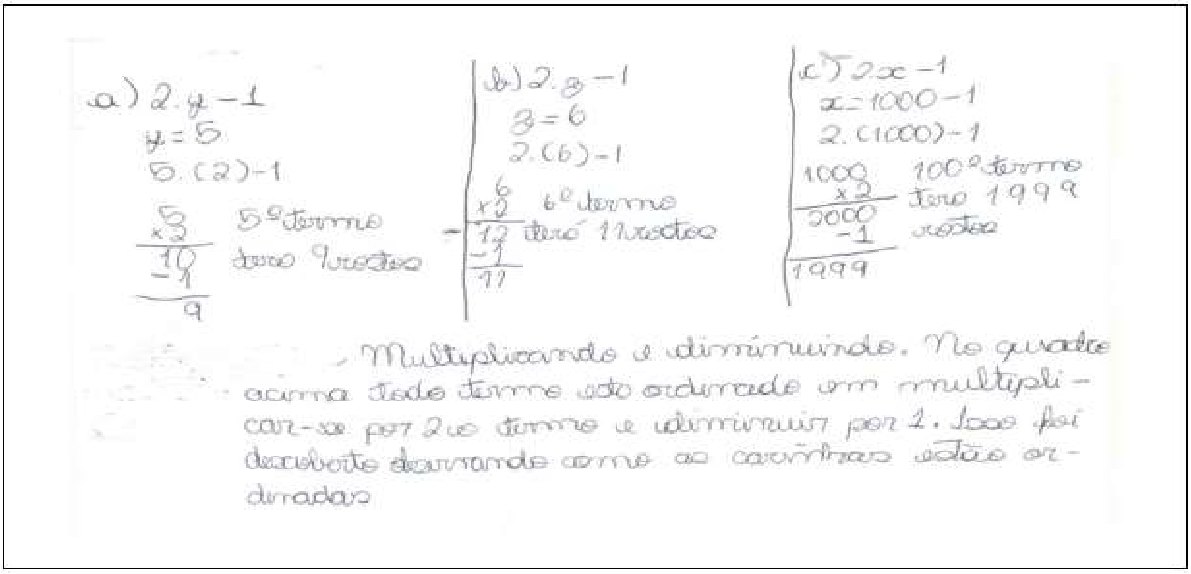
Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e a aluna.

P: No início dessa pesquisa você resolveu esse mesmo problema, mais não tinha acrescentado letras para representar o resultado, porque agora você apresentou?
A20: Porque agora teve, professora, a sua intervenção, para apresentação do conceito de variável, então percebi que posso utilizar qualquer letra para encontrar o resultado do problema, e nesse caso, utilizei a letra A para encontrar a quantidade de estrelinhas, em cada intervalo.

A aluna A20, na resolução do Problema 13, apresentou um raciocínio dentro da primeira e da segunda vertentes do pensamento algébrico, ao somar duas a duas as figuras, depois atribuiu letras para representar esta sequência e, por fim, generalizou e concluiu, dizendo que, dessa maneira, poderia determinar a solução para qualquer quantidade. Na concepção de Lins (1992), Radford (2009) e Kaput (2008), a aluna A20, ao resolver o Problema 13, fez uso de raciocínio dentro das três vertentes do pensamento algébrico aritmiticismo, funcional ou padrão e modelação.

Ainda nesse encontro foi desenvolvido também o Problema 14. Na figura 46 está a resolução do aluno A6.

Figura 46 - Resolução feita pelo aluno A6



Fonte: Dados da pesquisa

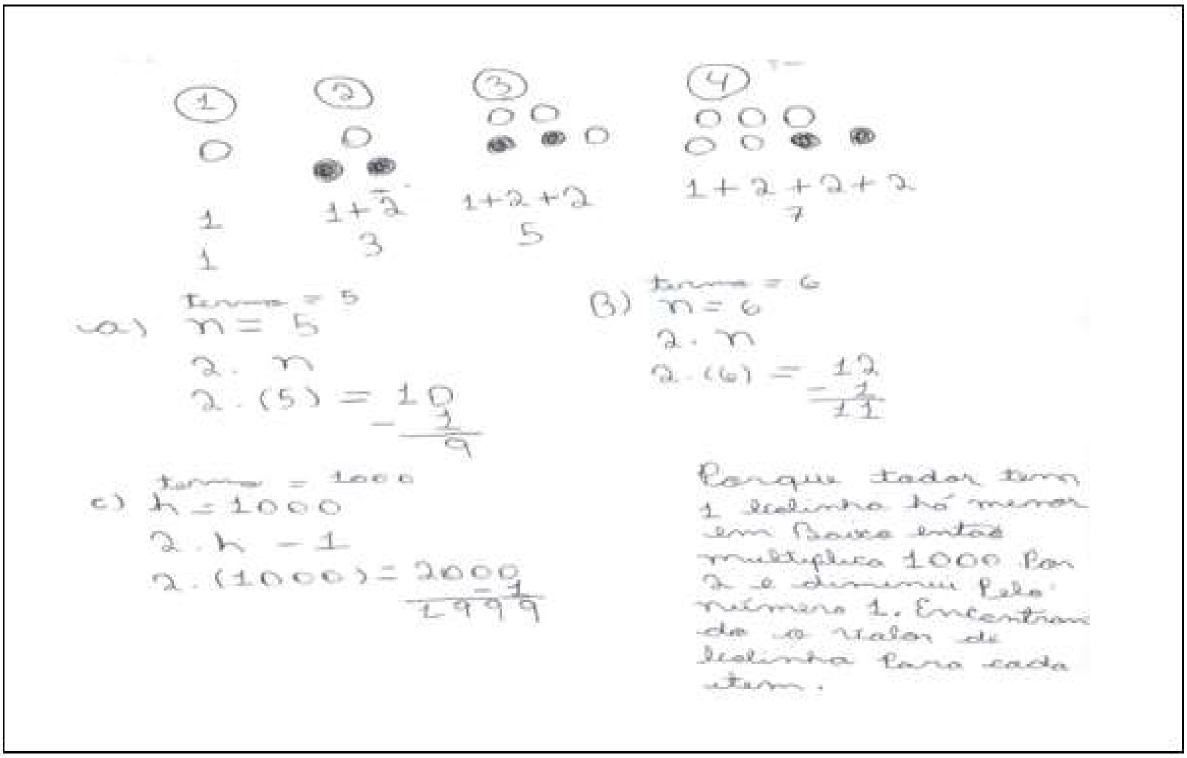
Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e o aluno

P: Como você chegou à conclusão de que bastava escrever 2y – 1?
A6: Professora, observei a sequência das carinhas de como caminha e sempre diminuindo de 1.

O aluno A6 usou letras diferentes para representar cada momento, descobrindo a fórmula "*2y -1*" para encontrar a quantidade de bolinhas em cada imagem. Assim, constatamos a terceira vertente do pensamento algébrico, analiticidade, quando, de acordo com Lins (1922), o desconhecido é tratado como conhecido.

Ao resolver esse mesmo problema, o aluno A42 registrou sua resolução em seu caderno, e a apresentamos aqui, na Figura 47:

Figura 47 - Resolução feita pelo aluno A42



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e o aluno A42:

P: Por que você escreveu 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 2 = 5... ?
A42: Observando a sequência da montagem das carinhas como na segunda figura, observei que elas aumentam 2 em 2.
P: Porque você concluiu que a expressão 2n – 1 poderia ser usadas para qualquer quantidade da sequência?
A42: Através da primeira imagem que, como resultado, devia dar 1.

O aluno A42 usou letras diferentes para representar cada momento, descobrindo, como já mencionamos, a fórmula "*2n -1*". Para encontrar a quantidade de bolinhas em cada imagem, ele representou as bolinhas do início e as demais foram aumentadas de 2 em 2, percebendo um padrão. Assim, podemos perceber a segunda e terceira vertentes do pensamento algébrico.

Tanto o aluno A6 como o aluno A42, para resolver o problema 14, utilizaram o pensamento contextual que, de acordo com Radford (2009), pode ser evidenciado quando ele escreve o que entendeu sobre problema e contextualiza a sua resolução, como pode ser observado no trecho, escrito por A42 "*Porque todos tem uma bolinha a menos em baixo*".

22° e 23° Encontros

Esses dois encontros (25 de setembro, 2 aulas) foram compostos por duas aulas de cinquenta minutos. O encontro 22º aconteceu na primeira aula e o encontro 23º, na quarta aula. Os alunos foram convidados para representar na lousa suas resoluções dos problemas da segunda parte do nosso plano de ensino, a Professora-Pesquisadora, fazendo as devidas intervenções.

24° e 25° Encontros: **Terceira parte do Plano de Ensino**

Nestes encontros, realizados em 01 de outubro, buscamos identificar, através da resolução dos problemas propostos, a presença, ou não, da terceira vertente do pensamento algébrico dos estudantes. Essa vertente, caracteriza a linguagem, com seu significado e a capacidade de se manipularem objetos algébricos, caracterizados, desse modo, a capacidade de produção de conhecimento especializados sobre álgebra, no nosso caso, mais especificamente, equações de primeiro grau.

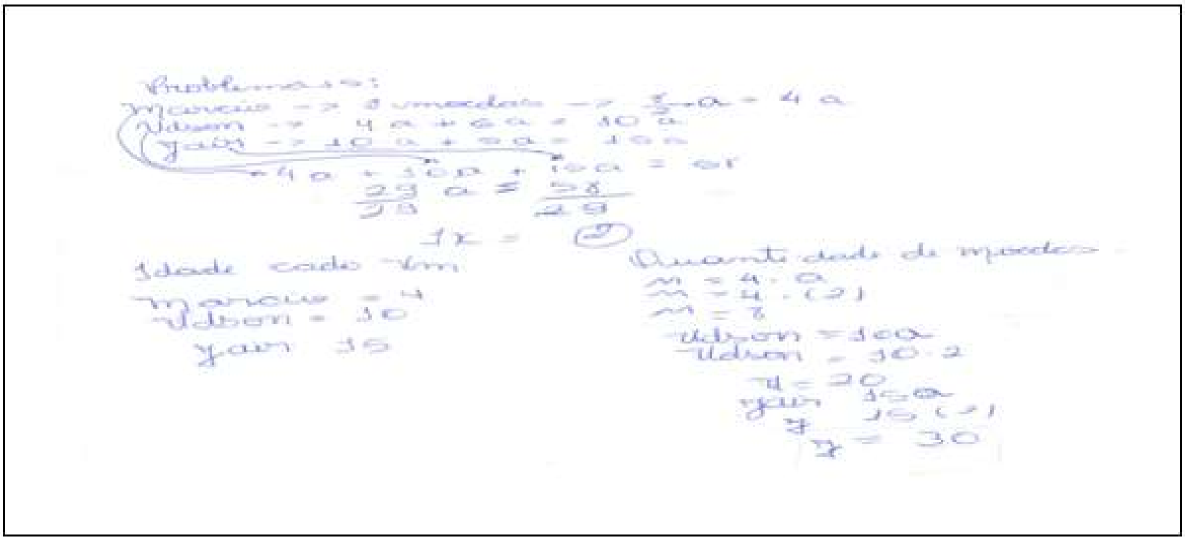
O encontro 24º aconteceu na primeira aula e foram entregues impressos os problemas 15, 16 e 17 para cada aluno. O encontro 25º aconteceu no quarto horário e também foram entregues impressos os problemas 18, 19, 20 e 21 para cada aluno. Então, começamos com o Problema 15 abaixo:

Problema 15) Luís Carlos é um pai de família que se preocupa com a educação financeira de seus filhos. Pensando em ensiná-los a lidar com a moeda corrente, ele decidiu dar uma mesada a cada um de seus filhos. Para isso, elaborou uma regra: Cada filho receberá, em moeda corrente, o valor correspondente ao dobro de sua idade. Márcio receberá 8 moedas, Udson, o filho do meio, é 6 anos mais velho que Marcio e Jair é o mais velho dos três. Sabe-se, que para pagar a mesada dos filhos, Luís desembolsará 58 moedas. Qual a idade dos filhos de Luís? Qual a quantidade de Moeda que Udson e Márcio receberam de seu pai?

A resolução do problema 15 feito pela aluna A31, fez uso das letras **a** e **m** e usou o conceito de equação para resolver esse problema, buscando a produção de significado. Dessa forma, pudemos constatar a presença da terceira vertente do pensamento algébrico.

A Figura 48 ilustra essa situação:

Figura 48 - Resolução feita pela aluna A31



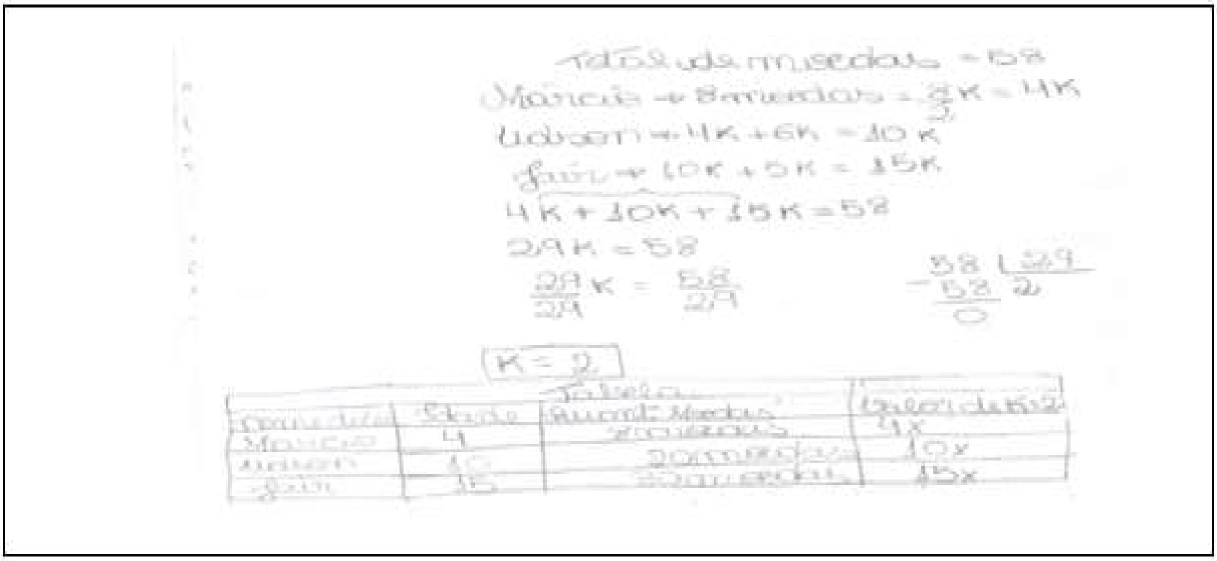
Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e a aluna

P: Por que você escreveu 4a + 10a + 16a = 58?
A31: Professora, usei a ideia de equação, onde a letra ***a*** *funcionará como incógnita.*
P: Por que essa letra é igual a 58?
A31: Porque a soma da quantidade de moedas dos três é 58.

A resolução feita pela aluna A20, do mesmo problema 15, pode ser vista na Figura 49:

Figura 49 - Resolução feita pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e a aluna A20:

P: O que significa esse K = 2?
A20: O valor para encontrar o valor que cada um receberá em moeda.

A aluna A20 representou com a letra k a quantidade de moedas, encontrou a idade de cada um, registrou os dados na tabela e fez uma relação entre as variáveis, como trocando k por x. Logo, fez o uso de um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

Apresentaremos também a resolução feita por A3, desse mesmo problema. Essa resolução é ilustrada pela Figura 50:

Figura 50 - Resolução feita pela aluna A3

Fonte: Dados da pesquisa

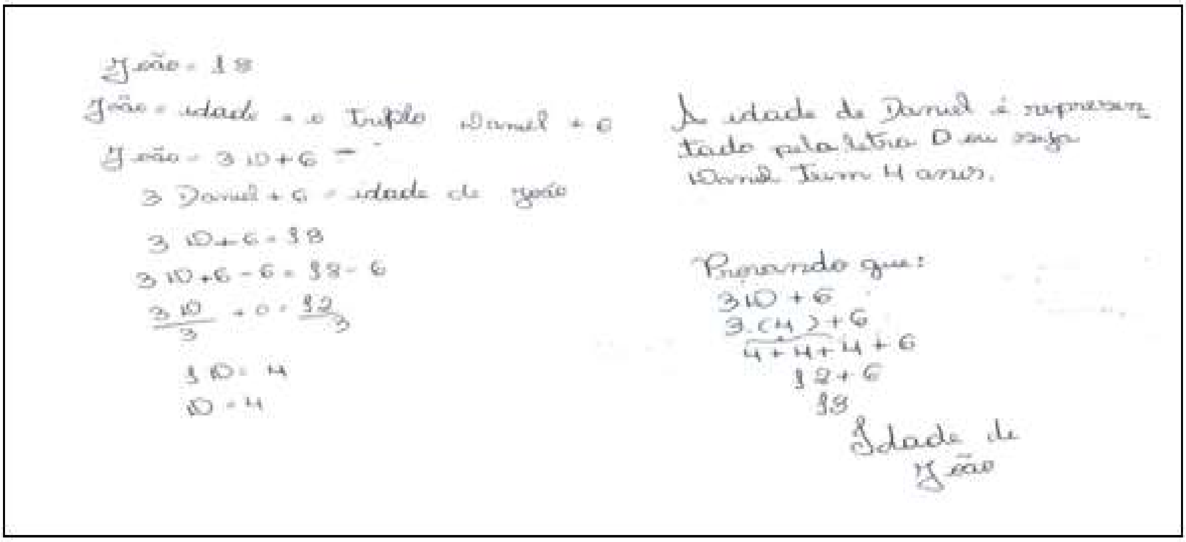
A aluna A3 representou com a letra *n* a quantidade de moedas e apresentou de forma detalhada a idade e a quantidade de moeda de cada um. Assim, utilizou um raciocínio dentro da terceira vertente de pensamento algébrico.

Os alunos A31, A20 e A3 desenvolveram um raciocínio dentro da segunda vertente do pensamento algébrico que, de acordo com as ideias de Lins (1992), Radford (2009) e Kaput (2008), caracteriza-se como analiticidade (em busca de verdades), pensamento padrão e modelação (com uma linguagem algébrica) respectivamente.

Problema 16) João é primo de Daniel. Sua idade é o triplo da idade de Daniel acrescida de 6 anos. João tem 18 anos. Qual idade de Daniel?

A resolução desse problema feito por A40, ilustrado pela Figura 51, a seguir:

Figura 51 - Resolução do Problema 16 feita pela aluna A40



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e a aluna A40.

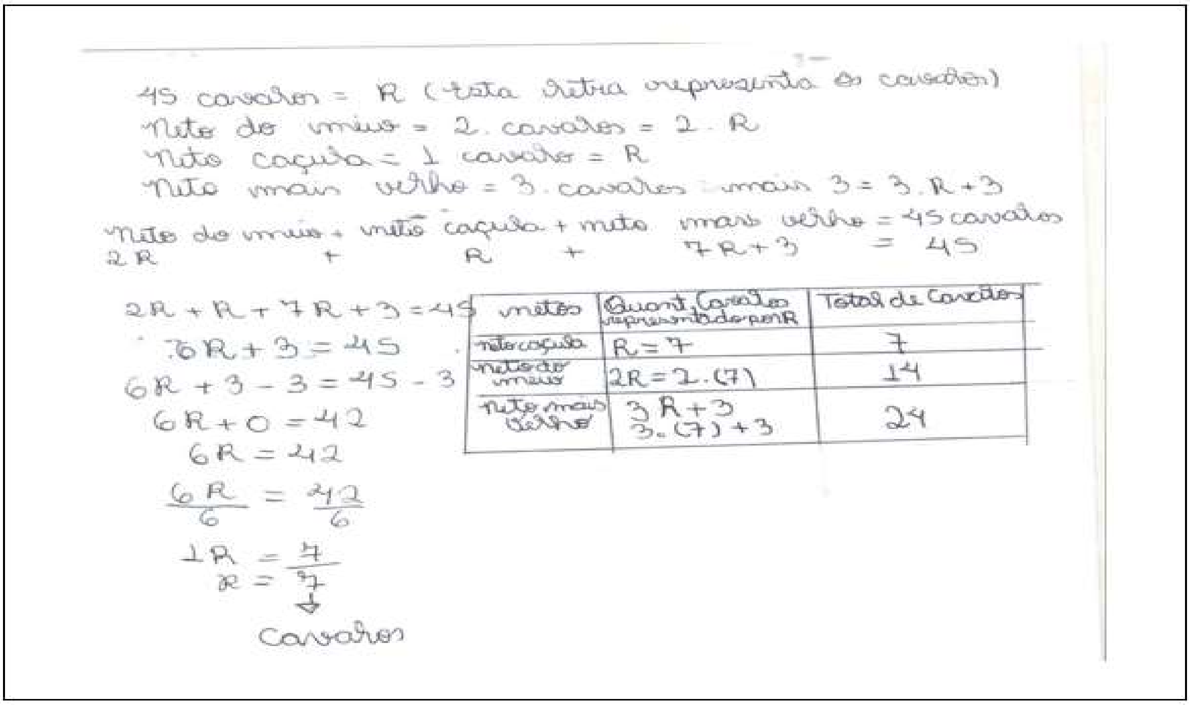
P: Me explica como você fez para resolver esse problema.
A40: Pensei e escrevi que o triplo da idade de Daniel mais 6 é igual 18, idade de João então formalizei que 3D +6 = 18.
P: Você usou o conceito de equação?
A40: Professora, como vou encontrar a idade de Daniel, sendo representado pela letra D, então esse valor é único, não podendo variar, então usei o conceito de equação. Então para resolver essa equação acrescentei (menos 6) tanto no primeiro membro quanto no segundo membro, depois dividir por 3 o lado esquerdo e o direito da equação e, por fim, encontrei o número 4, que corresponde a idade de Daniel.

A aluna A40 representou com a letra D a idade de Daniel. A maneira que essa aluna resolveu o problema, operando com o inverso aditivo ou multiplicativo, até chegar ao valor 4, valor da idade que ela estava procurando, ou seja, idade de Daniel, demonstra que claramente um raciocínio algébrico. Nesse caso, uma analiticidade, terceira vertente do pensamento algébrico, na concepção de Lins (1992), pois o processo utilizado por essa aluna faz uso de um método que procura a verdade e, para isso, trata o desconhecido como conhecido. Isso pode ser observado a partir do momento em que a aluna A40 utilizou a letra “D” para representar essa incógnita, e isso se configurou em um processo para determinar a solução desse problema por meio de equações do primeiro grau.

Problema 17) O senhor Hércules tem 45 cavalos que serão doados aos seus netos. O neto do meio terá o dobro que o caçula. O mais velho terá o triplo que o caçula mais 3 cavalos. Quantos cavalos cada neto receberá? (Adaptado de Imenes; Lellis, 1997, p.206-207)

A resolução do Problema 17 feito por A17, como a Figura 52:

Figura 52 - Resolução feita pelo aluno A17



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e o aluno A17.

P: Me explica como você chegou à resposta do problema?
A17: No primeiro momento, escolhi uma letra para representar os cavalos, então organizei os dados e montei a seguinte equação: "2R + R + 3R + 3 = 45", então somei todas a letras R, encontrando 6R + 3 = 45, acrescentei -3, do lado esquerdo e direito da equação, reduzindo ainda mais como 6R = 42, e por fim, acrescentei 6 dividindo tanto o lado esquerdo como o direito, encontrando assim o valor 7 cavalos.
P: E o número 45 é o que na equação? E a quantidade de cavalos para cada um?
A17: Assim, o 45 é quantidade total de cavalos, e o valor 7, representa os cavalos do neto caçula, e para encontrar os outros, basta multiplicar por 2R, encontrando 14 cavalos sendo do neto do meio e por último multiplicar por 3R, encontrando 21 cavalos do neto mais velho.

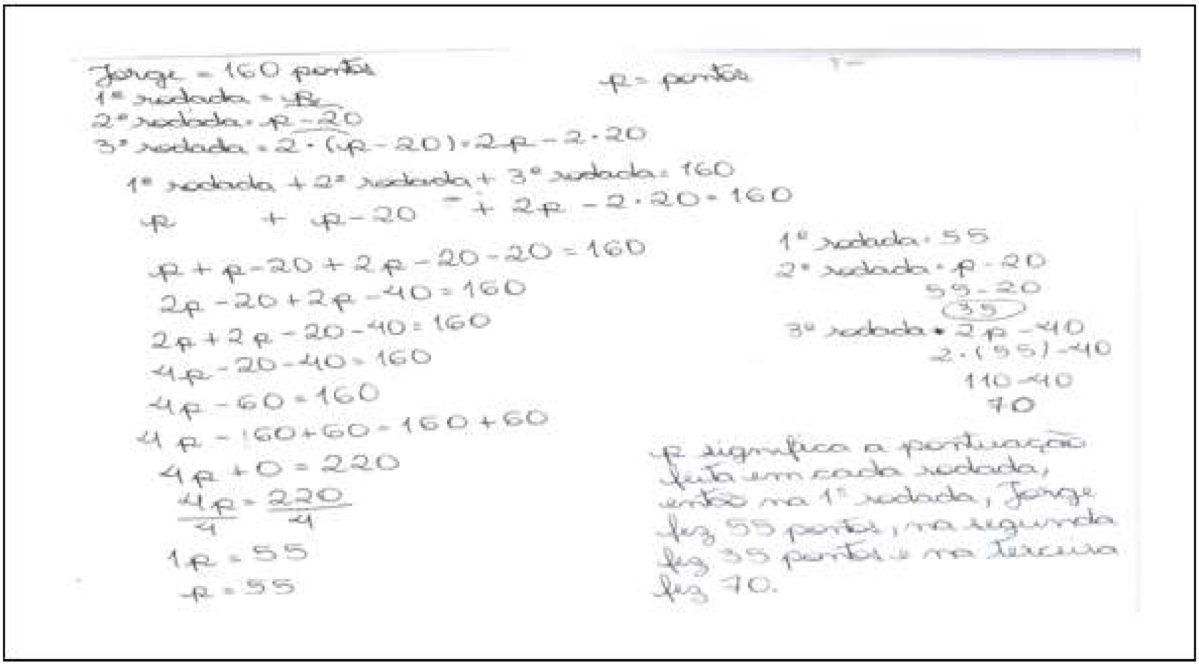
O aluno A17 representou com a letra "*R*" a quantidade de cavalos que o neto do meio vai receber. O método que A17 empregou para resolver o problema e chegar à solução demonstra um raciocínio algébrico. Fez uso de uma tabela para representar dados do problema e, consequentemente, obter o resultado procurado. Com isso, a aluna desenvolveu um pensamento dentro da segunda e da terceira vertentes do pensamento algébrico, sendo um pensamento funcional para representar a ideia de função e um pensamento de modelar, ao utilizar a linguagem algébrica. E isso configurou no uso do conceito de equações do primeiro grau para resolver o problema.

O encontro 25º iniciou-se na quarta aula, com os problemas 18, 19 e 20. A seguir, será apresentado o problema 18 da terceira parte do Plano de Ensino deste trabalho.

Problema 18) Em uma partida de videogame, Jorge conseguiu 160 pontos em três rodadas. Na segunda, ele fez 20 pontos a menos que na primeira, e na terceira rodada ele fez o dobro de pontos da segunda. Quantos pontos Jorge fez em cada rodada?

A resolução do problema 18 feita pela aluna A13, conforme a Figura 53:

Figura 53 - Resolução feita pela aluna A13



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e o participante A13 da pesquisa

P: Me explica como você fez para resolver esse problema?
A13: Como em 3 rodadas Jorge conseguiu 160 pontos então entendi da seguinte maneira "p + p – 20 + 2p – 2. 20 = 160" então resolvi esse problema encontrando o valor de p que é 55, que corresponde à primeira rodada. A segunda rodada pode ser calculada por 55 – 20 = 35 e a terceira rodada duas vezes 55, menos – 40 , que dá 70.

A aluna A13, durante sua resolução, desenvolveu um pensamento algébrico quando utilizou uma letra , no caso **p,** para representar os pontos em cada rodada.

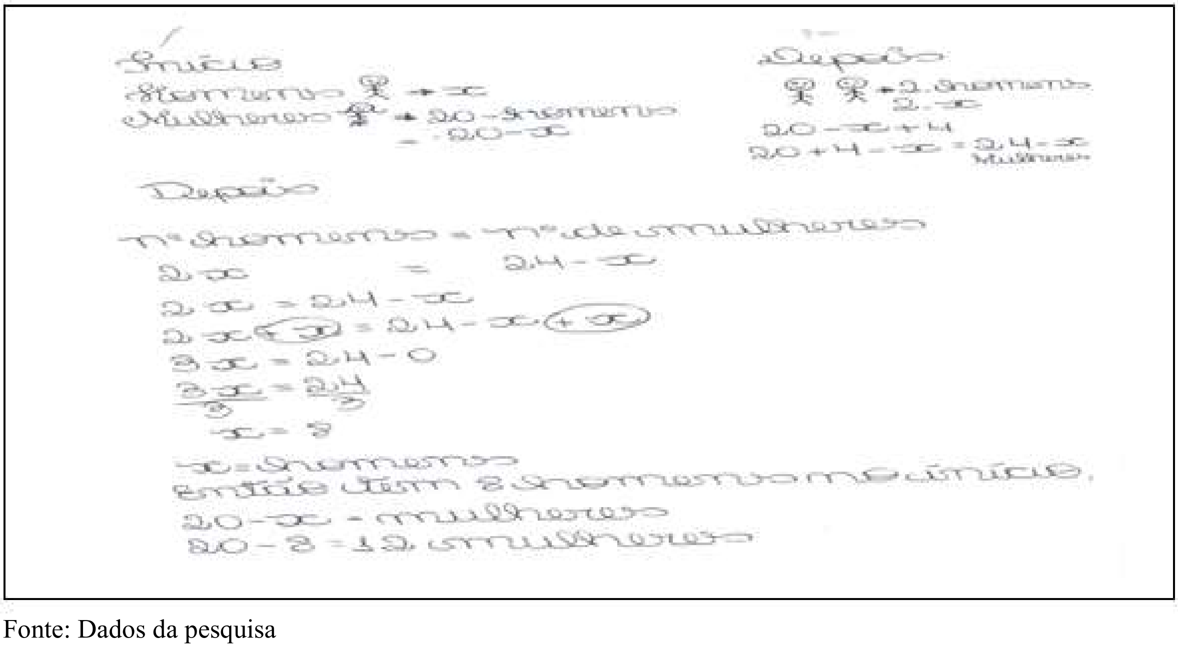
Nesse problema, apresentou na resolução de A13 a primeira, segunda e terceira vertentes de pensamento algébrico, de modo que, de acordo com Lins (1992) apresentou o pensar no aritmeticismo estabelecendo a ideia de igualdade como “p – p – 20 – 2p – 2.20 = 160”, o internalismo envolvendo igualdade e a analiticidade, compreendendo os números genéricos como se fossem específicos e as incógnitas.

Problema 19) Antônia resolveu fazer uma festa para seus colegas de sala. No início de sua festa, o total de pessoas de 20. Depois, o número de homens dobrou e o de mulheres aumentou em 4 mulheres. Depois desse aumento, o número de homens ficou o mesmo que o de mulheres. Quantos homens e quantas mulheres havia no início da festa de Antônia?

A resolução do problema 19 feita pela aluna A20, ocorreu por meio de uma representação visual, isto é, ela desenhou um homem e uma mulher, associou a imagem do homem à letra x, de forma que essa letra representava a quantidade de homens. Esse processo pode ser caracterizado por uma forma que faz uso da terceira vertente do pensamento algébrico.

O que descrevemos pode ser observado pela Figura 54:

Figura 54 - Resolução feita pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e o participante A20 da pesquisa.

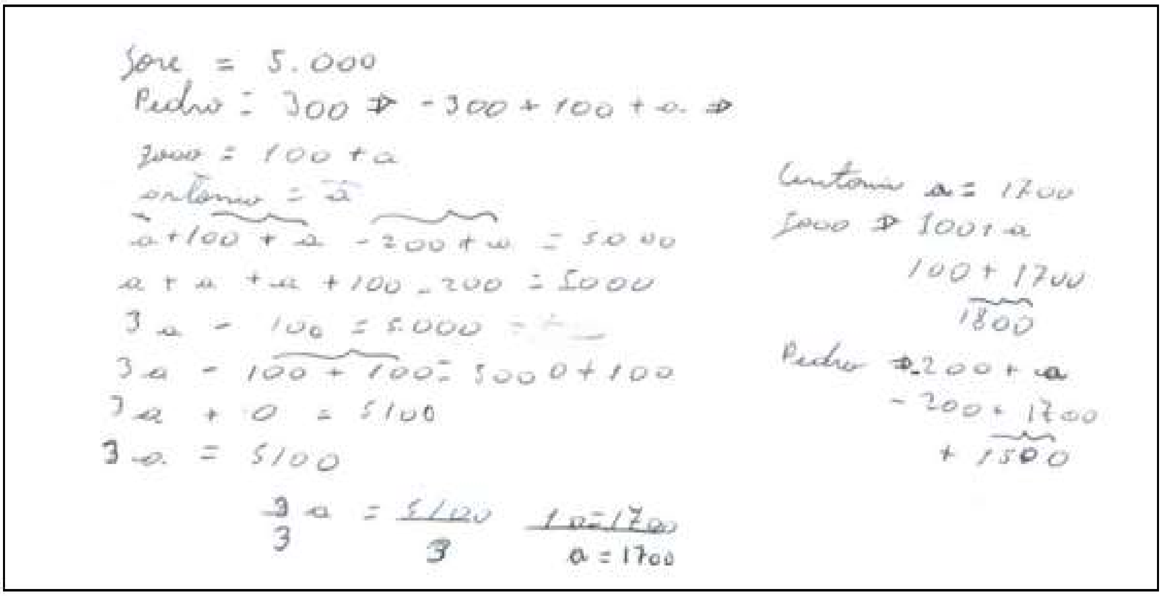
P: Por que você utilizou a letra x para encontrar o resultado?
A20: Professora, depois que foi introduzido o conceito de equação, ficou mais fácil resolver esses tipos de problemas. Por isso, que comecei a resolução com a letra x, formando a equação 2x = 24 – x, depois a resolvi e encontrei x = 8. Depois foi só subtrair 8 de 20, que era a quantidade de pessoas no início da festa, para obter 12, total de mulheres.

De acordo com Radford (2009), o aluno A20 apresentou o pensamento factual, ao desenhar a figura dos homens e mulheres, o contextual e o padrão ao utilizar fórmulas em uma linguagem algébrica, ou seja, representadas por letras.

Problema 20) José ganhou um prêmio no valor de R$ 5.000,00 e dividiu-o entre seus três filhos, da seguinte forma: Pedro recebeu R$ 300,00 a menos que João que, por sua vez, recebeu R$ 100,00 a mais que Antônio. Qual foi a quantia dividida por José para cada filho?

A resolução do Problema 20 feito pelo aluno A9 conforme a Figura 55:

Figura 55 - Resolução do problema 20 feita pelo aluno A9



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e o participante A9 da pesquisa.

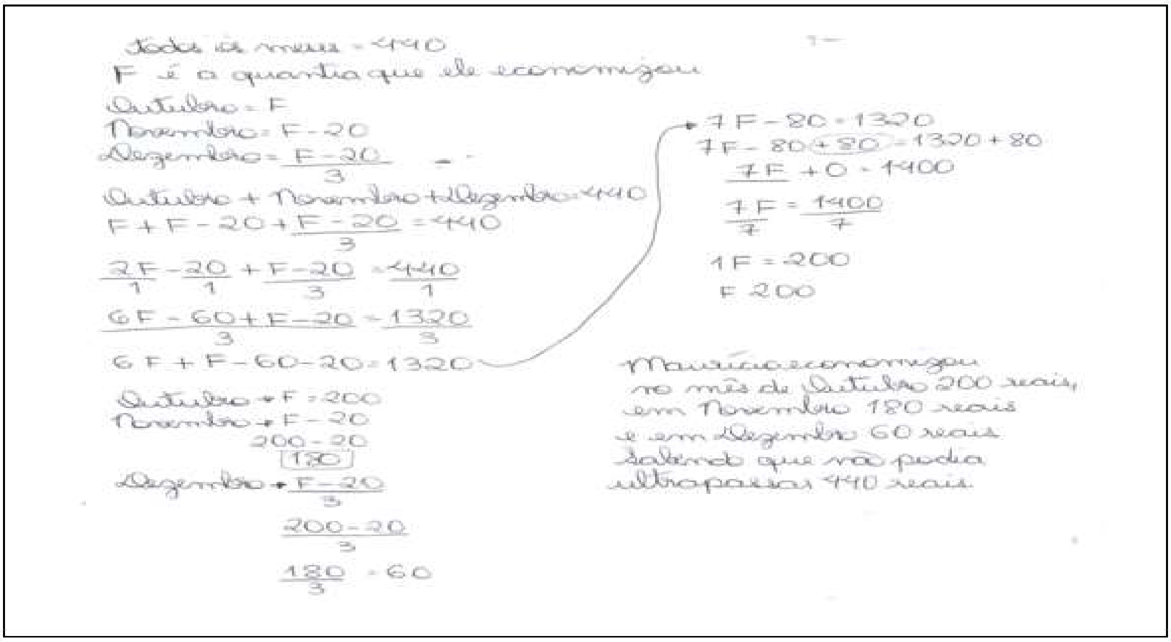
P: Me explica como você fez para resolver essa equação a + 100 + a – 200 + a = 5000.
A9: Somei todas as letras e depois os valores numéricos, ficando assim: 3a -100 = 5000. Depois acrescentei 100 no lado esquerdo e direito da equação e fiz uns cálculos para chegar a 3a = 5100. Depois bastou dividir por 3 o primeiro e segundo membro, encontrando assim a = 1700 que é o valor que Antônio deverá receber. Para determinar o valor de João bastou somar 100 + 1700 que deu 1800 e, o valor de Pedro que deu 1500, foi obtido calculando – 200 + 1700.
P: A soma dos valores de João, Antônio e Pedro pode passar de 5000?
A9: Não, porque o valor estipulado foi 5000.

O aluno A9 desenvolveu um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico, isso pode ser visto pelo modo como resolveu o problema utilizando a letra a, para representar um valor desconhecido, construir uma expressão envolvendo esse termo e, além disso, conseguir manipular adequadamente tal termo. Esse tipo de procedimento requer um pensamento de modelação, conforme Kaput (2008), o qual evidencia uma maneira de expressar formalmente generalizações. Isso configurou com uma construção de conhecimento sobre equações do primeiro grau.

Problema 21) Mauricio economizou certa quantia, em dinheiro no mês de outubro. Em novembro, ele economizou R$ 20,00 a menos que em outubro. Em dezembro, conseguiu economizar um terço do que havia economizado em novembro. Juntando a quantia que economizou nesses três meses, obteve um montante de R$ 440,00. Quantos Mauricio conseguiu economizar em cada mês?

A resolução do Problema 21 feita pela aluna A3, conforme a Figura 56:

Figura 56 - Resolução feita pela aluna A3



Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre a Professora-Pesquisadora e o participante A3 da pesquisa.

P: Me explica como você fez para resolver esse problema e por que utilizou a letra F.
A3: Utilizei a letra F aleatoriamente. Comecei a resolução tirando os dados do problema para depois montar minha equação com a letra de minha escolha. Escrevi F +F – 20 F/3– 20/3 = 440. Depois resolvi e encontrei F = 200.

A aluna A3 desenvolveu um raciocínio dentro da terceira vertente do pensamento algébrico, pela maneira como desenvolveu cada etapa para encontrar o valor economizado em cada mês. Isso demonstra um pensando algébrico, ou seja, que sua resolução não foi mecânica, o seu passo a passo evidenciou uma produção de significado que se caracteriza com construção da aprendizagem pelo próprio aluno.

De acordo com Lins (1992) Radford (2009) e Kaput (2008), o pensamento da aluna A3 envolve um pensar com analiticidade, caracterizado a representação de valores de desconhecidos por letras e o pensamento padrão expressado por meio de uma linguagem algébrica, e a modelação, pela relação e manipulação de valores desconhecidos.

Encontro 26° até 30°

Nesses quatro encontros (2, 8 e 9 de outubro), foram aplicadas atividades de fixação para os alunos que podem ser vistas no Anexo 6. Todas essas atividades foram feitas em grupos, pois acreditamos que as atividades assim possibilitam uma troca de experiência entre os estudantes e, promove uma interação entre eles para a construção de uma aprendizagem compartilhada.

Observamos nesta análise que no início da aplicação desse Plano de Ensino, nem todos alunos apresentaram um pensamento algébrico. Em alguns alunos, foi evidenciado um raciocínio dentro da primeira vertente. Em um grupo pequeno, observamos dentro da segunda vertente, e, em nenhum aluno, como já esperávamos, foi evidenciada a terceira vertente do pensamento algébrico.

No desenvolvimento, desta pesquisa, as atividades, cuidadosamente planejadas, e a forma com a qual a Professora-Pesquisadora conduziu o processo, ou seja, dando um tempo adequado e voz aos alunos, evitando dizer explicitamente o que eles deveriam fazer para resolver o problema: fazendo perguntas adequadas, que os levassem a refletir e tirar suas próprias conclusões, conseguiu fazer com que os estudantes fossem desenvolvendo um pensamento algébrico e, gradativamente, fossem incorporando novos raciocínios até conseguirem permear todas as vertentes do pensamento algébrico. Isso se configurou como uma produção de conhecimento sobre equações de primeiro grau.

Diante do exposto, salientamos que, no final das atividades, todos já eram capazes de pensar algebricamente. Ressaltando também que, os problemas propostos no Plano de Ensino, foram construídos de acordo com a realidade (cotidiano) desses alunos e, com isso, eles foram instigados pelos desafios inerentes no problema, e isso culminou no desenvolvimento dos raciocínios algébricos.

A capacidade que o aluno adquiriu de pensar algebricamente facilitou a aprendizagem de equações do primeiro grau, diminuiu o medo de se trabalhar letras pois o uso das letras não foi imposto pela professora foi concebido por uma necessidade. Isso pôde ser evidenciado pelo fato de que cada um escolhia a letra que quisesse para representar a incógnita de uma equação ou relação.

Como se observa durante, toda a descrição que acabamos de apresentar do que ocorreu em sala de aula, sob nossa análise, o pensamento algébrico se evidenciou claramente perpassando as três vertentes. Vale enfatizar que, inicialmente, o que é mais natural, o pensamento se evidenciava muito dentro da primeira vertente e algumas vezes transcendia para a segunda vertente e, com o decorrer do tempo e com problemas e a nova postura da Professora-Pesquisadora, a terceira vertente também começou a se evidenciar, culminando para a própria construção do conceito de equação de primeiro grau por parte do aluno.

Contudo, gostaríamos de enfatizar que a terceira vertente não se evidenciou pelo aumento da capacidade do aluno, mas pela exigência estabelecida tanto pelo problema quanto pela atitude da Professora Pesquisadora. Com efeito, não se trabalha o desenvolvimento do pensamento algébrico esperando que um estudante comece na primeira vertente, passe para a segunda e chegue à terceira, como se fosse um processo classificatório, pois, na verdade, o pensamento algébrico é uma forma de pensar, e, por esse motivo, não pode ser controlado e nem pode ser considerado estático, trata-se de um processo dinâmico que transita as três vertentes, indo e vindo, sem nenhum controle interno ou externo.

Assim, a escolha dos alunos, apresentados e analisados neste trabalho, foi, de certa forma aleatória, isto é, não se procurou investigar o desenvolvimento de um aluno ou um grupo de alunos, mas a capacidade que a resolução de problemas, dentro da metodologia estabelecida, com as devidas intervenções de um professor, tem para fazer emergir cada uma das três vertentes do pensamento algébrico, e como é possível utilizar esse tipo de pensamento para levar o aluno conceber conceitos relacionados à álgebra, mais particularmente às equações de primeiro grau.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho, em princípio, pareceu-nos muito ousado, pois não buscava investigar um método de ensino ou de aprendizagem, ou as ações de alunos, ou de professores durante um trabalho em sala de aula; tampouco conteúdos ou conceitos relacionados à matemática; ou qualquer outro objeto estático, ou de cunho pedagógico; mas, buscava entender o processo de pensamentos de estudantes, de uma turma de sétimo ano do ensino fundamental, durante a resolução de problemas matemáticos, e como o professor poderia influenciar nesse processo de uma maneira capaz de levar esses estudantes a generalizarem ideias matemáticas, a partir de um conjunto de casos particulares, expressá-las por meio de discursos e escrevê-las em uma linguagem matemática formal.

Durante todo nosso processo de investigação, fundamentada em uma intervenção pedagógica, houve “altos e baixos”, ou seja, momentos em que tudo transcorreu de maneira esperada, produzindo resultados satisfatórios, e momentos em que houve alguns percalços que inviabilizaram ou demandaram mudanças no que havíamos programado. Àqueles que desejam utilizar metodologias pedagógicas diferentes das habituais, como no nosso caso, precisam fazer uma preparação prévia dos estudantes para que não ocorra rejeição, por parte dos alunos, durante as atividades e, também, preparar-se para conduzir com eficiência a aplicação dessas atividades. Apesar de levantarmos essa questão, das dificuldades que alguns alunos têm para aceitar mudanças no processo de ensino, que sempre foi pautado por uma modelo tradicional de longa data, a maior dificuldade que enfrentamos residiu em nós mesmos enquanto pesquisadores. Dificuldade para perceber, entender e interpretar evidências que surgiam durante a nossa pesquisa.

Apesar de não termos dúvidas que as evidências, por nós levantadas, foram suficientes para responder a nossa questão da pesquisa e, consequentemente, atingir nosso objetivo, muitas delas podem nos ter escapados e muitas não conseguimos interpretar. Diante disso, alertamos para essa grande dificuldade que o pesquisador, em geral, tem para conseguir perceber todas as evidências e interpretá-las corretamente. Por esse motivo, enfatizamos que, nesta pesquisa, fizemos uso apenas daquelas que se mostraram claras e puderam ser usadas, de forma eficiente, para responder a nossa questão de pesquisa: **Como a resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes do 7° ano do ensino fundamental e suas implicações na aprendizagem dos conceitos relacionados às equações de primeiro grau?**”.

Antes de colocarmos nosso posicionamento e nossa justificativa, apontando e mostrando como a nossa pergunta de pesquisa foi respondida, chamamos a atenção para o que entendemos como “desenvolvimento do pensamento algébrico”. Diferentemente do que algumas pessoas possam pensar, o pensamento algébrico não é algo adquirido por um indivíduo durante um processo executado por um longo período, e depois que esse pensamento é adquirido, por esse indivíduo, ele passa a fazer parte dele e pode ser usado sempre que ele quiser. Na verdade, o entendimento sobre desenvolvimento do pensamento algébrico, nesta pesquisa, refere-se a algo dinâmico, em que algumas ações do aluno, mediadas pelo professor, desenvolve (faz emergir), nesse estudante, naquele instante, um pensamento de generalização, durante a observação de uma ou mais particularidades. Essa generalização pode desencadear um discurso oral, escrito, ou formulado por meio de imagens ou gesto e, até mesmo, culminar para uma formalização em uma linguagem matemática.

Diante do que foi exposto no parágrafo anterior, podemos apontar para os materiais produzidos pelos alunos; os diálogos que obtivemos por meio de gravações, em áudio, das aulas; e, comentários e gestos evidenciados e anotados no diário de campo da Professora-Pesquisadora. Esses materiais nos trouxeram dados suficientes para mostrar que emergiu de forma clara, na maior parte dos estudantes investigados, as três vertentes do pensamento algébrico, como foi mostrado em detalhes durante a descrição e análise dos dados, no Capítulo 5. Nessas descrições, ficou evidentes que, para que o pensamento algébrico possa emergir, há necessidade de bons problemas, é importante que o professor coloque o aluno como principal protagonista nesse processo. Ademais, foram evidenciadas maneiras de o professor agir como mediador de forma a colocar o aluno como coconstrutor do seu próprio conhecimento o que é base da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Foi possível perceber também a transição natural da terceira vertente do pensamento algébrico, como manipulação do desconhecido como se fosse conhecido, para concepção dos conceitos necessários, ao aluno, para entender e aprender a resolver equações de primeiro grau.

Nessa perspectiva, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas se pôs de forma adequada como um agente motivador; um campo de possibilidades para ser explorado pelo professor, durante a condução de um plano de ensino voltado para uma aprendizagem significativa; uma área de investigação da prática do professor e do desenvolvimento cognitivo e conceitual do seu aluno; um método de avaliação formativa, com possibilidades de se fazer intervenções imediatamente a detecção de eventuais problema na aprendizagem; e, o que foi o foco principal desta pesquisa, contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico por meio de um movimento que permeie as três vertentes desse tipo de pensamento e, consequentemente, promover a aprendizagem de equação do primeiro grau, diminuindo as dificuldades que o aluno tem para aprender conceitos relacionados à Álgebra.

Por fim, colocamos os holofotes sobre nosso Produto Educacional. Nossa pesquisa, além desta dissertação, que acreditamos trazer contribuições significativas para área de Educação Matemática; materializou-se em uma Sequência Didática voltada para o ensino e aprendizagem de Equações de Primeiro Grau, fundamentada no desenvolvimento do Pensamento Algébrico do Estudante, através da resolução de problemas. Para a construção desse material didático que se encontra no Apêndice B, elaboramos um plano de ensino, Apêndice A, colocamos em prática esse plano, como foi mostrado em detalhes no Capítulo 5, evidenciamos pontos positivos, dificuldades e desafios, por meio de um processo de análise fundamentado em outras pesquisas nessa área. Esse produto Educacional poderá ser usado por qualquer professor que tenha interesse em ensinar Equações de Primeiro Grau, ou entender como se constitui e se desenvolve um pensamento algébrico, ou como se utiliza uma metodologia através de problemas. Além disso, poderá ser usado também por outros pesquisadores interessados em fazer investigações nessa linha, principalmente pesquisas voltadas para o ensino e aprendizagem de matemática com um foco direcionado para a sala de aula.

O que vem depois...

O trabalho por nós desempenhado não deve findar ao término desta dissertação. Quando eu retornar às atividades como professora da Escola Municipal Antônio Gomes de Lima, após a conclusão do mestrado, continuarei essa pesquisa com vistas a alguns pontos importantes que não puderam ser considerados neste trabalho. Como eu estava afastada de minhas atividades como docente, para as atividades do mestrado, não pude acompanhar os estudantes investigados pelo restante do ano, como professora da disciplina de Matemática deles. A continuação desta pesquisa deverá ganhar um novo aspecto no momento em que eu retomar aos meus compromissos na escola mencionada. Pretendo, além de trabalhar o conteúdo de equações do primeiro grau, na perspectiva apresentada neste trabalho, trabalhar também outros conteúdos de maneira similar à apresentada neste texto. Tenho consciência dos desafios que surgirão, mas acredito que, após as experiências vivenciada nesta investigação, eu possa superá-los, pois o conhecimento que adquiri sobre ensino e aprendizagem de matemática, com o apoio das teorias de Resolução de Problemas e do Pensamento Algébrico, me sustentarão nesse transcurso dessa árdua função que tem como principal missão: ensinar.

REFERÊNCIAS

ALGEBRA, H. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAuMgAJ/historia equacao-1-grau>. Acesso em: 26 de nov. 2017.

ALMEIDA, J. R. & Câmara, M. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, 6(10), 34-60, 2017.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico:** proposição de um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática). UFRPE. Recife, 2016.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Ed. Contexto, 2004.

BBC. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=TQc4WE61rhU> Acesso em: 27 de nov. 2017.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** 7ª série/ São Paulo: Moderna, 2015.

BIEMBENGUT, M. S. & HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BNCC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em: 08 de jul. 2019

BRASIL, escola. Disponível em: <http://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias ensino/as-equacoes-atraves-simbolos-na-antiguidade.htm>. Acesso em: 21 de nov. 2017.

BRASIL. Secretaria da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais Para o E D' AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática da teoria à prática. 2ª ed., Coleção Perspectivas em Educação Matemática, Campinas, SP: Papirus, 1997.

BRASIL, Escola. **Estratégias de ensino de equações**. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/as-equacoes-atraves simbolos-na-antiguidade.htm>. Acesso em: 07 de mar. 2019.

COELHO, M. A. V. M. P., **A resolução de problemas:** Da dimensão técnica a uma dimensão problematizadora. 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 2005.

D' AMBROSIO, U. **Educação Matemática da teoria à prática**. 2ª ed., Coleção Perspectivas em Educação Matemática, Campinas, SP: Papirus, 1997.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1991.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática** – 1ª a 5ª séries. São Paulo: Editora Ática. 12° Ed., 2002.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris:** matemática. 2º Ed. São Paulo: Ática, 2015.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP. Ed. Unicamp, 2011.

FERREIRA, N.C. **Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2017.

FERREIRA, N. C; PEREIRA, J. C.; LEMOS, G. C. Heurística de Resolução de Problemas: aspectos do ensino sobre resolução de problemas de matemática. I EMAPEM, Mato Grosso, 2018. Disponível em: < https://www.xiiienem.com.br/submissoes/index.php/emapem/2018/paper/view/177 >. Acesso em 19 de jul. 2019.

FERREIRA, A. **Dicionário escolar da língua portuguesa**. Curitiba: Positivo, 2019

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.L.P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.** São Paulo, 22fl. Faculdade de Educação, Unicamp 2006.

FLORIANA, M. D. Sobre pesquisas do tipo intervenção. **XVI ENDIPE** – UNICAMP, Campinas, p. 002882, 2012.

GIOVANNI, J. R. **A conquista da matemática:** a + nova: atividades 7ª série/ São Paulo: FTD, 2002.

GODINO, J. D.; FONT. V. Razonamiento Algebraico y su Didáctiva para Maestro. **Educação matemática em revista**, Granada-Espanha, 2003. Disponível em:< http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>. Acesso em: 18 out. 2017.

GOLDENBERG, M. A arte de pesquisar. 8a ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2004. 110 p

HERNANDEZ, F. (1998) **Transgressão e Mudança na e Educação:** os projectos de projectos de trabalho. Porto Alegre: Artmed. 1998.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática Imenes & Lellis 7° ano**. São Paulo: Moderna, 2017.

KAPUT, J. **Algebra in the early grades**. LV, New York, 2008.

KAPUT, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades (pp. 133–160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

KAUARK, S. F.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. **Metodologia de Pesquisa**: um guia prático. Itabuna: Via Litterarum, 2010. 88p.

KIERAN, C. Learningand teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), SecondHandbook of Research of Mathematics Teaching and Learning (pp. 707-762). NCTM, 2007.

LINS, R, C. **The learning and teaching of school álgebra. Handbook of research om mathematics teaching and learning**. National Council of Theacher of Mathematics – NCTM, New York, 1992.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 2003.

MASLOW, A. H. **A theory of human motivation**. Rio de Janeiro, 1943.

MASON, J. Expressing generality and roots of álgebra. In: BEDNARZ, N., KIERAN, C. &LEE, L. (Eds.). **Approaches to algebra, perspectives for research and teaching**. London: Bluwer Academic Publishers, 1996.

MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM. **Álgebra ou Geometria:** para onde Pende o Pêndulo? **Pró-posições**, vol. 3, n° 1, Campinas, SP, 1992.

MIORIN, A; MIGUEL, A. e FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké** - n°1, UNICAMP, Campinas, SP, 1993.

MORA, D. **Apredndizage y ensenãnza: Proyectos y estratégias para una educación matemática del futuro.** La Paz, Bolívia: Campo Iris, 2003.

MUNDO,E.Disponívelem:<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/historiadasequacoes.htm>. Acessado em: 28 de nov. 2017.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas, p. 73-98. In: **Boletim de Educação Matemática** (BOLEMA), v. 25, n. 41, dez. 2011. Universidade Estadual Paulista – Campus de Rio Claro. Ed. Comemorativa 25 anos.

ONUCHIC, et al,. **Resolução de Problemas:** Teoria e prática. Jundiaí, Ed. Paco, 2014.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F. C. A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 53-68.

ONUCHIC, et al,. **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Ed. Física, 2017.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**. In: BICUDO, M. A. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. 313p.

PEREIRA et al., Carlos, **Egipto Senet**. Ed. Norprint, Belém - PA, 2008.

PIRES, C. M. **Currículos de Matemática da Organização Linear à ideia de Rede.** Tese de doutorado, FE- USP, São Paulo, 1995. PILLETI, N. **Psicologia Educacional**, Ática, Rio de Janeiro, 2002.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: Araújo, H. L. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203 p.

PONTE, J.P., Branco, N. & Matos. **A Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC, 2009.

Portal Só Matemática. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/biograf/diofanto.php> Acessado em: 20 de nov. 2017.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: **North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME**. Bergen University College. v. 1, 2009.

RIBEIRO, J. R. **Equação e seus multisignificados no ensino de matemática:** Contribuições de um estudo epistemológico. 2007. 141 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC/SP, São Paulo, 2007.

RODRIGUES, V. **Resolução de Problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Rio Claro: UNESP, 1992.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e o Método de Pesquisa. Tradução: Onuchic, L. R.; Boero, M. L. **BOLEMA** - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro: UNESP, n. 27, p. 93–139, 2007.

ROMBERG, T.A. Perspectives on Schorlaship and Research Methods. In: GROUWS, D. A. (ed.). Handbook of Research on Mathematics and Learning, p. 49-64. NCTM. New York: Simon & Schuster, 1992.

RONALDO, A. Enigma. Disponível em: <http://conceitoaronaldo.blogspot.com.br/2008/04/o-enigma-do-tmulo-do-matemtico-diofanto.html>. Acesso em: 27 de nov. 2017.

SALOMON, D. V. **Como fazer uma monografia**. 9. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

SAUTOY,M. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pVBNjEYMONU>. Acesso em: 01 dez. 2017.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989, p.31-42.

SOUZA, J. R. **Vontade de saber matemática**. 2º Ed. São Paulo: FTD, 2015.

TOLEDO, M. **Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da Matemática**. São Paulo: FTD, 1997.

TV, Escola. Gênios do Oriente. Disponível em: <http://docplayer.com.br/3133484-A-historia-da-matematica-episodio-genios-do-oriente.html>. Acesso em: 27 de nov. 2017.

VILA, A.; CALLEJO M. L. **Matemática para aprender a pensar:** o papel das crenças na resolução de problemas**.** Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem.** Rio de Janeiro: Martins Fontes, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A - PLANO DE ENSINO

PLANO DE ENSINO (Parte I)

Este Plano de Ensino faz parte de uma pesquisa em nível de mestrado no qual a pesquisadora propõe um grupo de atividades a serem desenvolvidas em 30 encontros, na disciplina de Matemática, no sétimo ano do Ensino Fundamental II da Escola Municipal Antônio Gomes de Lima, localizada na cidade de Rio Verde Goiás. Cada um desses encontros tem previsão de duração de cinquenta minutos. Durante sua aplicação, será utilizada a resolução de problemas, buscando identificar e desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. A partir disso, procurar levar os estudantes a construir conhecimento sobre os conceitos relacionados aos conteúdos de Equação de Primeiro Grau.

Objetivo Geral: Criar uma proposta metodológica para o ensino de equações do primeiro grau, para o sétimo ano do Ensino Fundamental II, com base no desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.

Os Encontros

Os encontros serão compostos de aulas de cinquenta minutos cada. Nesses encontros, a Professora-Pesquisadora (pesquisadora enquanto professora) assumirá a turma atuando como, professora, enquanto que a professora da turma será apenas expectadora.

1° encontro

Este encontro começará com uma apresentação geral sobre a proposta deste plano de ensino que deverá ser desenvolvido durante o segundo semestre letivo de 2018, bem como o papel de cada um desses integrantes nesse processo.

Em seguida, serão apresentados aos alunos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para ser discutido com eles e assinado pelo seu responsável, após as devidas modificações, caso haja e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) para ser discutidos também com os alunos e assinado apenas por eles para que possam participar da pesquisa. Logo depois, os alunos levarão para casa o TCLE, para os responsáveis assinarem.

2° encontro

Os alunos entregarão o TCLE com a assinatura do responsável, dando permissão para participar da pesquisa e logo poderão assinar o TALE.

3° encontro

Nesse encontro, será feita uma entrevista com os alunos(a) (As perguntas dessa entrevista encontram-se em Anexo 3), e um questionário para o professor(a) de Matemática,(O modelo de questionário também em anexo 4).

4° encontro

Para iniciar a pesquisa, será realizada um período de observação, no qual a pesquisadora terá um momento de interação com os alunos e preenchimento de um roteiro de observação.

5° Encontro

Será proposta Atividade 1 (Problemas 1 e 2). Essa atividade deverá ser realizada sem a interferência da Professora-pesquisadora, pois pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não, da primeira vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

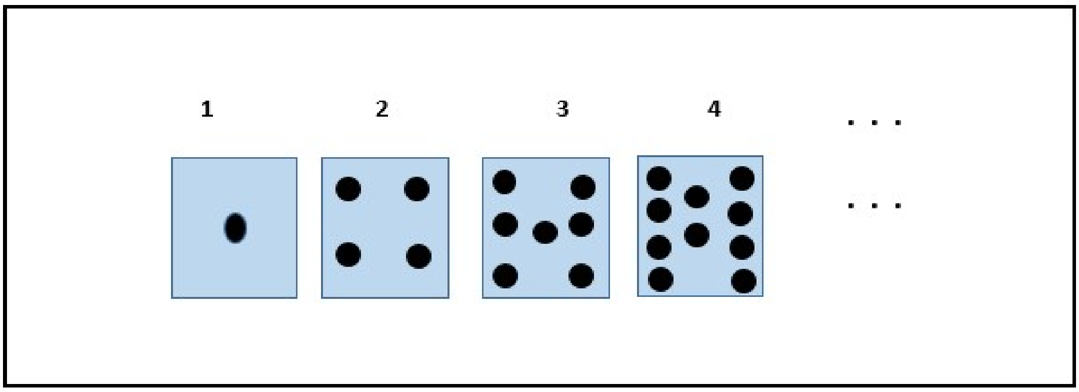
Objetivo especifico:

Identificar a presença, ou não, da primeira vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 1

Problema 1) Observando a Figura 4, responda:

Figura 1 - Sequência de imagens



Fonte:Adaptado de Souza (2015; 2018)

a) Quantas bolinhas terá a imagem 6 dessa sequência?

b) Quantas bolinhas terá a imagem 8 dessa sequência?

c) Existe, nesta sequência, uma imagem com 17 bolinhas? Explique.

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera se que o aluno perceba a relação entre cada imagem e a quantidade de bolinhas contida nesta imagem, como é apresentado na tabela 1, e represente de alguma forma essa relação (figura, imagem, gráfico etc):

a)

Tabela 1 - Relação entre imagem e quantidade de bolinhas

Imagem	Bolinhas
1	1
2	4
3	7
4	10
5	13
6	16

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

b) Espera-se que o aluno construa uma continuação da relação apresentada na Tabela 1, essa continuação pode ser expressa pela tabela 2, a seguir:

Tabela 2 – Continuação da relação entre imagem e quantidade de bolinhas

Imagem	Bolinhas
7	19
8	22

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

c) Não. Observando as respostas dos itens a) e b), vemos que a imagem 6 possui 16 bolinhas e a imagem 7, 19, e o números de bolinhas está sempre aumentando. Uma outra forma é, observar que o número de bolinhas, em cada imagem, é um múltiplo mais uma unidade, como é mostrado pela tabela 3

Tabela 3 - Quantidade de bolinhas como múltiplos de 3, mais 1

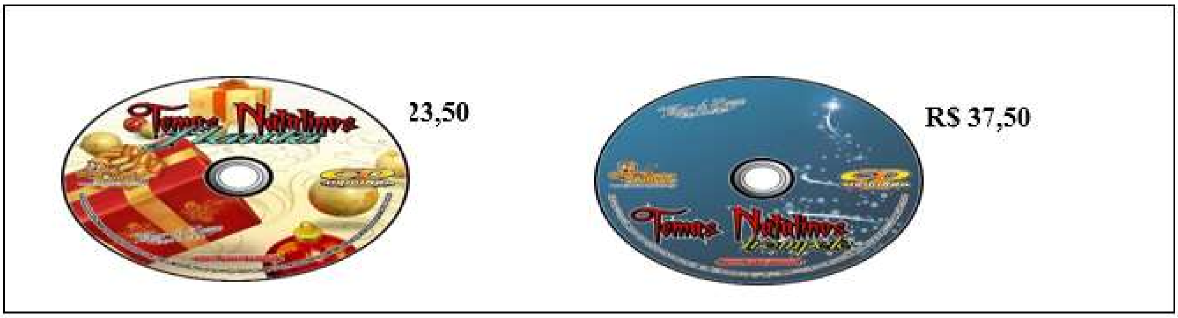
Imagem	Múltiplos de 3 + 1	Total de Bolinhas
1	$0\times3 + 1$	1
2	$1\times3 + 1$	4
3	$2\times3 + 1$	7
4	$3\times3 + 1$	10
5	$4\times3 + 1$	13
6	$5\times3+1$	16
7	$6\times3+1$	19

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

Observe-se que 17 não é um múltiplo de 3, mais 1.

Problema 2) Larissa tem R$ 20,00 a mais que Carlos e juntos eles tem exatamente a quantia dois necessária para comprar dois DVDs, ilustrados pela Figura 2:

Figura 2 - DVDs



Fonte: Elaborado pela Autora

Quantos reais tem cada um deles (Carlos e Larissa)?

Possível forma esperada da resolução do problema

Usando a linguagem numérica, os alunos deverão ser incentivados ao uso de uma representação análoga, ou seja, por tentativa, que segue:

O valor total dos dois (Larissa, e Carlos) é igual à soma dos valares dos DVDs ou seja:

Figura 3 - Quantidade de DVDs

Fonte: Elaborado pela Autora

6° encontro:

Nesse encontro será trabalhado a atividade 2 (problema 3) que deverá ser realizada, sem a interferência da Professora Pesquisadora, pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não, da primeira (ou segunda, ou terceira) vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

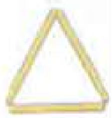
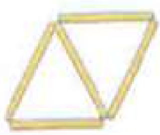
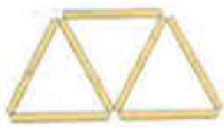
Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não, da primeira vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 2

Problema 3) Uma sequência de figuras geométricas foi construída utilizando palitos, como é mostrado na figura 4 a seguir:

Figura 4 - Sequência de figuras geométricas construídas com palitos

Número da figura geométrica	1	2	3	4	...
Figuras geométricas formada por palitos					...
Quantidade de Palitos	1	3	5	7	...

Fonte: Adaptado Souza (2015; 2018)

a) Quantos palitos deverão formar a figura geométrica 7?

b) Quantos palitos formarão a figura a geométrica 12?

c) Qual é o perímetro da figura geométrica 10?

d) Qual figura é formada pela figura geométrica 12, e qual o perímetro 12?

Possível forma esperada da resolução do problema

Usando a linguagem numérica, os alunos deverão usar de uma representação análoga: de generalizações:

a)

Tabela 4 - Sequências de palitos

Figura	Palitos
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

b)

Tabela 5 - Continuação da Sequências de palitos

Figura	Palitos
8	15
9	17
10	19
11	21
12	23

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

c) Perímetro 10 formado por 9 triângulos.

d) Observa que a sequência de palitos está andando de 2 em 2. A partir da 3° figura, têm-se apenas 2 tipos de figuras formados com os palitos, sendo trapézios e losangos. Os trapézios são formados para figuras de número pares e losango para números de figuras ímpares. Então a figura de número 12 é um trapézio. O perímetro é 13 formado por 11 triângulos.

7° encontro:

A atividade 3 (problemas 4 e 5) deverá ser realizada sem a interferência da professora pesquisadora, pois pretende-se, identificar a existência ou não, da primeira, segunda e terceira vertentes de pensamento algébrico de cada estudante.

Objetivo especifico:

Identificar a presença, ou não, da primeira vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 3

Problema 4) Considere uma máquina capaz de modificar qualquer valor numérico introduzido em sua entrada, de acordo com o que é mostrado na Figura 5, observando o funcionamento desta máquina, responda:

Figura 5 - Máquina

Fonte: Adaptado Dante (2015; 2018)

a) Se Márcio coloca-se R$ 20,00 na entrada desta máquina, quanto sairia?

b) Robson colocou na máquina número -10, que número saiu?

c) Que quantia Carla deverá pôr na máquina para sair R$ 50,00?

d) Anderson colocou o número 3,2, quanto ele deveria colocar a mais para sair o número 17?

Possível forma esperada da resolução do problema

Usando a linguagem numérica, os alunos deverão usar representação análoga como o pensamento aritmético e algébrico.

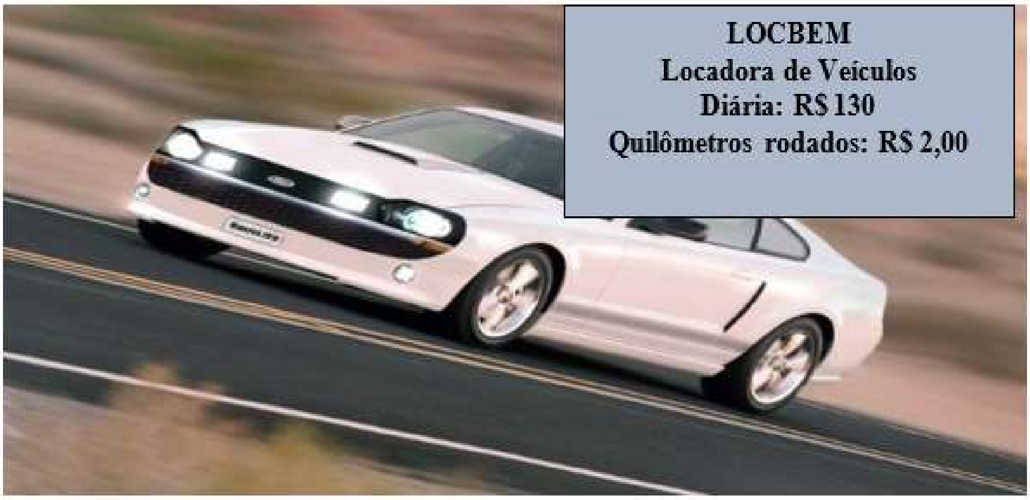
Tabela 6 - Máquina de Marcelo

Nomes	Valor R$	Total	Pode-ser
a) Márcio	20 ×3 + 5	30 + 5 = 65	20 + 20 + 20+5 = 65
b) Robson	-10×3 + 5	-30 + 5 = -25	-10 -10 -10+5 = -25
c) Carla	50 × 5	50 - 5 = 45	45/3 = 15
d) Anderson	(3,2+0,8) ×3 + 5	12 + 5 = 17	3,2 + 3,2 + 3,2+0,8+5 = 11,4

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

Problema 5) Sandra alugou um carro popular na locadora LOCBEM. O preço de locação estava indicado, na porta da locadora, pelo cartaz apresentado na Figura 6 a seguir:

Figura 6 - Cartaz com preço de locação



Fonte: Adaptado Souza (2015; 2018)

Sabendo que Sandra alugou o carro por um dia e pagou pela locação R$ 270,00, determine quantos quilômetros ela percorreu.

Possível forma esperada da resolução do problema

Usando a linguagem numérica, os alunos deverão usar a representação análoga, ou seja, pela operação de adição e subtração, se segue:

Figura 7 - Resolução com preço de locação

$$270 - 130 = 140$$
$$2 \times (70) \ = 140 \text{ ou}$$
$$140/2 = 70 \text{ km}$$

Fonte: Elaborado pela Autora

8° encontro:

Nesse encontro será trabalhada a atividade 4 (problemas 6 e 7). Deverá ser realizada sem a interferência da professora pesquisadora, pois pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não da primeira vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não, da primeira vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como esse se apresenta.

Atividade 4

Problema 6) Pedrinho tem nove cédulas, que, somadas, dão R$ 93,00. Estas cédulas são de R$ 1,00, R$ 5,00,R$ 10,00 e R$ 50,00. Quantas cédulas notas de cada valor Pedrinho poderia ter?

Possível forma esperada da resolução do problema

Uma maneira de resolver o problema é separar a nota de maior valor.

Tabela 7 - Números de notas

Quantidade de notas	Notas	Valor das notas em R$	Total de notas
1	50,00	1×50	50,00
3	10,00	3×10	30,00
2	5,00	2×5	10,00
3	1,00	3×1	3,00
Total			**93.00**

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

Problema 7)"Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan, e Carlos tem o triplo de figurinhas de Alan. Quantas figurinhas tem cada um?"[11]

Possível forma esperada da resolução do problema

Usando a linguagem numérica, os alunos tentarão utilizar o princípio multiplicativo para a representação análoga, ou seja, como segue:

Tabela 8 - Figurinhas

Nomes	Quant. Figurinhas	Total figurinhas
Alan	1× 20	20
Bruno	2× 20	40
Carlos	3 ×20	60
Total		**120**

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

[11]Adaptado de Santos (2010, p. 6)

De acordo com a distribuição, conclui-se que, Alan tem 20 figurinhas, Bruno, 40, e Carlos, 60.

9° encontro: Segunda parte do plano de ensino (Parte II)

A atividade 5 (problemas 8) deverá ser realizada sem a interferência da professora pesquisadora pois pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não, da primeira, segunda e terceira vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não da segunda vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 5

Problema 8) Carla está prestando serviço como técnica de informática em uma empresa durante algumas horas por dia. Ela ganha 20 reais por hora trabalhada. Quanto ela receberá se prestar serviço por 3 horas no total? E se no total ela trabalhar 5 horas? E se forem 7 e 10? E se fossem 40 e 60?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera se que o aluno perceba a relação entre as horas trabalhadas de Carla e o valor de cada hora, como é apresentado na tabela 9, e represente de alguma forma essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, etc).

Tabela 9 - Horas trabalhadas

Horas	Valor das horas
3	$3\times 20 = 60$
5	$5\times 20 = 100$
7	$7\times 20 = 140$
10	$10\times 20 = 200$
40	$40\times 20 = 800$
60	$60\times 20 = 1200$

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

10° encontro

A atividade 6 (problema 9) deverá ser realizada sem a interferência da professora pesquisadora pois pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não da primeira, segunda e terceira vertente de pensamento algébrico de cada estudante

Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não da segunda vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Problema 9) Assaí Atacadão (Redes de atacados no Brasil) comercializa grandes variedades de produtos, abrangendo alimentos frescos, como verduras, frutas e peixes. Além desses, produtos são comercializados como arroz, mercearia, alimentos, perecíveis, embalagens, bazar, higiene, bebidas e limpeza. No dia 20 de Agosto de 2018, o saco de 5 quilos de arroz da marca Gol estava de R$ 9,99. Quanto custariam 2 sacos de arroz? E quanto custariam 3 sacos de arroz? E se fossem 4 sacos de arroz? E se fossem 5 sacos de arroz? E se fossem 999 sacos de arroz?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera-se que o aluno perceba a relação entre a quantidade de sacos de arroz e o valor fixo estipulado de cada saco, como é apresentado na tabela 10, e represente de alguma forma essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, etc.):

Tabela 10 - Valor da quantidade de arroz

Horas	Valor das horas
2	$2\times 9{,}99 = 19{,}98$
3	$3\times 9{,}99 = 29{,}97$
4	$4\times 9{,}99 = 39{,}96$
5	$5\times 9{,}99 = 49{,}95$
999	$999\times 9{,}99 = 9980{,}01$

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

11° encontro

A atividade 7 (problemas 10 e 11) deverá ser realizada sem a interferência da professora pesquisadora, pois pretende-se, com essa atividade, verificar a existência ou não da primeira, segunda e terceira vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não da segunda vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 7

Problema 10) Uma fábrica de roupas produz 15 peças de calças por hora. A quantidade de calça é registrada pelos jovens aprendizes (são jovens menores de idade que são contratados temporariamente pelas empresas). Responda, na tabela, abaixo, qual o valor correspondente a cada quantidade de calças que são fabricadas por hora?

Tabela 11 - Produção de calças

Tempo (horas)	Números de calças
2	
4	
6	
8	
10	
1000	

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera-se que o aluno perceba a relação entre o tempo de fabricação das calças e suas quantidades, como é apresentado na tabela 12, e represente de alguma forma, essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, etc.):

Tabela 12 - Calças fabricadas por hora

Horas	Quantidade de calças
2	$2\times 15 = 30$
4	$4\times 15 = 60$
6	$6\times 15 = 90$
8	$8\times 15 = 120$
10	$10\times 15 = 150$
1000	$1000\times 15 = 15000$

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

Problema 11) Renato comprou uma impressora jato de tinta para imprimir panfletos de propaganda. A impressora imprime 18 panfletos a cada 2 minutos. Preencha a segunda coluna da tabela, a seguir, com o número de panfletos que esse equipamento imprime:

Tabela 13 - Impressão de panfletos

Intervalo de tempo(minuto)	Números de panfletos impressos
2	
4	
6	
8	
10	
10000	

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera-se que o aluno perceba a relação entre o intervalo de tempo em minutos de impressão e a quantidade de panfletos impresso, como é apresentado na tabela 14, e represente de alguma forma, essa relação de generalização. (figura, imagem, gráfico, tabela, etc):

Tabela 14 - Calças fabricadas por hora

Intervalo de tempo(minuto)	Números de panfletos impressos
2	18
4	$2\times 18 = 36$
6	$4\times 18 = 108$
8	$6\times 18 = 144$
10	$8\times 18= 180$
1000	$1000\times 18= 18000$

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

12° encontro

A atividade 8 (problemas 12) deverá ser realizada sem a interferência da professora pesquisadora, para identificar a existência ou não da primeira, segunda e terceira vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não da segunda vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 8

Problema 12) Patrícia gosta de ir ao cinema com seus colegas no Buriti Shopping na cidade de Rio Verde-Go. Patrícia sempre convida seus amigos na quarta (Matinê) para acompanhá-la à sessão de cinema e paga entrada para cada um deles. O valor cobrado pelo cinema pode ser visto na Figura abaixo 10:

Figura 8 - Cinema

Valores de segunda a Domingo

	Inteira	Meia
Seg e Ter (Matinê*)	R$ 18,00	R$ 9,00
Seg e Ter (Noite)	R$ 20,00	R$ 10,00
Quarta (Matinê*)	R$ 16,00	R$ 8,00
Quarta (Noite)	R$ 18,00	R$ 9,00
Qui,Sex, Sáb, Dom(Integ)	R$ 22,00	R$ 11,00

Fonte: Elaborado pela Autora

a) Se Patrícia levar 1 amigo, que paga meia entrada, quanto ela pagará pelo ingresso?

b) a) Se Patrícia levar 2 amigos, que pagam meia entrada, quanto ela pagará pelos ingressos?

c) Se Patrícia levar 3 amigos, que não têm direito, à meia entrada, quanto ela pagará pelos ingressos?

d) Se Patrícia levar 4 amigos, que pagam meia entrada, quanto ela pagará pelos ingressos?

e) Se Patrícia levar 50 amigos, todos pagando meia entrada, quanto ela pagará pelos ingressos?

f) Se Patrícia leva 50 amigos, todos pagando inteira, quanto ela pagará pelos ingressos?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera-se que o aluno perceba a relação entre o valor fixo do cinema e a quantidade de amigos que Patrícia levará lá, como é apresentado na tabela 15, e represente de alguma forma essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, etc):

Tabela 15 - Quantidade de amigos ao cinema

Horas	Quantidade de calças

a)1	16× 1 = 16
b)2	8× 2= 16
c)3	16× 3 =48
d)4	8× 4= 32
e)50	8× 50= 400
f)50	16× 50= 800

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

13° encontro

A atividade 9 (problemas 13) deverá ser realizada sem a interferência da professora pesquisadora, pois pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não da primeira, segunda e terceira vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não da segunda vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 9

Problema 13) Observe a sequência das imagens feita por Sônia na Figura 9. Se Sônia continuasse desenhando estrelas, de acordo com o padrão apresentado pela Figura 9:

Figura 9 - Sequências de estrelas amarelas

Fonte: Elaborado pela Autora

a) Quantas estrelas teria no 5° termo?

b) Quantas estrelas teria no 6° termo que Sônia determinará?

c) Qual o 100° termo que Sonia determinará? Como você encontrou a resposta? Explique sua resposta?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera se que o aluno perceba a relação entre a quantidade de estrelas e a sequência de 2 em 2 como é apresentado na tabela 16, e represente de alguma forma, essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, etc.):

Tabela 16 - Resolução das Sequências de estrelas

Horas	Quantidade de calças
a)5	2× 5 = 10
b)6	2× 6= 12
c)100	2× 100 =200

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

14° encontro

A atividade (problemas 14) deverá ser realizada sem a interferência da professora pesquisadora, pois pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não da primeira, segunda e terceiro vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

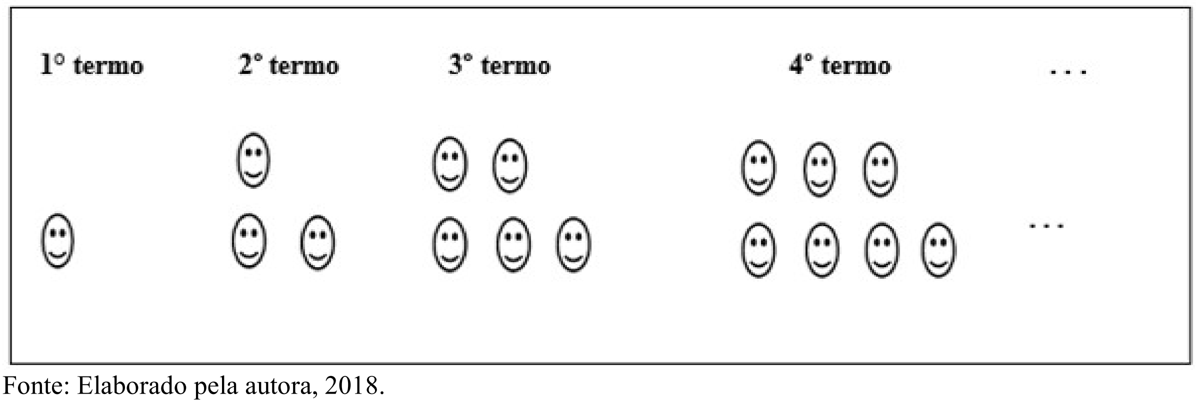
Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não da segunda vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 10

Problema 14) Observe a sequência das imagens feita por Katia, na Figura 10:

Figura 10 - Sequências de rostinhos



Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

a) Quantas figurinhas deverá ter o 5° termo da sequência desenhada por Katia?

b) Quantas figurinhas deverá ter o 6° termo da sequência desenhada por Katia?

c) Qual o 1000° termo que Katia determinará? Como você encontrou a resposta? Explique sua resposta?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera-se que o aluno perceba a correspondência entre a quantidade de estrelas e sequência de 2 em 2 como é apresentado na tabela 17, e a represente de alguma forma essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, etc.):

Tabela 17 - Resolução das Sequências de rostinhos

Horas	Quantidade de calças
a)5	2× 5 - 1 = 9
b)6	2× 6 -1 = 11
c)100	2× 1000- 1 =1999

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

15°, 16°, 17° e 18° Encontros

A correção das atividades nos encontros 5° até o 8° deverá ser realizada com a interferência da professora pesquisadora, pois pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não da primeira, segunda e terceira vertente de pensamento algébrico de cada estudante. A professora pesquisadora fará intervenções necessárias para instigar o aluno a pensar algebricamente, tornando-o capaz de representar e identificar um mesmo conteúdo matemático de diferentes maneiras.

Para começar a correção, os alunos serão convidados para registrarem na lousa suas resoluções. Também acontecerá uma plenária na qual os alunos discutirão as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, a professora tentará, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

19° Encontro

Serão definidos o que é equação, incógnita e variável utilizando o problema 2 e 4 do plano de ensino parte I.

20° e 21° Encontros

Será proposto aos alunos refazerem os problemas da segunda parte do plano de ensino usando a definição de equações.

22° e 23° Encontros

Será feita a correção da segunda parte do plano de ensino empregando a definição de equações, e, nessa aula os alunos serão convidados para registrar suas resoluções no quadro. A professora pesquisadora fará as intervenções.

24° e 25° Encontro: Terceira parte do plano de ensino (Parte III)

Nesses encontros, os alunos responderão individualmente os problemas propostos e, no final da aula, será feita a correção na lousa com os alunos e em conjunto com a professora pesquisadora.

A atividade 11 (problema 15), deverá ser realizada com a interferência da professora pesquisadora pois pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não da primeira, segunda e terceira vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não do terceiro nível de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 11

Problema 15) Luís Carlos é um pai de família que se preocupa com a educação financeira de seus filhos. Pensando em ensiná-los a lidar com a moeda corrente, ele decidiu dar uma mesada a cada um de seus filhos. Para isso elaborou uma regra: Cada filho receberá em moeda corrente, o valor correspondente ao dobro de sua idade. Márcio receberá 8 moedas, Udson, o filho do meio, é 6 anos mais velho que Marcio e Jair é o mais velho dos três. Sabe-se que para pagar a mesada dos filhos Luís desembolsará 58 moedas. Qual a idade dos filhos de Luís? Qual a quantidade de Moeda que Udson e Márcio recebeu de seu pai?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera se que o aluno perceba a relação entre a idade de cada um dos filhos de Luís Carlos e o valor corrente em moeda, como é apresentado na tabela 18, e represente de alguma forma essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, letras etc.):

Tabela 18 - Resolução das idades e moeda corrente

Nomes	Idades equacionar	Moedas
Marcio	4n	4(2) = 8
Udson	10n	10(2) = 20
Jair	15n	15(2) = 30
n = 2	29n	58

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

A atividade 12 (problemas 16 e 17) deverá ser realizada com a interferência da professora pesquisadora, pois pretende-se, com essa atividade, averiguar a existência ou não da primeira, segunda e terceira vertente de pensamento algébrico de cada estudante

Objetivo especifico:

Verificar a presença ou não da terceira vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 12

Problema 16) João é primo de Daniel, sua idade é o triplo da idade de Daniel acrescida de 6 anos. João tem 18 anos. Qual a idade de Daniel?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera se que o aluno perceba a relação entre a idade de cada um dos primos como é apresentado na tabela 19, e represente de alguma forma essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, letras etc.):

Tabela 19 - Resolução da idade de Daniel

Nomes	Idades equacionar	Idade de cada primo
João	18	18
Daniel	3n + 6 =18	4

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

Problema 17) O senhor Hércules tem 45 cavalos que serão doados aos seus netos. O neto do meio terá o dobro que o caçula. O mais velho terá o triplo que o caçula mais 3 cavalos. Quantos cavalos cada neto receberá? (Adaptado de Imenes; Lellis, 1997, p.206-207).

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera se que o aluno perceba a relação entre a quantidade de cavalos que cada neto receberá do Senhor Hércules, como é apresentado na tabela 20, e ilustre, de alguma forma, essa relação de generalização. (figura, imagem, gráfico, tabela, letras etc.):

Tabela 20 - Resolução Cavalos distribuídos aos seus netos

Netos	equacionar	Moedas
Caçula	n	1(7) = 7
Do meio	2n	2(7) = 14
Mais velho	3n + 3	3(7)+ 3 = 24
n = 7	6n+ 3	45

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

25° encontro

A atividade 13 (problemas 18 e 19) deverá ser realizada com a interferência da professora pesquisadora pois pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não da primeira, segunda e terceira vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não da segunda vertente de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 13

Problema 18) Em uma partida de videogame, Jorge conseguiu 160 pontos em três rodadas. Na segunda, ele fez 20 pontos a menos que na primeira, e na terceira rodada ele fez o dobro de pontos da segunda. Quantos pontos Jorge fez em cada rodada?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera se que o aluno perceba a relação entre a quantidade de pontos que Jorge fez em cada rodada na partida de videogame, como é apresentado na tabela 21, e represente de alguma forma essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, letras etc.):

Tabela 21 - Resolução da partida de videogames

Rodada	equacionar	Moedas
Primeira	n	1(55) = 7

Segunda	n - 20	55 - 20= 35
Terceira	2(n – 20)	2(55 – 20) = 70
n	4n - 60	160

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

Problema 19) Antônia resolveu fazer uma festa para seus colegas de sala. No início de sua festa, o total de pessoas era de 20. Depois, o número de homens dobrou e o de mulheres aumentou em 4 mulheres. Depois desse aumento, o número de homens ficou o mesmo que o de mulheres. Quantos homens e quantas mulheres havia no início da festa de Antônia?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera-se que o aluno perceba a relação entre a quantidade de pessoas que foram a festa de Antônia no início, como é apresentado na tabela 22, e represente de alguma forma essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, letras etc.):

Tabela 22 - Resolução de pessoas que foram a festa de Antônia

Período da festa	equacionar	Quantidade
inicio	2n	8 homens
depois	20 – n + 4	12 mulheres
	2n = 20 – n + 4	-
n	3n = 24	n = 8

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

A atividade 14 (problemas 20 e 21) deverá ser realizada com a interferência da professora pesquisadora pois pretende-se, com essa atividade, identificar a existência ou não da primeira, segunda e terceira vertente de pensamento algébrico de cada estudante.

Objetivo especifico:

Identificar a presença ou não do terceiro nível de pensamento algébrico nos estudantes e, em caso de existência, como se apresenta esse pensamento.

Atividade 14

Problema 20) José ganhou um prêmio no valor de R$ 5.000,00 e dividiu-o entre seus três filhos da seguinte forma: Pedro recebeu R$ 300,00 a menos que João que, por sua vez, recebeu R$ 100,00 a mais que Antônio. Qual foi a quantia dividida por José para cada filho?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera se que o aluno perceba a relação entre o valor que José recebeu do prêmio e a partilha entre seus três filhos, como é apresentado na tabela 22, e represente de alguma forma essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, letras etc.):

Tabela 23 - Resolução de partilha do prêmio de José

Filhos de José	equacionar	Quantidade de cada filho (R$)
Pedro	n + 100 - 300	1500
João	n + 100	1800
Antônio	n	1700
Total	n + 100 - 300 +n + 100 + n 3n – 100 = 5000	-

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

Problema 21) Mauricio economizou certa quantia em dinheiro no mês de outubro. Em novembro, ele economizou R$ 20,00 a menos que em outubro. Em dezembro, conseguiu economizar um terço do que havia economizado em novembro. Juntando a quantia economizada nesses três meses obteve um montante de R$ 440,00. Quanto Mauricio conseguiu economizar em cada mês?

Possível forma esperada de resolução do problema

Espera-se que o aluno perceba a relação entre o valor que Mauricio economizou em cada mês, como é apresentado na tabela 24, e represente de alguma forma essa relação de generalização (figura, imagem, gráfico, tabela, letras etc.):

Tabela 24 - Resolução do valor que Mauricio economizou em cada mês

Meses	equacionar	Quantidade em cada mês (R$)
Outubro	n	200
Novembro	n -20	180
Dezembro	n-20/3	60
Total	n + n - 20 +n – 20/3 7n – 80 = 440	-

Fonte: Elaboração da autora, 2018.

26° até 30 Encontros

Nesses encontros serão aplicadas atividades de fixação, usando a definição de equações, criada pela Professora-Pesquisadora a e também com atividades tiradas do livro didático adotado pela escola presentes em anexo 6.

APENDICE B - PRODUTO EDUCACIONAL

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

WAGNA MENDES VIEIRA CAMPOS

NILTON CEZAR FERREIRA

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO PARA CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTOS SOBRE EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

JATAÍ

2019

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Goiás

Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática

WAGNA MENDES VIEIRA CAMPOS
NILTON CEZAR FERREIRA

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO PARA CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTOS SOBRE EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Produto Educacional vinculado à dissertação: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU.

JATAÍ
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

CAM/des

Campos, Wagna Mendes Vieira.

O desenvolvimento do pensamento algébrico para construção de conhecimento sobre equações de primeiro grau através da resolução de problemas: Produto Educacional vinculado à dissertação “O desenvolvimento do pensamento algébrico, através da resolução de problemas, e suas contribuições para aprendizagem de equações do primeiro grau” [manuscrito] / Wagna Mendes Vieira Campos; Nilton Cezar Ferreira. -- 2019.

38 f.; il.

Produto Educacional (Mestrado) – IFG – Câmpus Jataí, Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2019.

Bibliografias.

1. Pensamento algébrico. 2. Resolução de problema. 3. Equações do Primeiro Grau. 4. Sequência didática. I. Ferreira, Nilton Cezar. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título.

CDD 512

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Rosy Cristina Oliveira Barbosa – CRB 1/2380 – Campus Jataí. Cód. F051/19.

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Este material didático foi desenvolvido durante uma pesquisa de Mestrado em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Goiás, Câmpus Jataí. Nele é apresentado uma Sequência Didática, elaborada a partir de atividades em sala de aula, visando contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Trata-se de um Produto Educacional destinado a auxiliar professores e professoras que trabalham com turmas dos anos finais do ensino fundamental.

No decorrer desse texto, são apresentadas propostas de atividades com problemas para serem aplicados em sala de aula com o intuito de, durante a resolução desses problemas, por parte do aluno, auxiliado pelo professor, emergir nesse aluno um pensamento algébrico capaz de desenvolver sua capacidade de trabalhar com objetos algébricos como variáveis, incógnitas e, consequentemente, construir conhecimentos dos conceitos relacionados às equações de primeiro grau.

Para elaboração desse material foram utilizadas atividades que, possivelmente, estejam relacionadas com cotidiano dos alunos, e que tenham alguma ligação com elementos pertencentes aos conteúdos de equações de primeiro grau, tentando sempre tornar o aluno parte ativa do seu processo de aprendizagem. Este material já foi testado em uma turma de sétimo ano do ensino fundamental de uma escola municipal. Para isso, foi elaborado e aplicado um plano de ensino, composto por 22 problemas. Esses problemas foram trabalhados em um período de 30 aulas de cinquenta minutos cada. E, esta Sequência Didática foi construída a partir desse plano de ensino, levando em consideração os melhores resultados obtidos nessa aplicação, após uma análise minuciosa do que ocorreu em sala de aula. Dos 22 problemas trabalhados, foram selecionados 11 para compor este material, aqueles que produziram melhores resultados durante a aplicação do plano de ensino.

Este material inicia-se com uma apresentação teórica sobre Pensamento Algébrico e Resolução de Problemas, buscando inteirar o leitor sobre como identificar e desenvolver esse tipo de pensamento nos estudantes, e, também, como utilizar uma Metodologia através da Resolução de Problemas para auxiliar nesse processo. Após a apresentação dessa parte teórica, é feita uma proposta de como este trabalho pode ser implementado em sala de aula. Essa proposta seguiu o seguinte roteiro: 1) A proposição de um problema, deixando o estudante tentar resolvê-lo durante certo tempo, sem a intervenção do(a) professor (a); 2) A observação do professor(a) sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico; 3) Pedir para que os alunos, que não conseguiram resolver o problema tente novamente, dessa vez com a intervenção do professor(a), por meio de perguntas que levem esses estudantes a pensar algebricamente; 4) Finalmente, o professor reavalia a formar de pensamento dos estudantes e busca relacionar esses pensamentos com elementos relacionados a equações de primeiro grau, se for o caso fazer a formalização do conteúdo a ser introduzido.

Ao término de cada atividade proposta aqui, é apresentado um comentário, evidenciando elementos importantes que ocorreram, durante o teste dessa Sequência Didática, para que o professor(a) possa compará-lo com a sua aplicação. E, no final deste trabalho, são apresentadas algumas considerações para reflexões sobre proposições de novos trabalhos nessa linha, voltados para a sala de aula.

2 PENSAMENTO ALGÉBRICO

O pensamento algébrico é um tipo de pensamento capaz de levar um indivíduo a generalizar ideias a partir de um conjunto de casos particulares, podendo, inclusive, promover condições para que esse indivíduo possa expressar essas ideias generalizadas por meio de discurso, de gestos ou de imagens e, até mesmo, escrevê-la em uma linguagem matemática formal.

O pensamento algébrico apresenta três vertentes, segundo os trabalhos: Lins (1992), Radford (2009) e Kaput (2008). Rômulo Lins chama essas vertentes de aritmeticismo, internalismo e analiticidade; Luis Radford as chamam de pensamento factual, contextual e padrão; e James Kaput, que prefere chamar essas vertentes de aritmética generalizada, funcional e modelação.

Não especificaremos as definições apresentadas por esses três pesquisadores, apenas, para cada uma das vertentes, apresentaremos a definição de um dos pesquisadores, e quem tiver mais interesse pode consultar os trabalhos mencionados. A primeira vertente do pensamento algébrico, na concepção de Lins (1992), é o aritmeticismo que significa “modelar, em números, o que naturalmente implica a utilização das operações aritméticas a fim de produzir as relações que constituem o modelo” (p. 12). Nesse caso, o objeto de trabalho é, principalmente, os números, as operações aritméticas e uma relação de igualdade. Esses objetos são vistos como ferramentas para resolver determinadas situações.

A segunda vertente, de acordo com Radford (2009), é chamada de pensamento contextual, cujo o nível de objetivação é mais profundo do que o da ação e percepção, características do pensamento factual.

A terceira vertente, para Kaput (2008), é a modelação. Esse tipo de pensamento constitui-se de um domínio para expressar e formalizar generalizações. Nessa perspectiva, ele se dá a partir de situações matemáticas ou de fenômenos como a generalização de regularidades em situações do cotidiano, nas quais a regularidade é secundária, relativamente ao objeto mais geral da tarefa.

Segundo os pesquisadores Rômulo Lins, Luis Radford e James Kaput, pensar algebricamente requer mobilizações da capacidade de estabelecer relações, modelar, generalizar, operar com o desconhecido como se fosse conhecido e a capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem.

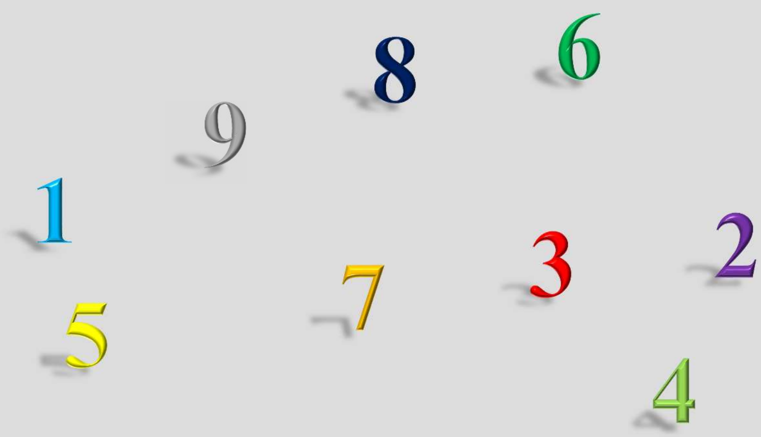
3 EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

O primeiro indício do uso de equações, mais formalizada, segundo Pereira (2008), surgiu aproximadamente em 1650 a.C., no documento denominado Papiro de Rhind, que contém a escrita de problemas de matemática.

Um dos primeiros e mais ilustres matemáticos do século IX foi o estudioso Abu Jafar Mohammed ibn Mûsâ Al-Khowârizmî, um astrônomo do califa de Bagdá. Esse matemático árabe escreveu vários livros, mas o que mais se destacou foi o *Hisab al-jabr wa-al-muqa-balah*. Esse livro tratava da resolução de equações semelhante ao sistema aplicado hoje em dia, a diferença é que não utilizava símbolo algum, era tudo representado por palavras. Nesse, o termo *al-jabr*, era muito usado, significa restauração, ou seja, transferir termos de um lado da igualdade para outro, e o termo *qabalah* significa redução, isto e, cancelar ou reduzir termos semelhantes em uma equação, ou seja equacionar. (BIANCHINI, 2015)

Segundo Dante (2015, p. 124), “[equações] são sentenças matemáticas que têm um sinal de igualdade (=) e que contém pelo menos uma letra que representa um número desconhecido”. E, segundo ele, uma equação do primeiro grau, com uma incógnita *(x),* é toda equação que pode ser escrita na forma $\boldsymbol{ax + b = 0}$, com $\boldsymbol{a}$ diferente de zero, sendo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números Reais.

Para que ocorram mudanças no ensino de Álgebra, nas escolas brasileiras, é preciso que se contemple, além dos aspectos formais, a concepção de um pensamento algébrico, pois não faz sentido utilizar uma nova linguagem sem que lhe seja dado um significado e sem que exista um sentimento da sua necessidade.



4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Resolução de Problemas enquanto atividade humana tem feito parte do cotidiano das pessoas há milênios, mas ligada às questões relacionadas ao ensino de matemática, e suas contribuições são recentes, ocorridas a partir do século XX.

Com efeito apesar da diversidade de possibilidades que a Resolução de Problemas proporciona, um dos temas ainda muito discutidos é como ela se configura em sala de aula. Segundo Schroeder e Leste (1989), existem três formas de se trabalhar Resolução de Problemas em sala de aula: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolver problemas e ensinar através de resolução de problemas. A seguir, apresentam-se as características de cada uma dessas abordagens.

a) Ensinar sobre resolução de problemas: Nessa forma de ensinar, o foco é desenvolver habilidades nos estudantes em resolver problemas. Para isso, Polya (2006) propõe quatro fases que ele afirma serem usadas por especialistas em resolução de problemas, são elas: entender o problema, idealizar um plano, executar o plano e observar o caminho inverso para resolução do problema. Com um trabalho efetivo e constante, acredita-se que o aluno tornar-se-á um bom resolvedor de problemas. Contudo, para alcançar esse objetivo, o professor precisa, adicionalmente, ensinar estratégias que servirão para visualizar ou que serão escolhidas para auxiliar na execução do plano.

b) Ensinar para resolver problemas: Segundo Ferreira; Martins; Andrade (2018), nessa abordagem o professor se concentra na maneira como a matemática ensinada pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros ou não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento seja importante, o essencial é que o estudante seja capaz de utilizá-la. Ao ensinar nessa abordagem, em geral, o professor apresenta o conteúdo aos alunos, por intermédio de uma definição e suas propriedades, teorema, etc.; apresenta vários exemplos, tentando abranger a maior quantidade de situações possíveis, para que o aluno seja capaz de resolver outros problemas, baseando-se nos exemplos apresentados. O professor que se utiliza dessa abordagem não está preocupado em desenvolver as habilidades do aluno para resolver problemas, ele almeja apenas que o aprendiz seja capaz de reproduzir o que já foi feito, adaptar os procedimentos executados pelo professor e utilizar a matemática aprendida para resolver outros problemas.

c) Ensinar através da resolução de problemas: Refere-se ao uso da resolução de problemas como uma metodologia de ensino. O professor, nessa abordagem, tem por objetivo levar o aluno a produzir um novo conhecimento. O professor propõe um problema e, durante a resolução por parte do aluno tendo o professor como mediador, sendo assim, novos conceitos, conteúdos vão sendo apresentados de forma que o estudante possa construir novos conhecimentos (FERREIRA, 2017).

Onuchic e Allevato (2011) propõem uma metodologia de ensino que elas denominaram Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, cuja base é colocar o aluno como protagonista no processo de ensino e aprendizagem.

Buscando auxiliar professores a trabalhar com essa metodologia elas criaram um roteiro de atividades para ser usado em sala de aula. Esse roteiro é composto pelas seguintes atividades:

1º Preparação do problema *- Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento.*

2º Leitura individual *- Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.*

3º Leitura em conjunto *- Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.*

4º Resolução do problema *- A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.*

5º Observar e incentivar *– Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento.*

6° Registro das resoluções na lousa *– Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções.*

7º Plenária *– Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas.*

8º Busca do consenso *– Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe chegar a um consenso sobre o resultado correto.*

9º Formalização do conteúdo *– Nesse momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal.*

10º Proposição e resolução de novos problemas *– Analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo de matemática, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas.*

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: Proposta de um roteiro de atividades para a sala de aula

Esta sequência didática foi planejada para ser trabalhada em 11 aulas de cinquenta minutos cada, com alunos do sétimo ano do ensino fundamental, cujo objetivo é, primeiramente, identificar a existência de pensamento algébrico nos estudantes e observar em qual vertente esse pensamento manifesta. A partir daí, promover intervenções adequadas para fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico dentro da vertente apropriada para construção de novos conhecimentos.

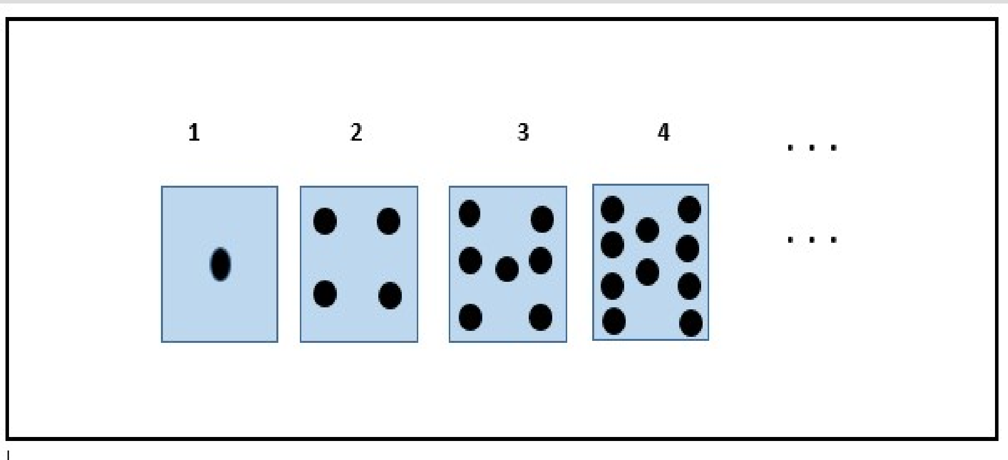
A seguir, apresentamos um roteiro de atividades composto por problemas e instruções para auxiliar professores a trabalhar dessa forma, em sala de aula. Gostaríamos de salientar que este roteiro é apenas uma sugestão para orientar professores que não possuem experiência com esse tipo de trabalho. Diante disso, sugerimos que o professor procure sempre adequar essas atividades, ou produzir suas próprias, à sua realidade e, além disso, busque novos problemas e novas maneiras de fazer esse tralhado, de forma que fique cada vez mais eficiente.

Primeira Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa, o professor deverá propor o Problema 1, a seguir:

Problema 1) Observe a Figura 1 e responda as perguntas a seguir.

Figura 1 - Sequência de imagens



Fonte: Adaptado de Souza (2015; 2018)

a) Quantas bolinhas terá a imagem 6 dessa sequência?

b) Quantas bolinhas terá a imagem 8 dessa sequência?

c) Existe, nessa sequência, uma imagem com 17 bolinhas? Explique.

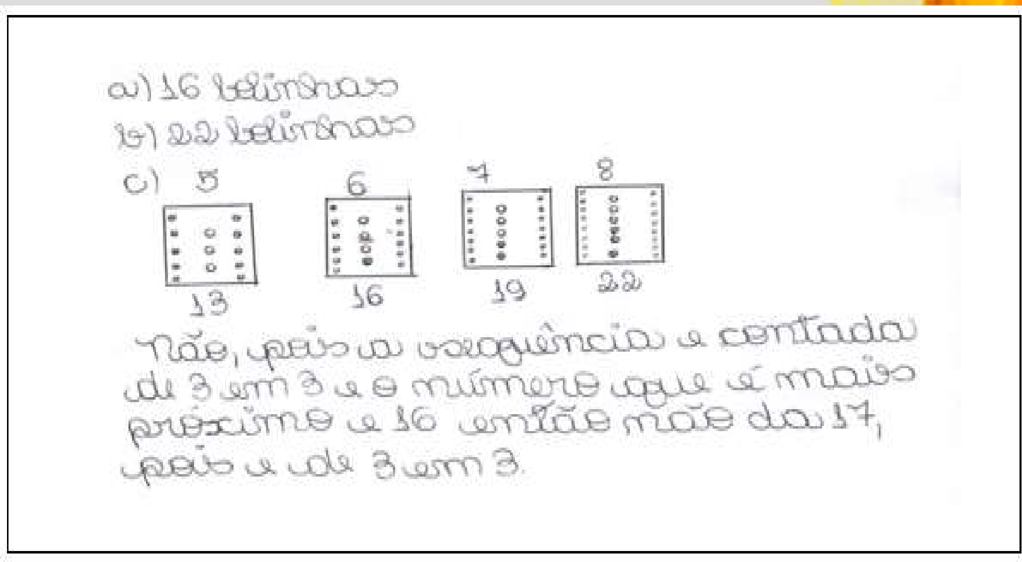
2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deve-se deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor(a) sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, deve buscar identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor precisa observar se o aluno percebeu que a quantidade de bolinhas, de uma imagem para a próxima, aumenta sempre em 3. Se isso acontecer, o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, o aritimeticismo. Se, além de perceber esse aumento nas bolinhas, o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Por fim se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre o número da imagem e quantidade de bolinhas ou se ele conseguir fazer uma modelação, isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante, pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, com intuito de tentar fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantas bolinhas tem na primeira imagem? e na segunda? e na terceira? e na quarta? e na quinta? e na centésima?... O número de bolinhas está aumentando ou diminuindo? Aumenta muito de uma imagem para outra?... Como você explicaria o aumento de bolinhas de uma imagem qualquer para a próxima? Que relação existe entre o número da imagem e a quantidade de bolinhas que ela possui?... Se usássemos um quadrinho para representar o número correspondente a uma imagem qualquer, qual seria o número de bolinhas dessa imagem?... Dentre outras.

Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Infelizmente, é possível que, mesmo o professor fazendo um trabalho eficiente, alguns estudantes não consigam desenvolver um pensamento algébrico. Alguns alunos podem demorar muito tempo para começar a pensar algebricamente. No trabalho que fizemos, observamos que uma aluna desenhou as imagens e criou também um padrão: deixando três bolinhas sem pintar, em cada imagem, dizendo que a sequência caminhava de 3 em 3, conforme a Figura 2:

Figura 2 - Resolução feita por uma aluna



Fonte: Dados da pesquisa

Essa aluna, segundo Kaput (2008), teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico que é perceber a existência de padrão, isso pode ser observado na sequência das figuras desenhadas por ela. Além disso, percebemos, que, de acordo com Radford (2009), ela também raciocinou dentro da segunda vertente do pensamento algébrico, pensamento contextual, quando escreveu a mensagem de texto "Não, pois a sequência é contada de 3 em 3 e o número que é mais próximo é 16, então não dá 17, pois é de 3 em 3.", ou seja, ela justificou por meio de palavras o que entendeu.

Segunda Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa, o professor deverá propor o Problema 2, a seguir:

Problema 2) Larissa tem R$ 20,00 a mais que Carlos, e juntos eles têm exatamente a quantia necessária para comprar dois DVDs, ilustrado pela Figura 3:

Figura 3: DVDs

Fonte: Elaboração da Autora, 2018.

Quantos reais tem cada um deles (Carlos e Larissa)?

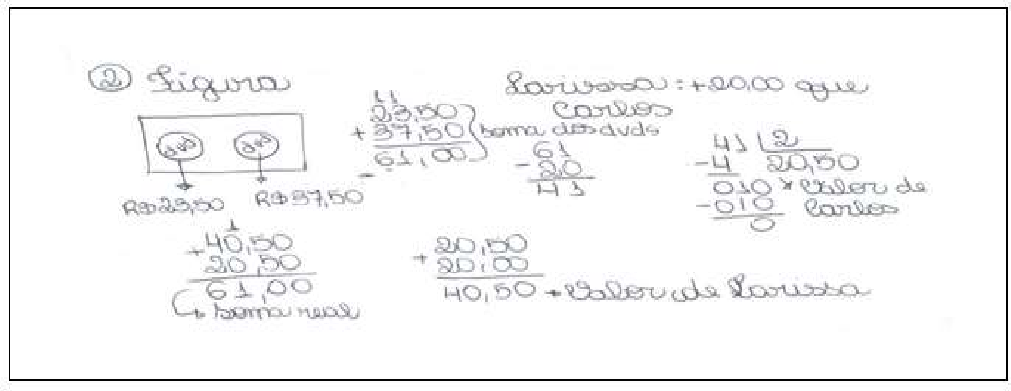
2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deixe o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor. O professor deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor(a) sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, deve buscar identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor precisa observar se o aluno percebeu que a soma dos valores que Larissa e Carlos têm é igual a soma dos valores dos dois DVDs, ou seja, 23,50 + 37,50 = 61,00, e que uma parte dessa soma é o que Larissa tem, e a outra parte é o que Carlos tem. E, ainda que na parte de Larissa deve ter R$ 20,00 a mais. Uma forma de evidenciar essa percepção do aluno pode ser vista quando o aluno tenta achar a resposta por tentativa e erro, isto é, primeiro dividindo os valores em duas partes; em seguida, começar a retirar de uma e passar para a outra, tentando chegar a dois valores em que um deles tem 20 unidades a mais que o outro. Se isso acontecer, o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Se, além disso, o estudante for capaz de explicar essa relação por meio de figuras, ou linguagens escrita ou falada, ou por gestos, ele teve um pensamento algébrico contextual, segunda vertente. Se o estudante conseguir explicar de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras para expressar os valores envolvidos para construir uma relação de igualdade, envolvendo esses valores, esse estudante conseguiu fazer uma modelação, ou seja, teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber e existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que faça o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantos reais Larissa tem a mais que Carlos para comprar os DVDs? Carlos tem a mesma quantia que Larissa? Qual é a quantia que Larissa e Carlos têm juntos? ... se um aluno apresentar uma solução errada, o professor pode, por meio de perguntas, fazer esse aluno perceber que no resultado dele, ou a soma não dá 61 ou Larissa não tem 20 a mais que Carlos. Depois disso, o professor pode, com perguntas adequadas, tentar levar os estudantes a equilibrar a quantia, levando em consideração que um lado deve ter 20 a mais que o outro. Nesse momento, o professor pode incentivar o aluno a usar palavras, letras ou outros símbolos para representar os valores de Larissa e de Carlos, fazendo assim emergir neles a terceira vertente do pensamento algébrico.

Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a formar de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos buscando novas alternativas para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Infelizmente, como já dissemos, é possível que, mesmo o professor fazendo um trabalho eficiente, alguns estudantes não consigam desenvolver um pensamento algébrico. E, alguns estudantes podem demorar muito tempo para começar a pensar algebricamente. No trabalho que fizemos, observamos que uma das alunas, conseguiu interpretar o problema. Ela desenhou uma figura representando os DVDs, usou o princípio aditivo e multiplicativo, mostrando a presença da primeira e da segunda vertente do pensamento algébrico. A solução apresentada por essa aluna é ilustrada pela Figura 4:

Figura 4 - Resolução feita pela aluna



Fonte: Dados da pesquisa

Observe que para resolver o Problema 2, essa aluna apresentou, de acordo com Lins (1992), um raciocínio na vertente do aritmeticismo, isto é constatado quando ela utiliza as operações de adição e divisão com números naturais, buscando generalizar um caso particular. Também a capacidade de estabelecer relação entre quantidades, mostrando a soma das quantidades dos valores de DVDs para encontrar o valor de Larissa e de Carlos.

Terceira Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa o professor(a) deverá propor o Problema 3, a seguir:

Problema 3) Uma sequência de figuras geométricas foi construída utilizando palitos, como é mostrado na Figura 5.

Figura 5: Sequência de figuras geométricas construídas com palitos

Número da figura geométrica	**1**	**2**	**3**	**4**	...
Figuras geométricas formada por palitos					...
Quantidade de Palitos	**1**	**3**	**5**	**7**	...

Fonte: Adaptado Souza (2015; 2018)

a) Quantos palitos deverá formar a figura geométrica 7?

b) Quantos palitos formará a figura geométrica 12?

c) Qual é o perímetro da figura geométrica 10?

d) Qual figura é formada pela figura geométrica 12, e qual é o seu perímetro 12?

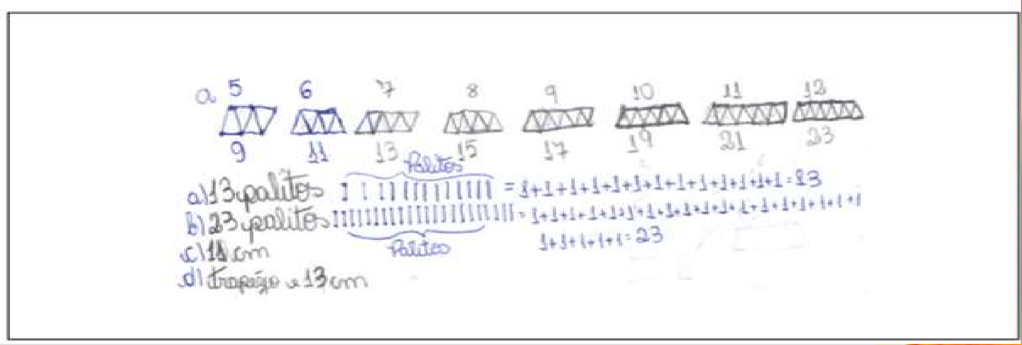
2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deve-se deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual precisa apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor observa se o aluno percebeu que a quantidade de palitos de uma imagem para a próxima aumenta sempre em 2. Se isso acontecer, o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Se o estudante conseguir perceber e argumentar que, a partir da 3ª figura, têm-se apenas dois tipos de figuras geométrica, trapézios e losangos, o estudante evidenciou um pensamento dentro da segunda vertente. Isso pode ser identificado se ele conseguir perceber que os trapézios são formados para as figuras de números pares e losangos para as de números ímpares. Se ele conseguir formalizar a relação encontrada por meio de uma representação por letras ou palavras que representam esses valores, tem-se aí uma terceira vertente de pensamento algébrico.

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante, pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantos palitos tem na primeira imagem? E na segunda? E na terceira? E na quarta? E na quinta? E na centésima?... O número de palitos está aumentando ou diminuindo? quando passamos de uma figura para a outra que mudança ocorre na figura geométrica? que relação existe entre o número da figura e a figura geométrica? na figura 3, qual é a figura geométrica? e na figura 5? e na figura 7? e na figura 9 palitos? o que você consegue concluir disso?

Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a formar de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Uma aluna desenhou uma continuação para sequência de figuras geométricas, Figura 6, e escreveu abaixo de cada figura geométrica o número de palitos dessa figura, conforme pode ser observado a seguir:

Figura 6 - Resolução feita por uma aluna



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com Lins (1992), a aluna teve um pensamento dentro do aritmeticismo quando utilizou o princípio aditivo na resolução dos itens “a)” e “b)” ao somar, de 1 em 1, a quantidade de palitos para formar a figura geométrica, e um pensamento algébrico contextual ao desenhar as figuras e expressar o aumento de 2 em 2, de uma para outra.

Quarta Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 4, a seguir:
Problema 4) Considere uma máquina capaz de modificar qualquer valor numérico introduzido em sua entrada, de acordo com o que é mostrado na Figura 7. Observando o funcionamento desta máquina, responda:

Figura 7: Máquina

Fonte: Adaptado Dante (2015; 2018)

a) Se Márcio colocasse R$ 20,00 na entrada dessa máquina, quanto sairia?

b) Robson colocou na máquina o número – 10, que número saiu?

c) Que quantia Carla deverá pôr na máquina para sair R$ 50,00?

d) Anderson colocou o número 3,2; Quanto ele deveria colocar a mais para sair o número 17?

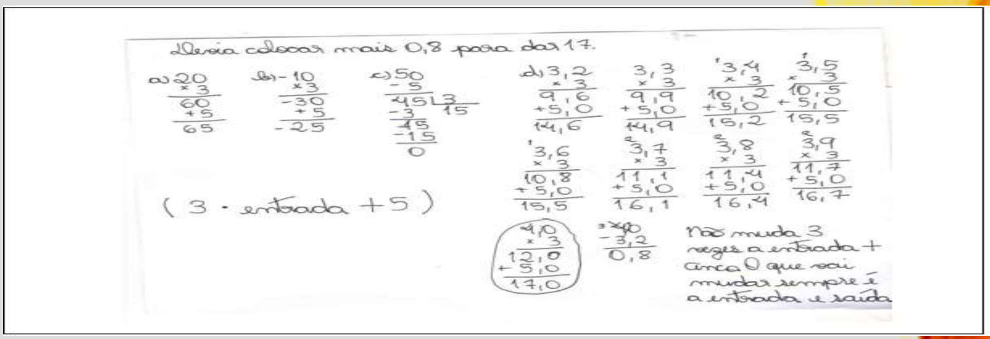
2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor. O professor deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor deve observar se o aluno percebeu uma generalização da aritmética, isto é, que qualquer valor colocado sofrerá as mesmas operações e, consequentemente, a diferença entre os resultados de dois valores consecutivos será sempre a mesma. Se o estudante percebeu esse, ou outro, padrão ele está com um pensamento dentro da primeira vertente. Se o aluno conseguir expressar isso, então ele se encontra dentro da segunda vertente do pensamento algébrico, ou seja, se ele for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento contextual. Se o estudante conseguir expressar essas ideias de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras para escrever uma relação entre a entrada de dinheiro e sua saída, ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante pelo o que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que faça o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Se você colocar na máquina R$ 50,00, quanto você receberia? E se colocasse R$ 70,00? E se colocasse R$ 30,00? E se colocasse R$ 35,00?... Que quantia deve-se colocar na máquina para sair R$ 100,00?... se você chamar de x a quantidade que você colocar na máquina, como você poderia expressar o valor da saída?

Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Uma das alunas que participou da aplicação dessa atividade usou o princípio multiplicativo do pensamento algébrico, generalizando ao dizer que o que muda é o valor da entrada e saída, isso pode ser constatado pela resolução apresentada por ela, conforme a Figura 8:

Figura 8 - Resolução feira pela uma Aluna



Fonte: Dados da pesquisa

A aluna utilizou um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, o aritmeticismo, ressaltado por Lins (1992), ao usar a operação de adição, e da multiplicação nesse processo de generalização, e um pensamento um contextual, segunda vertente, no entendimento de Radford (2009), ao escrever o texto: "*Não muda 3 vezes a entrada mais cinco. O que vai mudar sempre é a entrada e saída*".

Quinta Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 5, a seguir:

Problema 5) Sandra alugou um carro popular na locadora LOCBEM. O preço de locação estava indicado, na porta da locadora, pelo cartaz apresentado na Figura 9, a seguir:

Figura 9 - Cartaz com preço de locação

Fonte: Adaptado Souza (2015; 2018)

Sabendo que Sandra alugou o carro por um dia e pagou pela locação R$ 270,00, determine quantos quilômetros ela percorreu.

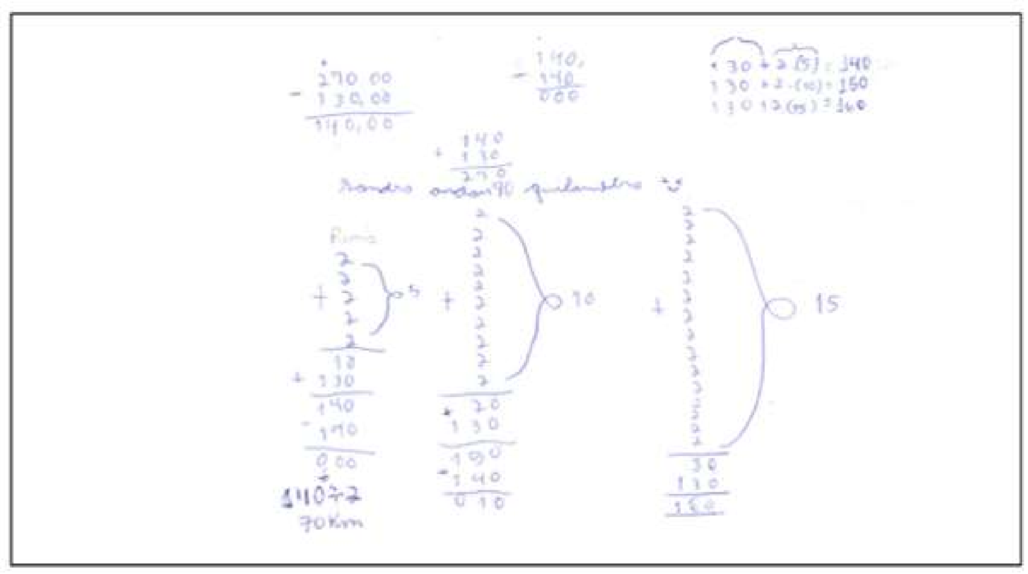
2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor. O professor deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor deve observar se o aluno percebeu que o valor da diária para locação do veículo é fixo, e o que varia são os quilômetros rodados que custa R$ 2,00 cada. Se isso acontecer de forma que o estudante evidencie um processo de generalização, ele teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo, ou seja, se ele perceber que para locar um veículo, o valor da diária é R$ 130,00 mais 2 vezes a quantidade de quilômetros rodados. Se o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre a diária e os quilômetros rodados para locação do veículo, esse estudante conseguiu fazer uma modelação, isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante, pelo o que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Se a diária para locação do veículo fosse R$ 150,00 ao invés de R$ 130,00 o que mudaria? e se fosse R$ 70,00? e se fosse R$ 35,00?... Se mudasse agora o valor pago por quilômetros rodados, alteraria a resposta do problema? Se usássemos uma letra para representar a quantidade de quilômetros rodados, como poderíamos expressar o resultado?

Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacioná-la buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. No trabalho que fizemos, observamos, no momento da aplicação desse problema, que o método que uma aluna resolveu foi interessante, pois ela montou um esquema prático relacionando quantas vezes o número dois poderia repetir. No primeiro momento, pensamos que ela tivesse cometido um erro, mas analisando com mais cuidado, percebemos que a solução estava correta e o método utilizado por ela fazia sentido. Apresentamos a solução dessa aluna na Figura 10:

Figura 10 - Resolução feira pela uma Aluna



Fonte: Dados da pesquisa

Essa aluna utilizou a primeira e segunda vertentes do pensamento algébrico. De fato, na perspectiva de Lins (1992), essa aluna percebeu um processo de generalização por meio de cálculos com as operações de adição e subtração, como: *"2 + 2 + 2+ 2 + 2 = 10 ; 10 + 130 = 140; 140 – 140 = 0; 140 / 2 = 70"*, e também apresentou um pensamento dentro da segunda vertente, quando percebeu uma generalização do método usado para obter os resultados. Porém usando apenas números como a expressão *"130 + 2 x (5) = 140."* O fato dessa generalização não ter sido traduzida para uma linguagem algébrica, isto é, utilizando letras, palavras ou símbolos, não usuais, para representar os números, ela não evidenciou um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico

Sexta Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 6, a seguir:

Problema 6) Pedrinho tem nove cédulas que somadas dão R$ 93,00. Essas cédulas são de R$ 1,00, R$ 5,00,R$ 10,00 e R$ 50,00. Quantas cédulas de cada valor Pedrinho poderia ter?

2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, se o aluno perceber que a soma dessas cédulas de R$ 1,00, R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 50,00, não podem ultrapassar o valor de R$ 93,00 e que isso para isso ele deve selecioná-las começando, por exemplo, com a maior (ou a menor), ou que se fosse outro valor deveria seguir uma ideia semelhante, ele está dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Se o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre a quantidade de cada cédulas que Pedrinho tem de cada valor, esse estudante conseguir fazer uma modelação, isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante, pelo o que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Qual o número máximo de cédulas de R$ 1,00 Pedrinho poderia ter? e cédulas de R$ 5,00? Pedrinho pode ter 2 cédulas de R$ 5,00? Explique? Pedrinho pode ter 3 cédulas de R$ 10,00? Explique? Pedrinho pode ter 2 cédulas de R$ 50,00? Explique?

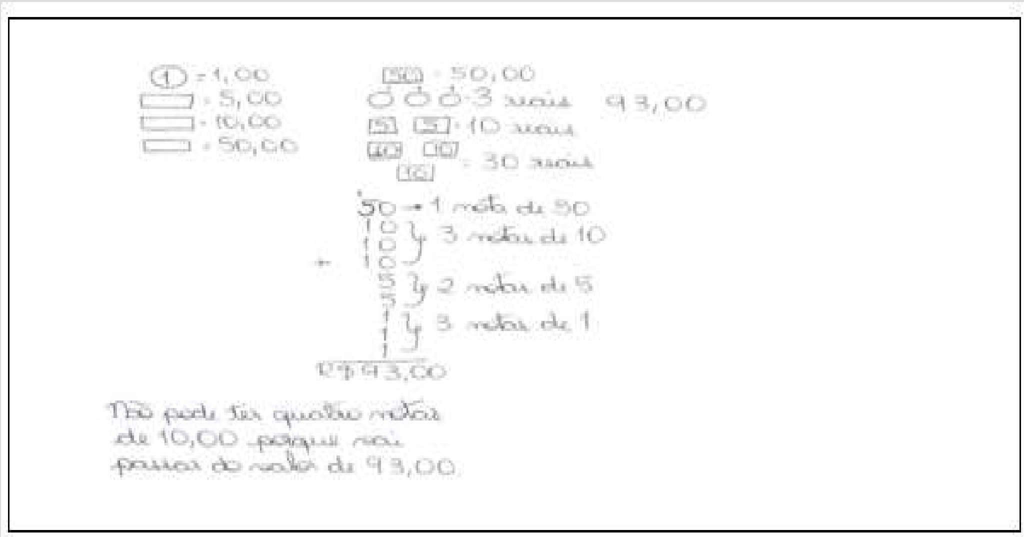
Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacioná-la, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Uma maneira interessante de envolver os estudantes nesse processo seria convidá-lo para ir a lousa apresentar sua resolução. Isso foi feito durante a aplicação do nosso plano de ensino, como é mostrado pela Figura 11:

Figura 11 - Resolução feira pelo o Aluno

Fonte: Dados da pesquisa

Além da resolução do aluno, mostrado na Figura 11, uma aluna resolveu esse problema, e apresentou a solução mostrada na Figura 12.

Figura 12 - Resolução feira por uma Aluna



Fonte: Dados da pesquisa

O aluno que foi a lousa e a estudante cuja resolução é mostrada pela Figura 12 desenvolveram um pensamento algébrico dentro da primeira vertente, quando separaram as notas e somaram os seus resultados, percebendo um método que poderia sempre ser usado de maneira geral, que apresentaria erros, mas que poderiam ser corrigidos. Essa forma, segundo Lins (1992), caracteriza-se como aritmeticismo, pois explora a ideia de igualdade dentro de um processo de generalização. Isso pode ser observado quando ela apresentou a expressão "50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 = 93", e, também, explicitaram um padrão real, por meio de desenhos de moedas e as cédulas, desenvolveram também, um raciocínio dentro da segunda vertente do pensamento algébrico

Sétima Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 7, a seguir:
Problema 7) Assaí Atacadão (Redes de atacados no Brasil) comercializa grandes variedades de produtos, abrangendo alimentos frescos, como verduras, frutas e peixes. Dentre esses produtos são comercializados arroz, mercearia, alimentos, perecíveis, embalagens, bazar, higiene, bebidas e limpeza. No dia 20 de agosto de 2018, o saco de 5 quilos de arroz da marca Gol estava de R$ 9,99. Quanto custariam 2 sacos desse arroz? E quanto custariam 3 sacos dele? E se fossem 4 sacos de arroz? E se fossem 5 sacos de arroz? E se fossem 999 sacos de arroz?

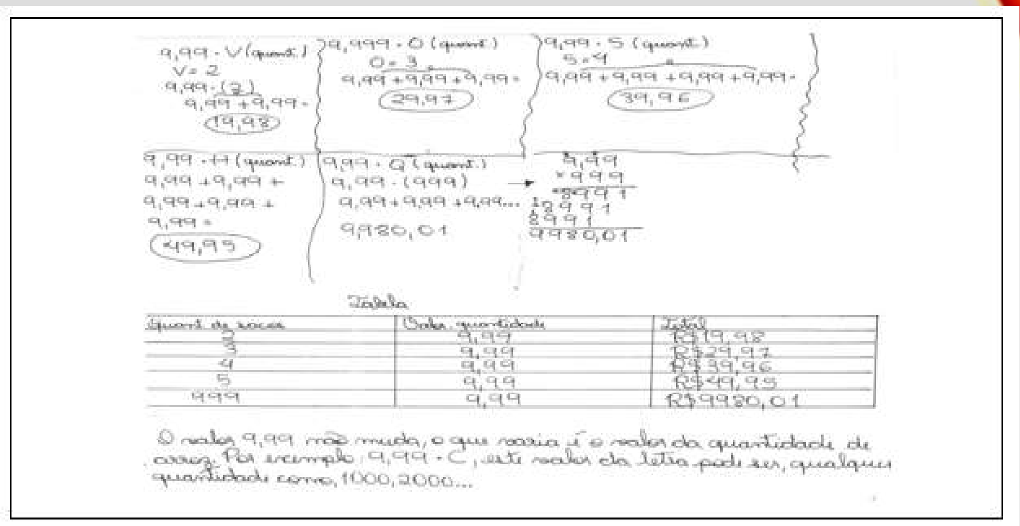
2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor(a) sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor observa se o aluno percebeu que o valor do saco de arroz é fixo de R$ 9,99, podendo variar a quantidade de pacotes comprados. Se o estudante perceber que a variação do valor a ser pago decorre exclusivamente da variação de quantidade, ele teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Dentro dessa primeira vertente ele também poderá perceber que, quanto mais quantidade de saco de arroz levar maior será o valor a pagar, e se o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre a quantidade do saco de arroz e o valor que ele deverá pagar pela compra, esse estudante conseguiu fazer uma modelação, isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante, pelo o que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quanto você pagará em 2 sacos de arroz? E em 4 sacos de arroz? E em 20 sacos de arroz? E em 1000?... O valor a pagar aumenta ou diminui?... Se usássemos uma letra, como por exemplo q, para representar a quantidade de sacos de arroz como a gente poderia expressar o valor total a ser pago?

Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacioná-la, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. A Figura 13, mostra a resolução de uma aluna.

Figura 13 - Resolução feira por uma Aluna



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com as ideias de Lins (1992), a aluna utilizou um pensamento quantitativo, ao conseguir perceber numericamente um processo de generalização. De acordo com Radford (2009), ela apresentou o pensamento contextual, evidenciado no trecho "*O valor 9,99 não muda, o que varia é o valor da quantidade de arroz*", e o pensamento padrão, ao utilizar letras para representar os valores desconhecidos como pode ser visto no trecho "*9,99.V*".

Oitava Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 8, a seguir:

Problema 8) Uma fábrica de roupas produz 15 peças de calças por hora. A quantidade de calças é registrada pelos jovens aprendizes (são jovens menores de idade que são contratados temporariamente pelas empresas). Responda, na tabela, abaixo, qual o valor correspondente a cada quantidade de calças que são fabricadas por hora?

Tabela 1 - Produção de calças

Tempo (horas)	Números de calças
2	
4	
6	
8	
10	
1000	

Fonte: Elaboração da Autora, 2018.

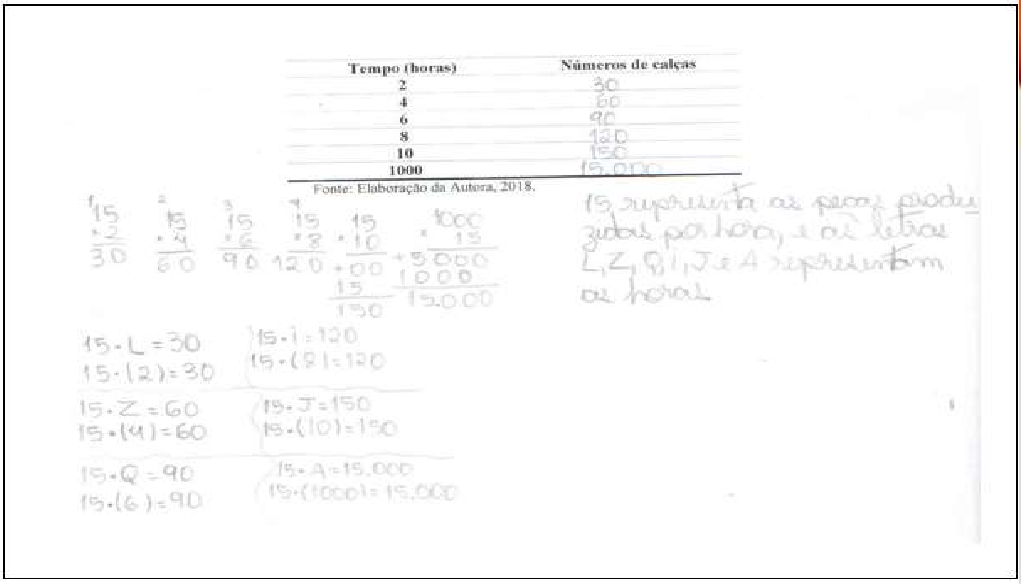
2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor deve observar se o aluno percebeu que o número de calças produzidas é proporcional ao tempo de produção, isto é, se ele conseguiu perceber um processo de generalização em que ele poderia determinar a quantidade de calças produzidas conhecendo apenas o tempo, em horas, de produção. Se isso acontecer o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Se, além disso, ele for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, para representar a quantidade de calças produzidas por horas pela fábrica, esse estudante conseguiu fazer uma modelação, isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante, pelo o que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que faça o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantas calcas são produzidas em 1 hora? e em 2 horas? e em 12 horas? e em 20 horas?... O número de calças está aumentando ou diminuindo? se usássemos uma letras, por exemplo h, para representar o número de horas, como poderíamos calcular a quantidade de calças produzidas?

Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacioná-la, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Figura 14, apresentamos uma das soluções evidenciadas durante a aplicação do nosso plano de ensino.

Figura 14 - Resolução feira por uma Aluna



Fonte: Dados da pesquisa

Essa aluna permeou a primeira e segunda vertentes do pensamento algébrico e começou a entrar na terceira vertente. De fato, ela utilizou letras para representar um valor que varia, como como pode ser visto no trecho "*15x L; 15xZ, 15x*".

Nona Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 9, a seguir:

Problema 9) Observe a sequência das imagens feita por Sônia na Figura 15.

Figura 15: Sequências de estrelas amarelas

Fonte: Elaboração da Autora, 2018

Se Sônia continuasse desenhando estrelas, de acordo com o padrão apresentado por essa figura:

a) Quantas estrelas teria no 5° termo?

b) Quantas estrelas teria o 6° termo que Sônia determinará?

c) Qual o 100° termo que Sonia determinará? Explique sua resposta?

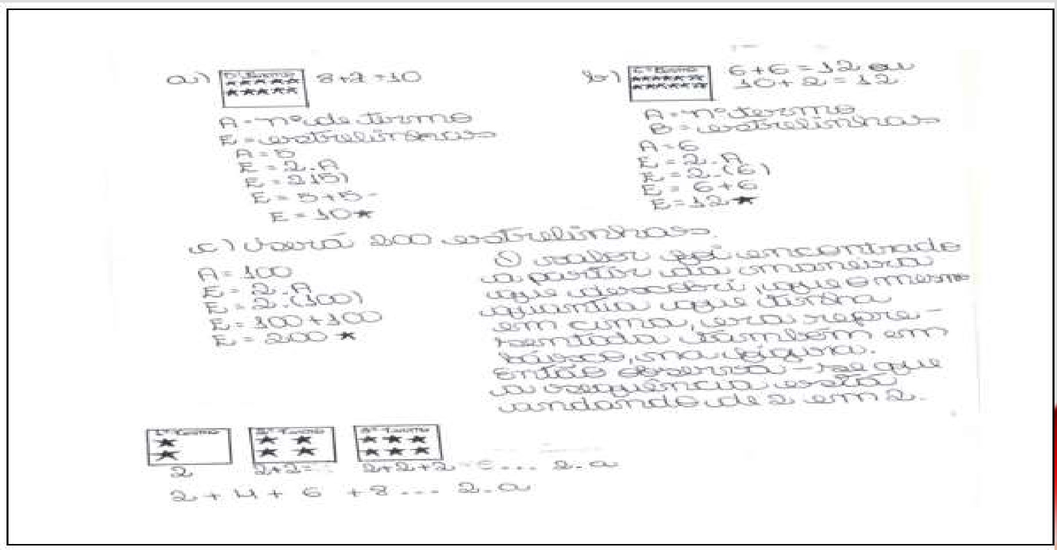
2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentiva-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor deve observar se o aluno percebeu que a quantidade de estrelinhas de uma imagem para a próxima aumenta sempre em duas. Se isso acontecer, o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Se, além de perceber esse aumento nas estrelinhas, o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre o número da imagem e quantidade de estrelinhas isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantas estrelinhas tem na primeira imagem? E na segunda? E na terceira? E na quarta? E na quinta? E na centésima?... O número de estrelinhas está aumentando ou diminuindo? Aumenta muito de uma imagem para outra?... Como você explicaria o aumento de bolinhas de uma imagem qualquer para a próxima? Que relação existe entre o número da imagem e a quantidade de estrelinhas que ela possui?... Se eu usasse uma letra, por exemplo *n*, para representar o número correspondente a uma imagem qualquer, qual seria o número de estrelinhas dessa imagem?... Dentre outras.

Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. A Figura 16 apresenta uma das resoluções que surgiram durante a aplicação desse problema.

Figura 16 - Resolução feira por uma Aluna



Fonte: Elaboração da Autora, 2018

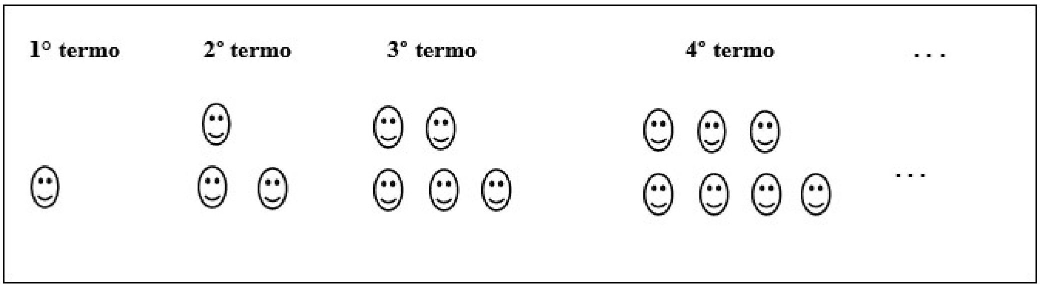
A aluna, cuja a sua resolução é apresentada na Figura 16, apresentou um raciocínio dentro da primeira e segunda vertentes do pensamento algébrico, ao perceber a generalização que pode ser expressa somando dois a dois às figura e, em seguida, conseguir escrever essa generalização de várias formas e, ainda, atribuir letras para representar valores dessa sequência. Na concepção de Lins (1992), Radford (2009) e Kaput (2008), a aluna teve um pensamento que transitou entre aritmeticismo, contextual e de modelação.

Décima Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 10, a seguir:

Problema 10) Observe a sequência das imagens feita por Katia, na Figura 17.

Figura 17: Sequências de rostinhos



Fonte: Elaboração da Autora, 2018.

a) Quantas figurinhas deverá ter o 5° termo da sequência desenhada por Katia?

b) Quantas figurinhas deverá ter o 6° termo da sequência desenhada por Katia?

c) Qual o 1000° termo que Katia determinará? Como você encontrou a resposta? Explique sua resposta?

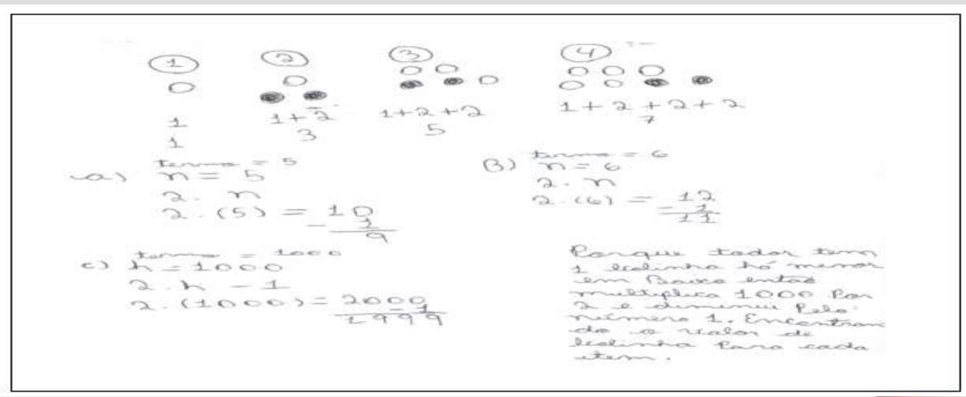
2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentiva-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor(a) sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor observa se o aluno percebeu que a quantidade de rostinhos de em qualquer termo, é o dobro do número do termo menos um. Se isso acontecer, o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritmeticismo. Se, além dele perceber essa relação, entre o número do termo e quantidade de rostinhos que ele possui, o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre o número do termo e quantidade de rostinhos isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico**.**

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantos rostinhos tem no primeiro termo? E n segundo? E no terceiro? E no quarto? E no quinto? E no centésimo?... O número de rostinhos está aumentando ou diminuindo? Aumenta muito de um termo para outro?... Como você explicaria o aumento de rostinhos de uma imagem qualquer para a próxima? Que relação existe entre o número do termo e a quantidade de rostinhos que ele possui?... se usássemos uma letra, por exemplo n, para representar o termo, como poderíamos expressar a quantidade de rostinhos?

Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. A Figura 18 apresenta uma solução feita por um dos alunos, durante a aplicação desse problema em sala de aula.

Figura 18 - Resolução feira por um Aluno



Fonte: Dados da pesquisa

O aluno usou letras diferentes para representar cada momento, descobrindo uma relação entre um termo e a quantidade de carinhas "*2n -1*". Para encontrar a quantidade de bolinhas em cada imagem, ele representou as bolinhas do início e as demais foram aumentadas de 2 em 2, percebendo um padrão. Assim, podemos perceber primeira, segunda e terceira vertentes do pensamento algébrico. Esse aluno utilizou o pensamento contextual também para escrever o que entendeu sobre problema e contextualizando sua resolução, como pode ser observado no trecho, escrito pelo aluno "*Porque todos tem uma bolinha a menos em baixo*".

Décima Primeira Aula

1°) Proposição do problema: Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 11, a seguir:
Problema 11) João é primo de Daniel, sua idade é o triplo da idade de Daniel acrescida de 6 anos. João tem 18 anos. Qual idade de Daniel?

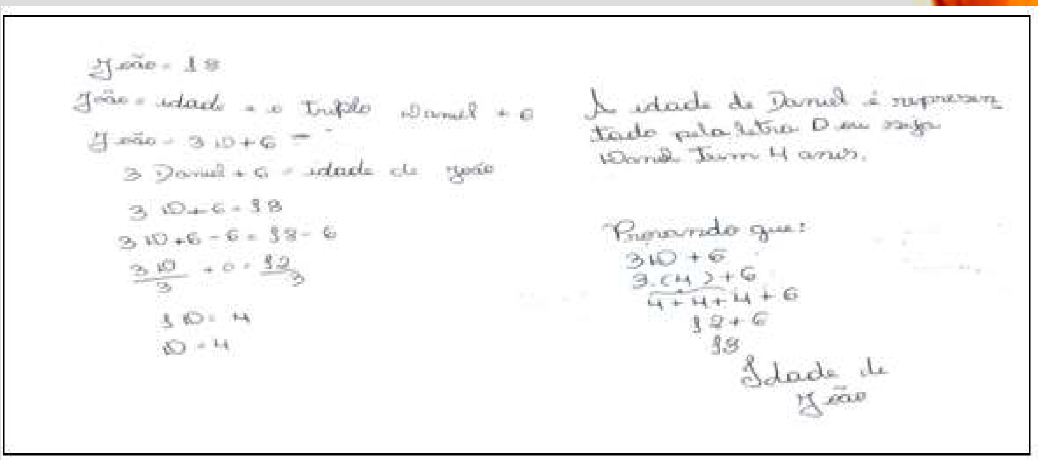
2°) Observar o comportamento dos alunos: Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentiva-lo a trabalhar na resolução do problema.

3°) Analisar o trabalho do aluno: A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor observa se o aluno percebeu que existe uma relação entre a idade de João e Daniel e que uma pode ser obtida da outra por operações de adição e multiplicação. Se essa percepção envolver uma generalização, ou seja, a percepção de que variando a idade de um a outra também varia sistematicamente, então o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritmeticismo. Se o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização colocando em palavras, imagem ou gestos, ele teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre a idade de Daniel e João isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Após analisar o estudante pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Daniel é mais novo que João? Se João tivesse 10 anos, qual seria a idade de Daniel? E se a idade de João fosse 15? E se fosse 20? E se fosse 25?... Se a idade de João fosse representada pela letra n, como eu escreveria a idade de Daniel usando n?

Comentários: Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos buscando novas alternativas para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Uma resolução do Problema 11, feita por uma aluna, é apresentada na Figura 19.

Figura 19 - Resolução feira por uma Aluna



Fonte: Dados da pesquisa

A aluna representou com a letra *D* a idade de Daniel. A maneira como essa aluna resolveu o problema, operando com o inverso aditivo ou multiplicativo, até chegar ao valor 4, valor da idade que ela estava procurando, ou seja, idade de Daniel, demonstra claramente um raciocínio algébrico. Nesse caso, apareceu as três vertentes, mas nosso foco aqui foi observar a terceira vertente que demonstra que a estudante está pronta para um trabalho mais objetivo que envolvam relações e condições de operar o desconhecido como se fosse conhecido, consequentemente, já ela conseguiu produzir significados para conceitos relacionados às equações de primeiro grau.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para a construção deste trabalho, focamos principalmente na forma que o estudante pensa diante de um problema. E, a análise do professor, de forma criteriosa sobre as ações do estudante, sua forma de expressar, escrita ou falada, evidencia como ele pensa, dando condições ao professor para fazer as devidas intervenções. Introduzir qualquer conceito formal de matemática que envolvam relações entre grandezas desconhecidas sem que o estudante consiga lidar com isso, ou seja, produzir significado para esses objetos, pode estar fadado ao fracasso. Nesse sentido, o professor deve estar atendo para o que o estudante entendeu sobre cada conceito trabalhando em sua aula e, evidenciar o pensamento algébrico do estudante, observando em que vertente ele está inserido, pode ajudar nesse processo.

Esperamos que este Produto Educacional possa auxiliar professores a criarem novas propostas eficientes de ensino, fundamentadas em pesquisas e aplicações que evidenciem o pensamento do estudante, para que o professor possa fazer intervenções para produzir aprendizagem. Esperamos também, poder motivar professores a utilizar proposta como essa para construção de ferramentas pedagógicas, pois acreditamos que com a resolução de problemas, e as devidas intervenções do professor, os alunos possam desenvolver um pensamento algébrico capaz de reduzir suas dificuldades em aprender os conteúdos relacionados às equações do primeiro grau. Acreditamos também que essa Sequência Didática possa ser adaptada ou reformulada para atender as diversas necessidades que aparecem com frequência dentro da realidade de cada turma, de cada escola. Por fim, gostaríamos de se ressaltar que esta Sequência Didática é apenas uma proposta a qual poderá inspirar outros educadores e pesquisadores na busca de melhorias para o campo da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** 7ª série/ São Paulo: Moderna, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris:** matemática. 2º Ed. São Paulo: Ática, 2015.

FERREIRA, N.C. **Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2017.

FERREIRA, N. C.; MARTINS, E. R.; ANDRADE, C. P. Construção do conhecimento matemático na perspectiva da resolução de problemas. In: PINHEIRO, J. M. L. (Ed.). **A Matemática e seu Ensino: olhares em Educação Matemática**. São Paulo: LF Editorial, 2018. p. 143–161.

KAPUT, J. **Algebra in the early grades**. LV, New York, 2008.

KAPUT, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades (pp. 133–160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

KOBASHIGAWA, A.H.; ATHAYDE, B.A.C.; MATOS, K.F. de OLIVEIRA; CAMELO, M.H.; FALCONI, S. Estação ciência: formação de educadores para o ensino de ciências nas séries iniciais do ensino fundamental. In: IV Seminário Nacional ABC na Educação Científica. São Paulo, 2008. p. 212-217. Disponível em: <http://www.cienciamao.usp.br/dados/smm/_estacaocienciaformacaodeeducadoresparaoensinodecienciasnasseriesiniciaisdoensinofundamental.trabalho.pdf>. Acesso em: 05 de out. de 2017.

LINS, R, C. **The learning and teaching of school álgebra. Handbook of research om mathematics teaching and learning**. National Council of Theacher of Mathematics – NCTM, New York, 1992.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas, p. 73-98. In: **Boletim de Educação Matemática** (BOLEMA), v. 25, n. 41, dez. 2011. Universidade Estadual Paulista – Campus de Rio Claro. Ed. Comemorativa 25 anos.

ONUCHIC, et al,. **Resolução de Problemas:** Teoria e prática. Jundiaí, Ed. Paco, 2014.

PEREIRA et al., Carlos, **Egipto Senet**. Ed. Norprint, Belém - PA, 2008.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: Araújo, H. L. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203 p.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: **North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME**. Bergen University College. v. 1, 2009.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989, p.31-42.

SOUZA, Joamir Roberto. **Vontade de saber matemática**. 2º Ed. São Paulo: FTD, 2015.

$2X - 14 = 0$

$3X + 6 = 18$

$2X + 8 = 20$

$130 + 13x = 0$

$9{,}99X + 10{,}01 = 20$

ANEXOS

ANEXO A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE

Eu,____inscrito(a) sob o RG__________________________________CPF______________________________ autiorizo meu filho(a) ____ a participar do estudo intitulado "O desenvolvimento do pensamento algébrico, através da resolução de problemas, e suas contribuições para aprendizagem de equações do primeiro grau". A pesquisa tem como objetivo promover o pensar algébrico de estudantes do ensino fundamental II da Escola Municipal Antônio Gomes de Lima (Escola localizada: Rua 15, sem número, Bairro Promissão na cidade de Rio Verde, Goiás/Brasil), e entender quais são as suas contribuições para o processo de ensino-aprendizagem de equações do primeiro grau. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pela pesquisadora Wagna Mendes Vieira sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação do meu filho(a), e o uso de imagens e textos produzidos, para fins acadêmicos. Após receber os esclarecimentos e as informações, se você aceitar que seu filho/a faça parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence à pesquisadora responsável. Esclareço que, em caso de recusa na participação seu/sua filho/a não será penalizado(a) de forma alguma, mas se aceitar participar, as dúvidas sobre a pesquisa poderão ser esclarecidas pela pesquisadora responsável, via e-mail (wagna_mendes@yahoo.com ou wagna.mv@outlook.com) e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do(s) seguinte(s) contato(s) telefônico(s): (64)9 92764665/ (64) 3641-5534. Estou sendo orientada pelo professor doutor Nilton Cezár Ferreira, em caso de dúvida podem entrar em contato com ela via e-mail (niltoncezar@gmail.com) e no seguinte contato (62) 9 9166-1713. Ao persistirem as dúvidas sobre os seus direitos como participante desta pesquisa, você também poderá fazer contato com o **Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás/IFG Campus Jataí, pelo telefone (62) 3612-2200**. E o país onde será realizado a pesquisa é o Brasil.

1. Informações Importantes sobre a Pesquisa:
1.1 Título, justificativa, objetivo;

Esta pesquisa tem como título: O desenvolvimento do pensamento algébrico, através da resolução de problemas, e suas contribuições para aprendizagem de equações do primeiro grau, podem contribuir para com o desenvolvimento do pensamento matemático de alunos do 7º ano do ensino fundamental II. Este trabalho se justifica pela necessidade de propor melhorias no ensino da matemática, partir da resolução de problemas por meio do pensar algebricamente, pois existe a preocupação de propor inovações às práticas pedagógicas dos professores, minimizando assim, as possíveis dificuldades encontradas pelos alunos e docentes no ensino matemático.

1.2 Procedimentos utilizados da pesquisa ou descrição detalhada dos métodos.

Para iniciar a pesquisa será realizada um período de observação na terceira semana de agosto, quando a pesquisadora terá um momento de interação com os alunos e será feita uma entrevista com os alunos(a), e um questionário para o professor(a) de matemática, e, na quarta semana de agosto terá início a pesquisa, sendo que, durante todo período de desenvolvimento da pesquisa, os alunos participarão de atividades relacionadas às equações do primeiro grau.

Temos como pressuposto que, num contexto de mediação e interação pedagógica intencional, os alunos podem elaborar estratégias para desenvolver o pensamento algébrico através de resolução de problemas e comunicar suas ideias e pensamentos em matemática, ou seja, pretende-se a partir desta atividades aprender pensar algebricamente os conceitos matemáticos.

Assim, para recolher informações que irão auxiliar na pesquisa, os alunos responderão a questões (atividades) e as aulas serão fotografadas, gravadas em vídeo e áudio, estas atividades preparadas de forma que os alunos possam pensar algebricamente. Desde já, afirmo que as gravações, fotos, falas e imagens não serão publicadas, e serão utilizadas por mim para avaliação da metodologia utilizada e da pesquisa em si.

No momento da aplicação das atividades, farei gravações das aulas que serão realizadas com objetivo de registrar fielmente as falas e ações dos participantes. Lembrando que, para os registros audiovisuais, é importante que você conceda o uso de sua voz, imagem e/ou opinião, assim, peço que marque uma das opções:

( ) Permito a divulgação da imagem/voz/opinião do meu filho (a) ou da criança que está sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa;

( ) Não permito a publicação da imagem/voz/opinião do meu filho (a) ou da criança que está sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa.

1.3 Especificação de possível *desconforto emocional* e/ou de possíveis *riscos psicossociais* bem como os benefícios acadêmicos e sociais decorrentes da participação do participante em sua pesquisa;

Os riscos relacionados com a participação do aluno(a) são: pode haver uma indisposição ou aborrecimento no momento do desenvolvimento da atividade proposta ao responder as questões levantadas na roda de conversa, propiciando assim desconforto e alterações relacionadas ao seu comportamento durante as anotações e gravações; quebra de sigilo; aborrecimento por não conseguir de maneira imediata alcançar o objetivo da aprendizagem das equações do primeiro grau, e assim, pode haver desânimo, mas todos esses riscos serão minimizados pelos seguintes procedimentos: aplicação de questões sucintas e objetivas, que evitem o cansaço e desânimo, além disso, o aluno(a) terá tempo suficiente para responder as questões; todas as anotações e gravações realizadas lhes serão apresentadas, para que você não desconfie ou se sinta incomodado pela pesquisadora; será evitada a quebra do sigilo, e, para isso, você terá acesso a todas as maneiras de divulgação do trabalho e dos dados coletados.

Os benefícios relacionados com à participação do aluno(a) poderão ser: reflexão sobre as práticas pedagógicas envolvendo equações do primeiro grau; diminuir as dificuldades relacionadas aos conteúdos de Matemática; a pesquisa poderá dar suporte para outras futuras pesquisas que abordem a temática investigada; as aulas poderão ser mais dinâmicas e interdisciplinares com desenvolvimento do pensamento algébrico; os alunos poderão apresentar mais interesse pela matemática por meio de atividades através da resolução de problemas. Para essa pesquisa, não está previsto nenhum gasto relacionada à participação da criança.

1.4. Informações sobre a forma de ressarcimento das despesas decorrentes da pesquisa;

Para essa pesquisa, não está previsto nenhum gasto relacionada à participação do aluno.

1.5. Garantia da liberdade de participação;

Esclareço que em caso de recusa os participantes, não sofrerá nenhum tipo de penalidade, da mesma forma ocorrerá se o responsável e/ou o aluno em alguma fase da pesquisa quiser desistir. Inclusive os participantes são livres para não responderem a nenhuma questão que lhe cause desconforto emocional e/ou constrangimento.

1.6. Apresentação dos resultados;

Os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados em seminários, congressos e similares, entretanto, os dados/informações obtidas, por meio da sua participação serão confidenciais e sigilosos, não possibilitando sua identificação. A sua participação bem como a de todas as partes envolvidas será voluntária, não havendo remuneração para tal, ou seja, você não será pago para participar da pesquisa.

1.7. Garantia de pleitear indenização;

Não está previsto indenização por sua participação, mas em qualquer momento se você sofrer algum dano, comprovadamente decorrente desta pesquisa, terá direito à indenização. Lembrando que todos os participantes da pesquisa terão a garantia da assistência imediata e integral durante a execução do estudo. Sendo assim, a pesquisadora irá garantir o direito do seu filho (a) à assistência imediata/ integral gratuita e indenização, em caso de qualquer dano/evento adverso decorrente direta ou indiretamente com a participação dele (dela) nesta pesquisa.

Consentimento da Participação na Pesquisa

Eu,..., inscrito(a) sob o RG.. / CPF.., abaixo assinado, após receber a explicação completa dos objetivos do estudo e dos procedimentos envolvidos nesta pesquisa concordo voluntariamente em consentir que .... participe do estudo intitulado “O desenvolvimento do pensamento algébrico, através da resolução de problemas, e suas contribuições para aprendizagem de equações do primeiro grau”. Informo ter mais de 18 anos de idade e destaco que a participação dele(a) nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pela pesquisadora responsável Wagna Mendes Vieira sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação do meu filho/a no estudo. Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Declaro, portanto, que concordo com a participação do meu filho/a no projeto de pesquisa acima descrito.

Rio Verde, _____ de __________ de 2018

____

Assinatura por extenso

Responsável legal por ____

Wagna Mendes Vieira

WAGNA MENDES VIEIRA

Pesquisadora Responsável pela a pesquisa

____

ANEXO B – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE

Você/Sr./Sra. está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada "**O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU**". Meu nome é **Wagna Mendes Vieira,** sou a pesquisadora responsável e minha área de atuação é Matemática. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence a pesquisadora responsável. Esclareço que em caso de recusa na participação, você não será penalizado(a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas *sobre a pesquisa* poderão ser esclarecidas pela pesquisadora, via e-mail (wagna_mendes@yahoo.com.br) e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do(s) seguinte(s) contato(s) telefônico(s): (64)9 9276-4665/(64) 3641-5534. Estou sendo orientada pelo professor Nilton Cézar Ferreira, em caso de dúvida podem entrar em contato com ele via e-mail (niltoncezar@gmail.com) e no seguinte contato (62) 99166-1713. Ao persistirem as dúvidas *sobre os seus direitos* como participante desta pesquisa, seus pais e responsáveis também poderá fazer contato com o **Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás/IFG, pelo telefone** (62) 3612-2237 e por e-mail: (cep@ifg.edu.br).

1 Informações Importantes sobre a Pesquisa:

1.4 Título, justificativa, objetivo

Esta pesquisa tem como título: **O desenvolvimento do pensamento algébrico, através da resolução de problemas, e suas contribuições para aprendizagem de equações do primeiro grau,** tem como objetivo promover o pensar algébrico de estudantes do sétimo ano do ensino fundamental II da Escola Municipal Antônio Gomes de Lima (Escola localizada: Rua 15, sem número, Bairro Promissão na cidade de Rio Verde, Goiás/Brasil.), e entender quais são as suas contribuições para o processo de ensino-aprendizagem de equações do primeiro grau.

1.2 Procedimentos utilizados da pesquisa ou descrição detalhada dos métodos.

Para iniciar a pesquisa ficarei na sala de aula com você e seus colegas por alguns dias, e, depois, ficarei mais alguns dias fazendo algumas tarefas envolvendo equações do primeiro grau, para que cada aluno possa adquirir o pensamento algébrico, sendo assim melhorando o ensino e aprendizagem deste conteúdo matemático.

Assim, para realizar a pesquisa você e seus colegas irão fazer algumas atividades de equações do primeiro grau, serão gravadas as aulas, assim vocês serão filmados.

Lembrando que você precisa deixar a pesquisadora usar sua voz, imagem ou opinião, seus registros, assim, peço que marque uma das opções:

( ) Permito a divulgação da minha imagem /voz/opinião e registro para a pesquisadora utilizar como resultados da pesquisa;

( ) Não permito a divulgação da minha imagem/voz/opinião e registro para a pesquisadora utilizar como resultado da pesquisa.

1.3 Especificação de possível *desconforto emocional* e/ou de possíveis *riscos psicossociais* bem como os benefícios acadêmicos e sociais decorrentes da participação do participante em sua pesquisa

Gostaria de explicar para você que durante a pesquisa poderá haver alguns riscos como: pode haver uma indisposição ou aborrecimento no momento do desenvolvimento da tarefa proposta; poderá ter quebra de sigilo, ou seja, pode ser que em algum momento posso contar sobre você para alguém, mas pode ficar tranquilo/a , o seu nome nunca será revelado, você poderá ficar aborrecido por não conseguir terminar alguma tarefa, e, assim, pode haver desânimo, mas tentarei te ajudar para que todos os desconfortos sejam minimizados pelos seguintes procedimentos: aplicação de questões sucintas e objetivas, que evitem o cansaço e desânimo, além disso, todas as anotações e gravações realizadas ficarão à disposição de seus pais e responsáveis, serão apresentadas para que você não desconfie ou se sinta incomodado pela pesquisadora; será evitada a quebra do sigilo, e para isso, você terá acesso a todas as maneiras de divulgação do trabalho e dos dados coletados.

Mas a pesquisa também tem os seus benefícios se você participar suas dificuldades relacionadas aos conteúdos de Matemática poderão ser supridas ou minimizadas; durante a pesquisa, você e seus colegas terão aulas alegres, usarão de sua criatividade, com relação as tarefas de Matemática, lembrando que todas as tarefas e tudo será feito para ajudar você e seus colegas a aprenderem Matemática em especial o conteúdo de equações do primeiro grau.

1.4 Informações sobre a forma de ressarcimento das despesas decorrentes da pesquisa

Para essa pesquisa, você, seus pais e responsáveis não terão nenhum gasto. Todo material a ser utilizado será de responsabilidade da pesquisadora.

1.5 Garantia da liberdade de participação

Esclareço que em algum momento você não quiser participar da pesquisa, não sofrerá nenhum tipo de penalidade. Inclusive você será livre para não responder a nenhuma questão que lhe cause *desconforto emocional* e/ou *constrangimento.* Você não será obrigado a fazer as tarefa o que foi proposto.

1.6 Apresentação dos resultados

Os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados em seminários, congressos e similares, entretanto, os dados/informações obtidos por meio da sua participação serão confidenciais e sigilosos, ou seja, o seu nome, a sua foto e a gravações com sua voz e imagem não serão expostos. A sua participação e a de seus colegas será voluntária, não havendo remuneração, ou seja, você não será pago para participar da pesquisa.

1.7 Garantia de pleitear indenização

Não está prevista indenização por sua participação, mas em qualquer momento se você sofrer algum dano, comprovadamente decorrente desta pesquisa, terá direito à indenização.

Assentimento da Participação na Pesquisa

Eu,..., inscrito(a) sob o RG/ CPF.., abaixo assinado, concordo em participar do estudo intitulado **"O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU".** Destaco que minha participação nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido (a) pela pesquisadora responsável **Wagna Mendes Vieira** sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação no estudo. Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Declaro, portanto, que concordo com a participação no projeto de pesquisa acima descrito.

Rio Verde, _____, de __________ de 2018

____

Assinatura por extenso do (a) participante

____

WAGNA MENDES VIEIRA

Pesquisadora Responsável pela pesquisa

ANEXO C - Aula de Observação

Coleta de dados e análise de evidências

Para iniciar a pesquisa será realizada um período de observação, no mês de agosto, no qual a pesquisadora terá um momento de interação com os alunos, e, durante todo o período do desenvolvimento da pesquisa, os alunos participarão e desenvolverão atividades relacionadas às equações do primeiro grau apresentadas pela pesquisadora. Temos como pressuposto que, num contexto de mediação e interação pedagógica intencional, os alunos podem elaborar estratégias de resolução de problemas em matemática sendo observando se cada aluno estar conseguindo adquirir o pensamento algébrico, bem como podem aprender noções de conceitos matemáticos.

Assim, para recolher informações que irão auxiliar na pesquisa, os alunos responderão a questões e serão videogravadas, audiogravadas e fotografadas as aulas que consistiram e na resolução dos problemas a serem resolvidos. Desde já afirmo que as gravações, fotos e falas não serão publicadas, serão utilizadas por mim para avaliação da metodologia utilizada.

No momento da aplicação das atividades, farei gravações das aulas que serão realizadas com objetivo de registrar fielmente as falas e ações dos participantes. Lembrando que, para os registros audiovisuais, é importante que haja o seu consentimento para o uso de voz, imagem e/ou opinião de seu filho(a), assim, peço que marque uma das opções:

( ) Permito a divulgação da imagem/voz/opinião do meu filho (a) ou da criança que está sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa;

( ) Não permito a publicação da imagem/voz/opinião do meu filho (a) ou da criança que está sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa.

Modelo do roteiro de observação

Local:

Telefone:

Pesquisadora:

Professora:

Horário Início:

Horário Término:

Turma:

- **Caracterização do(a) professor(a) da turma**: formação. Experiência profissional. Relacionamento com os alunos. Criatividade.

- **Planejamento**: Existe? Como ele é realizado, diariamente, semanalmente, anualmente? Em nível de unidade, municipal/secretaria de educação ou do(a) professor(a)?

- **Caracterização da turma**: Número de alunos, faixa etária, saúde, lazer, condições de moradia, constituição familiar, nível socioeconômico, número de irmãos, quantidade de componentes da família trabalham, nível de escolaridade da família. Obs.: fazer uma média desses dados.

- **Como está organizado e estruturado o espaço físico dos alunos na sala de aula**: Verificar quais são os materiais didático-pedagógicos existente para os alunos, TV, retroprojetor, tamanho da sala.

- **Alternativas**: Quais são as alternativas que os professores buscam para resolver as questões dos limites em relação a espaço físico, falta de material pedagógico e número excessivo de alunos?

- **Rotina**: Descrever todos os momentos de uma aula ou período de aula.

Peço que Instituto Federal de Goiás da cidade de Jataí (Instituição proponente) possa apoiar o desenvolvimento da referida pesquisa pela autorização da coleta de dados. Declaro ter o compromisso de pesquisadora responsável com o resguardo da segurança e bem-estar dos participantes de pesquisa nela recrutados.

Estou ciente que a execução deste projeto dependerá do parecer consubstanciado enviado pelo CEP/IFG mediante parecer "Aprovado". O país onde será realizada a pesquisa é o Brasil. Com CAAE: 91239118.3.0000.8082 e Número do Parecer: 2.813.943, aprovado em 10 de agosto de 2018.

Por ser verdade assino este documento.

Atenciosamente.

Jataí, Goiás, _____de _____________de 2018.

Wagna Mendes Vieira

WAGNA MENDES VIEIRA

Pesquisadora Responsável pela a pesquisa

ANEXO D - Atividades de fixação

ESCOLA: EMEF "ANTÔNIO GOMES DE LIMA – "*Toninho Guerra*"

DIRETORA:____

COORDENADORA:____

PROFESSOR(A):____

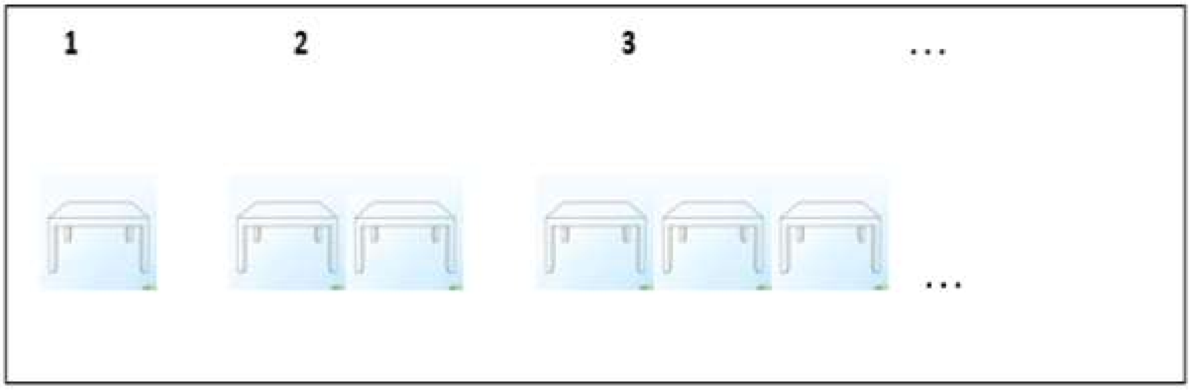
ALUNO(A):____

Série:7º Turma:"__"   Turno: ____________   Rio Verde Go:__/__/__

Atividade de fixação

1) O Gabriel trabalha numa Pizzaria. O chefe pediu-lhe que organizasse mesas para comer pizza com 16 pessoas. Gabriel começou a colocar as mesas quadradas e reparou que numa mesa poderiam estar sentadas 4 pessoas, enquanto que em duas ou três mesas, quando colocadas juntas, ficariam sentadas 6 ou 8 pessoas respectivamente.

Figura 1- Sequência de mesas



Fonte: Elaborado pela Autora

a) Quantas mesas precisa Gabriel para colocar para sentar as 16 pessoas?

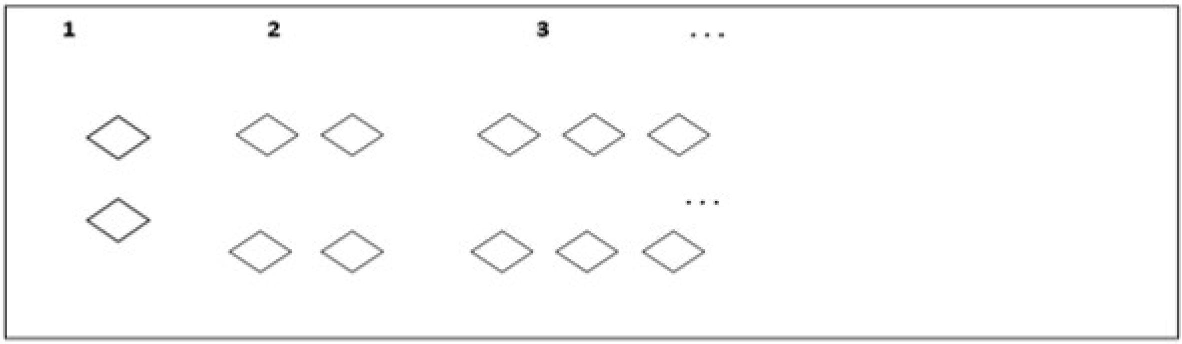
b) Juntando 14 mesas, quantas pessoas consegue Gabriel sentar?

c) Consegue ver alguma regularidade que ajude o Gabriel a descobrir as pessoas presentes numa festa em que formaram juntas 20 mesas? Considerando que todos os lugares estavam ocupados? Explique como pensou.

d) O patrão de Gabriel disse que estavam sentadas 31 pessoas no salão em que estavam organizadas 14 mesas. O Gabriel discordou imediatamente. Explique por que Gabriel discordou:

2) Observe a sequência da figura 2:

Figura 2 - Sequência de imagens



Fonte: Elaborado pela Autora

a) Qual a próxima imagem da sequência (imagem 4)? Desenhe.

b) E a seguinte (imagem 5)? Desenhe.

c) Observando a sequência, quantos losangos tem cada imagem?

d) Quantos losangos tem a 6ª imagem da sequência?

e) Que expressão algébrica pode ser escrita para representar a regra dessa sequência?

f)Usando a expressão algébrica que representa a regra da sequência, determine a quantidade de losangos da 9 ª, 22 ª e da 100 ª imagem da sequência.

3) Observe a sequência da tabela 1 construída por Robson :

Tabela 1 - Relação entre os termos da sequência

1º Termo	**2º Termo**	**3º Termo**	**. . .**
1	4	9	. . .

Fonte: Elaborado pela Autora

a) Como determinar o 4º termo da sequência de Robson?

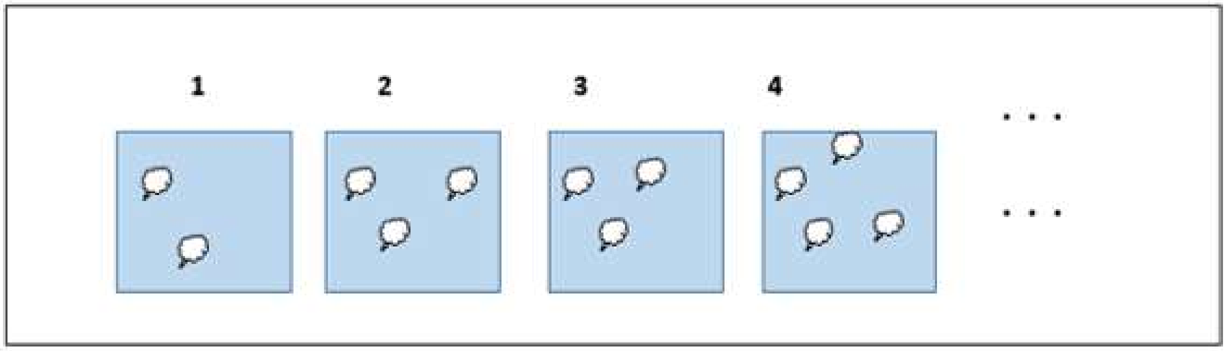
b) Como determinar o 5º termo da sequência de Robson?

c) Como determinar o 7º termo da sequência de Robson?

d) É possível escrever uma regra que permite você saber o 100º, 1000º da sequência de Robson? Explique como você pensou.

4) Observe a sequência das imagens de Jurema da figura 3:

Figura 3 - Sequência de imagens de nuvens



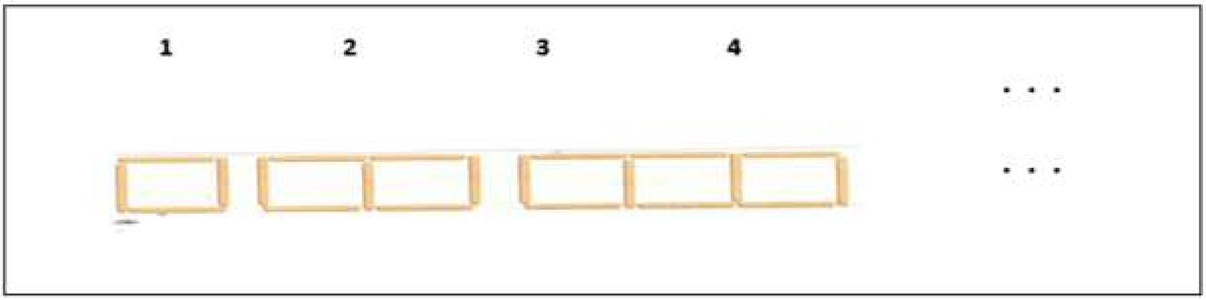
Fonte: Elaborado pela Autora

a) Como determinar a imagem 5 da sequência que Jurema construiu?
b) Como determinar imagem 8 da sequência que Jurema construiu?
c) Como determinar o imagem 10 da sequência que Jurema construiu?
d) É possível escrever uma regra (expressão) que permita você saber as imagens da sequência que Jurema construiu?
e) Utilizando regra (expressão) que você descobriu, encontre as imagem 55 e 999 da sequência que Jurema construiu?

5) Divino é um aluno muito estudioso e está fazendo o sétimo ano do ensino fundamental, e seu pai é jardineiro. Divino nos horários vago ajuda o seu pai na parte financeira dos lucros como jardineiro. O pai de Divino cobra 85,00 reais fixos mais 10,00 reais por horas trabalhadas.
a) Quantas reais o pai de Divino vai cobrar por um trabalho de 8 horas?
b) Quantas reais o pai de Divino vai cobrar por um trabalho de 6 horas?
c) Quantas reais o pai de Divino vai cobrar por um trabalho de 5 horas?
d) É possível escrever uma regra (expressão) que permita o pai de Divino receber por qualquer hora trabalhada?
e) Utilizando a regra (expressão) você encontrou na letra “d)”, calcule quanto o pai de Divino irá receber por 40 e 100 horas trabalhadas?

6) Observe a figura que está sendo formada com palitos de sorvete. Primeiro, formou-se um quadrado com 4 palitos de sorvete, depois, acrescentaram-se 3 palitos e formou-se mais um quadrado; a seguir com mais 3 palitos, formou-se mais um quadrado. E assim continuou a formação da figura:

Figura 4 - Sequência de imagens de quadrados



Fonte: Elaborado pela Autora

a) Continuando essa construção, quantos palitos serão necessários para formar 4 quadrados?

b) E para formar 5 quadrados?

c) E para formar 10 quadrados?

d) O número de palitos é igual ao número de quadrados?

e) É possível escrever a regra que permite você saber quantos palitos deve usar num desenho para qualquer quantidade de quadrados? Explique como você pensou.

7) Carolina, pense num número e adicione-lhe 6. Multipliquei o resultado por 3 e, por fim, subtraía o número em que tinha pensado. Obteve-se o valor 32.

a) O número em que Carolina pensou foi 1?

b) O número em que Carolina pensou foi 10?

c) O número em que Carolina pensou foi 15?

d) Qual o número em que Carolina pensou?

e) É possível escrever uma regra (expressão) que permita Carolina encontrar o número que pensou?

8) O João pensou num número e adicionou-lhe 6 unidades. Multiplicou o resultado por 3 e obteve 30.

a) O número em que João pensou foi 1?

b) O número em que João pensou foi 2?

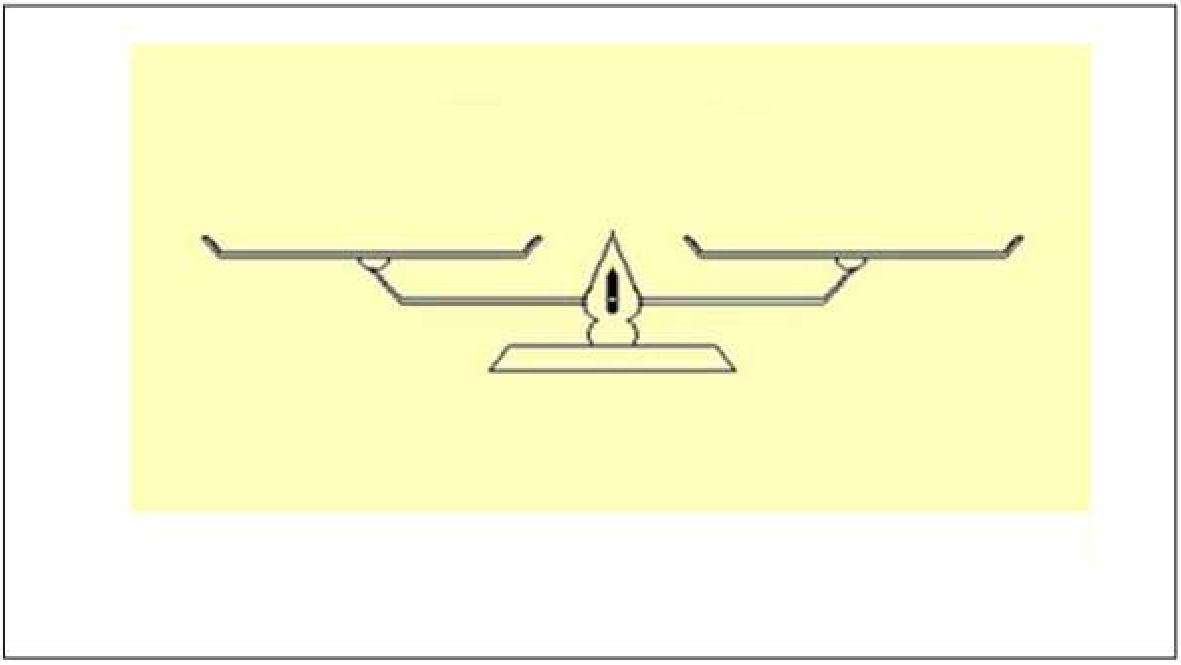
c) O número em que João pensou foi 3?

d) Qual foi o número em que o João pensou?

e) É possível escrever uma regra (expressão) que permita João encontrar o número que pensou?

9) A Graciele e a Graziela foram comprar bolos para uma festa. Decidiram comprar 2 bolos de chocolate, que a funcionária da Padaria pesou numa balança de pratos. Vamos considerar que os bolos de chocolate tem o mesmo peso. A funcionária colocou os 2 bolos no prato esquerdo da balança, e para que a balança ficasse em equilíbrio, colocou um peso de 700g no outro prato, como podem ver na figura 5:

Figura 5 - Balança



Fonte: Elaborado pela Autora

a) A grama de cada bolo de chocolate que Graciela e a Graziela foram comprar na padaria foram 200g?

b) A grama de cada bolo de chocolate que Graciela e a Graziela foram comprar na padaria foram 250g?

c) A grama de cada bolo de chocolate que Graciela e a Graziela foram comprar na padaria foram 300g?

d) Qual o peso de cada bolo de chocolate que Graciela e a Graziela foram comprar na padaria?

e) É possível escrever uma regra (expressão) que permitam Graciele e a Graziela encontrarem o peso de cada bolo?

10) Um tijolo pesa 1 kg mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo e meio? Desenhe as figuras em seu caderno e resolva o problema.

11) Ao adicionar quatro à minha idade, o resultado é igual a trinta menos a minha idade. Qual é a minha idade?

12) Simule uma situação-problema com sua idade e de seu colega utilizando equações do primeiro grau.

13) O que é uma equação do primeiro grau? Defina por escrito através da representação da balança de dois pratos.

14) O colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto foi para debaixo da cama. A esposa apanhou um sexto, e seu amado, um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descubra o número total de pérolas no colar?

15) Um terço, um quinto e um sexto de uma quantidade de lótus foram oferecidos, respectivamente, ao Lorde Siva, ao Lorde Visnu e ao Sol; e um quarto foi oferecido a Parvati. Os seis lótus que sobraram foram presenteados ao venerável preceptor. Diz depressa o número total de lótus.

16) Sandra tinha certa quantia em dinheiro, foi ao shopping e gastou 1/6 da quantia na compra de uma revista, gastou 1/2 da quantia na compra de um CD e ainda ficou com R$ 28,00. Qual era a quantia que Sandra possuía?

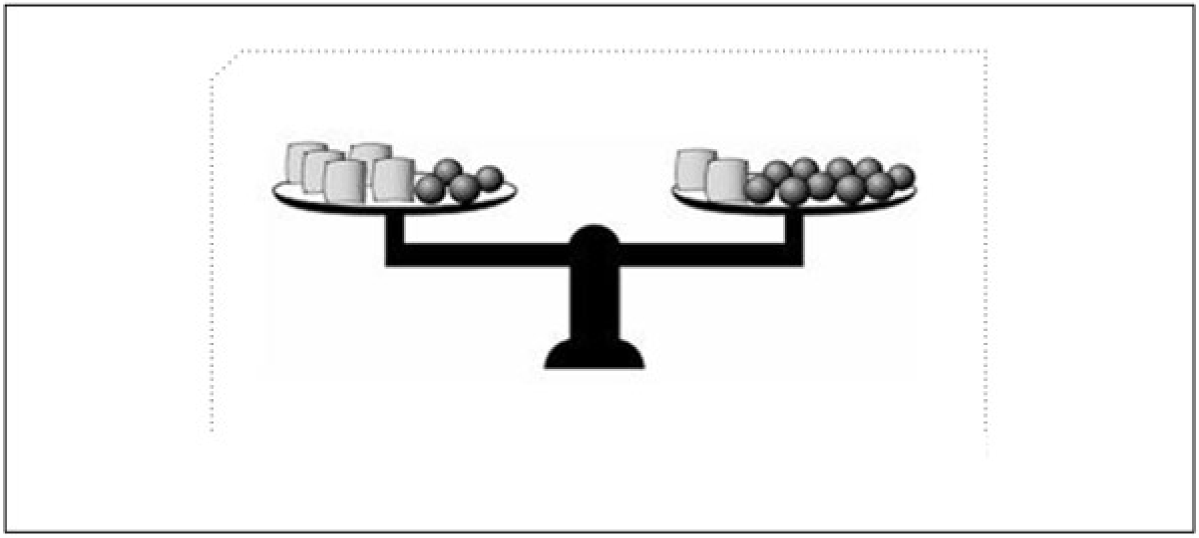
17) A soma de um número com o seu dobro é igual a 102. Qual é esse número?

18) O dobro de um número, diminuído de 22, é igual a esse número aumentado de 11. Qual é esse número? Utilize as equações do primeiro grau para resolver este problema.

19) Para garantir que havia espaço suficiente para todas as dez cadeiras de uma mesa de jantar, foi necessário que o fabricante acrescentasse três metros ao seu comprimento. Se o perímetro da parte de cima da mesa é de 14 metros, qual a largura e o comprimento da mesa? Você pode fazer um desenho plano da parte superior da mesa com as respectivas cadeiras?

20) A balança da figura 6 está em equilíbrio com bolas de gude e saquinhos de açúcar em cada um de seus pratos. As bolas são todas iguais e os saquinhos também. O peso de um saquinho de açúcar é igual ao peso de quantas bolas?

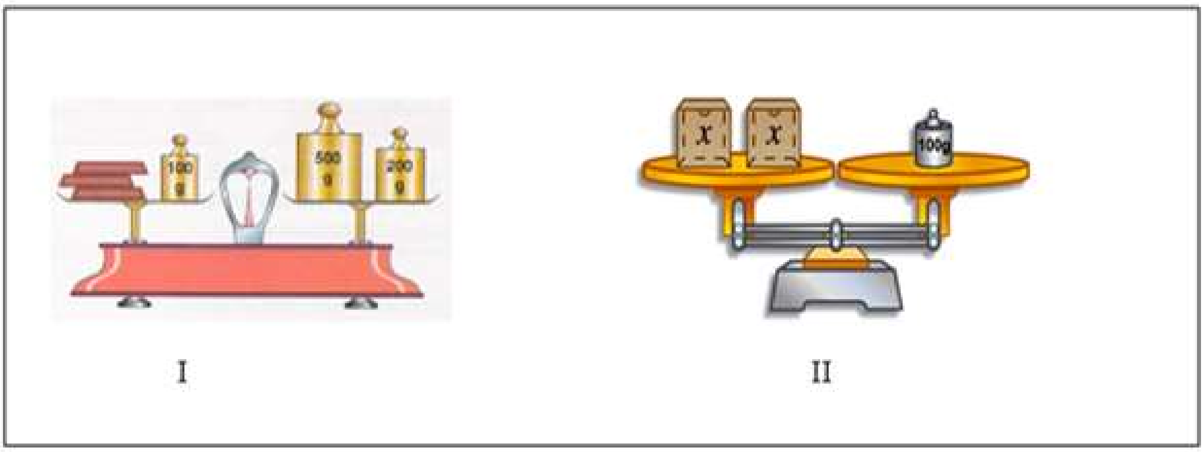
Figura 6 - Balança



Fonte: http://matheusmathica.blogspot.com, 2018.

21) Analisem as balanças a seguir na figura 8:

Figura 7 - Balança I e II



Fonte: Elaborado pela autora

a) Na balança I, qual deve ser a massa de cada barrinha colocada no lado esquerdo, para ficar em equilíbrio?

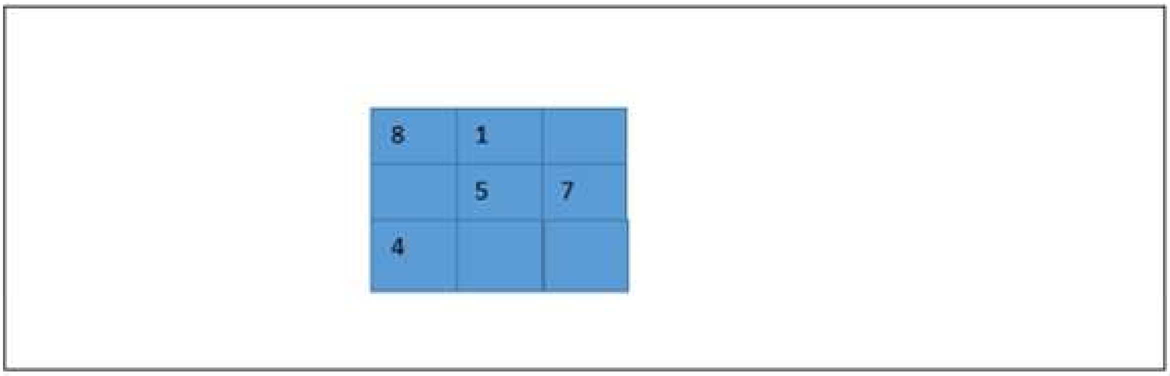
b) Na balança II, qual é a massa de cada bloquinho x?

c) O que acontece na balança I se acrescentar mais uma barra? Explique os eu raciocínio.

d) O que acontece na balança II se retirarmos uma barrinha com letra x?

22) Você já conhece o quadrado Mágico:

Figura 8 - Quadrado Mágico

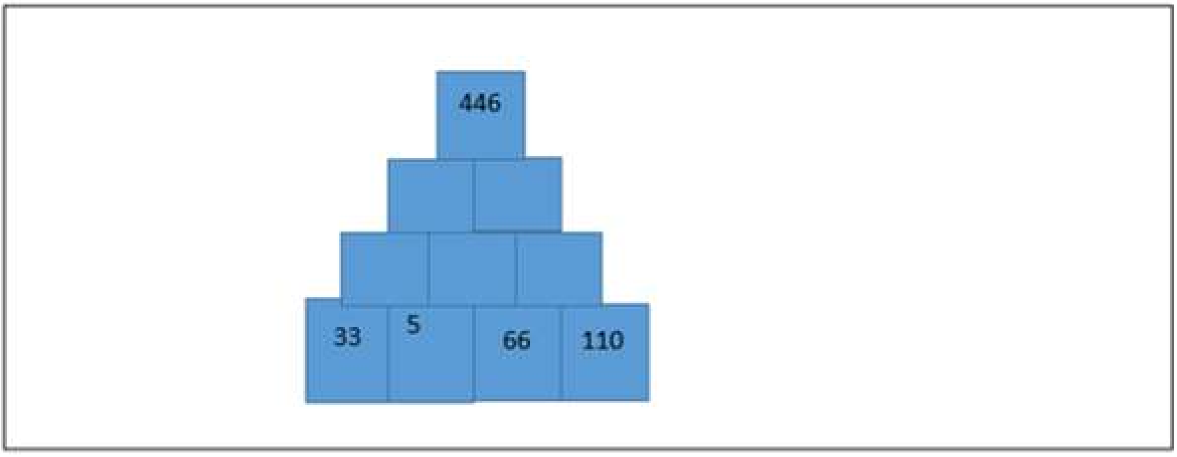


Fonte: Elaborado pela Autora

a) A soma dos três números nas direções indicadas tanto na horizontal como na vertical sempre é a mesma. A soma desse quadrado mágico é 15.

b) A figura 10 mostra a pilha de números:

Figura 9 - Pilha de números



Fonte: Elaborado pela Autora

A soma dos dois números vizinhos dá o número acima deles. Agora use a imaginação e descubra os valores que estão faltando no quadrado mágico e na pilha de números.

23) Um fabricante de móveis precisa aumentar a largura da mesa em 3 metros a mais que o comprimento. Se o perímetro da mesa é de 14 metros, qual é a largura e o comprimento da mesa? Você pode desenhar um diagrama seu plano de assento?

24) O jardineiro tem um espaço do jardim de tomates crescendo. Esse espaço tem o formato retangular e seu comprimento é mais que sua largura em 4 metros. Se o seu perímetro é de 32 metros, qual é a largura deste canteiro?

25) Blocos são comumente usados para construir as paredes das casas modernas, porque pode ser facilmente processado. Um bloco tem um perímetro de 120 cm. Se o comprimento de um bloco é duas vezes sua largura, quais são as dimensões de um bloco? Quantos blocos seriam necessários para construir um muro de 2,4 metros de altura e 8 metros de comprimento?

26) Enquanto Paulo, Daniel e seus colegas se encontram no salão para comer e para ouvir músicas juntos com seus professores. Paulo e seus colegas sentam-se em uma mesa retangular, longa para planejar suas aventuras. O comprimento de sua mesa é mais que a largura em 26 metros. Se o perímetro da mesa é de 60 metros, qual é o comprimento e a largura da mesa? Você pode desenhar um diagrama e a figura para representar a mesa?