

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS**

**CÂMPUS JATAÍ**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

**EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**LUCAS MENDONÇA PEREIRA CUNHA**

**AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL ALIADA À  
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA PARA O ENSINO DA  
ELIPSE NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO**

**JATAÍ**

**2023**

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO  
NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG**

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

**Identificação da Produção Técnico-Científica**

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> Tese                                      | <input type="checkbox"/> Artigo Científico              |
| <input checked="" type="checkbox"/> Dissertação                    | <input type="checkbox"/> Capítulo de Livro              |
| <input type="checkbox"/> Monografia – Especialização               | <input type="checkbox"/> Livro                          |
| <input type="checkbox"/> TCC - Graduação                           | <input type="checkbox"/> Trabalho Apresentado em Evento |
| <input type="checkbox"/> Produto Técnico/Tecnológico - Tipo: _____ |   |

Nome Completo do Autor: LUCAS MENDONÇA PEREIRA CUNHA

Matrícula: 20192020280227

Título do Trabalho: AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL ALIADA À INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA PARA O ENSINO DA ELIPSE NA 3 SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.

**Autorização - Marque uma das opções**

- Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
- Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_ (Embargo);
- Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

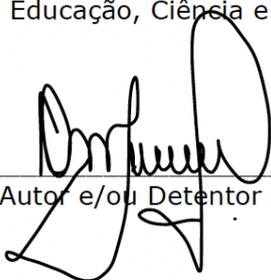
- O documento está sujeito a registro de patente.  
 O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.  
 Outra justificativa: \_\_\_\_\_

**DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA**

O/A referido/a autor/a declara que:

- o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Jataí, 28 de junho de 2023.

  
Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

**LUCAS MENDONÇA PEREIRA CUNHA**

**AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL ALIADA À  
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA PARA O ENSINO DA  
ELIPSE NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação para Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Linha de Pesquisa: Fundamentos, Metodologias e Recursos para a Educação de Ciências e Matemática

Sublinha de pesquisa: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz

**JATAÍ**

**2023**

Autorizo, para fins de estudo e pesquisa, a reprodução e a divulgação total ou parcial desta dissertação, em meio convencional ou eletrônico, desde que a fonte seja citada.

### **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)**

Cunha, Lucas Mendonça Pereira.

As contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvimental aliada à Investigação Matemática com o GeoGebra para o ensino da elipse na 3ª série do Ensino Médio [manuscrito] / Lucas Mendonça Pereira Cunha. -- 2023.

118 f.; il.

Orientador: Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.

Dissertação (Mestrado) – IFG – Câmpus Jataí, Programa de Pós – Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2023.

Bibliografias.

Apêndice.

1. Teoria do Ensino Desenvolvimental. 2. Investigação Matemática 3. GeoGebra. 4. Elipse. I. Vaz, Duelci Aparecido de Freitas. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título.



**INSTITUTO FEDERAL**  
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS  
CÂMPUS JATAÍ

**LUCAS MENDONÇA PEREIRA CUNHA**

**AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL PARA A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE ELIPSE NA 3 SÉRIE DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre(a) em Educação para Ciências e Matemática, defendida e aprovada, em 09 de fevereiro de 2023, pela banca examinadora constituída por: **Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz** - Presidente da banca / Orientador - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás; **Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca** - Membro Interno - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás e **Prof. Dr. Leonardo Antônio Souto** - Membro externo - Universidade Estadual de Goiás. A sessão de defesa foi devidamente registrada em ata que depois de assinada foi arquivada no dossiê do(a) aluno(a).

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz  
Presidente da Banca (Orientador - IFG)

(assinado eletronicamente)

Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca  
Membro Interno (IFG)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Leonardo Antônio Souto  
Membro Interno (UEG)

Documento assinado eletronicamente por:

- Leonardo Antonio Souto, Leonardo Antonio Souto - 234515 - Docente de ensino superior na área de pesquisa educacional - Ueg (0111258000171), em 28/02/2023 16:28:47.
- Regina Celia Bueno da Fonseca, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 26/02/2023 08:45:03.
- Duelci Aparecido de Freitas Vaz, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 08/02/2023 18:52:59.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 01/12/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 351381  
Código de Autenticação: 8a6fdff5f0



**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás**

Av. Presidente Juscelino Kubitschek, nº 775, Residencial Flamboyant, JATAÍ / GO, CEP 75804-714  
(64) 3632-8624 (ramal: 8624), (64) 3632-8610 (ramal: 8610)

## AGRADECIMENTOS

À Deus, primeiramente, que iluminou o meu caminho durante esta etapa.

À minha amada mãe, Hercília Cristina, pelo amor, confiança, amizade, suporte e inspiração.

À minha amada avó, Messias (in memorian), pelo exemplo de fé, inspiração e amor.

À minha família, em especial aos meus irmãos, Layana e Guilherme, aos meus sobrinhos João Pedro e Stella, ao meu avô Hercílio, ao meu padrasto Aelesson e meu cunhado Selatiel, pelo apoio e suporte.

Ao meu orientador, Professor Duelci, que nunca mediu esforços para me atender, me ajudar, me ensinar e me apoiar durante essa jornada. Agradecê-lo também pelo exemplo profissional.

À banca de avaliação, Regina Célia Bueno da Fonseca e Leonardo Antônio Souto, por aceitarem fazer parte desse momento tão importante. Em especial a Regina, que me acompanha desde os Projetos de Iniciação Científica na graduação, e que despertou em mim a importância das pesquisas matemáticas.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática – IFG - Jataí, que contribuíram muito com minha formação. Em especial aos professores: Duelci, Adelino, Nilton, Luciano, Joana e Vanderdeida.

Aos meus amigos Renato Câmara, Tatiana Moni e Phaulo Cruvinel, pelos momentos de descontração e parceria.

Por último, agradeço aos colegas do IFG - Câmpus Jataí, pela troca de experiências e companheirismo durante o curso, em especial, quero agradecer e homenagear minha amiga Taís Santos Neves Carvalho (in memorian) pelo companheirismo.

“O Senhor é o meu pastor e nada me faltará.”

Salmos 23:1

## RESUMO

Este trabalho teve como objetivo principal analisar as contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvimental e da Investigação Matemática com o GeoGebra no processo de ensino-aprendizagem da elipse na 3ª série do Ensino Médio. Buscando alcançar esse objetivo, foi elaborado um experimento didático-formativo com um problema gerador, baseado nos pressupostos do nosso referencial teórico. Esta pesquisa foi pautada nos pressupostos da abordagem qualitativa e da pesquisa-ação. A coleta de dados foi realizada durante a aplicação do experimento didático-formativo no Colégio Estadual Rafael Nascimento na cidade de Montividiu – GO, por meio da observação e registros do Professor-Pesquisador. De acordo com a análise dos dados, constatou-se que a pesquisa contribui para o desenvolvimento mental do aluno e consequentemente para o seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

**Palavras-chave:** Teoria do Ensino Desenvolvimental; Investigação Matemática; Geogebra; Elipse.

## ABSTRACT

The main objective of this work was to analyze the contributions of the Theory of Developmental Teaching and Mathematical Investigation with GeoGebra in the teaching-learning process of the ellipse in the 3rd year of High School. Seeking to reach this objective, a didactic-formative experiment was elaborated with a generator problem, based on the requests of our theoretical reference. This research was based on the assumptions of a qualitative approach and action research. Data collection was carried out during the application of the didactic-formative experiment at Colégio Estadual Rafael Nascimento of Montividiu – GO, through observation and records made by the Professor-Researcher. According to the data analysis, it was found that the Theory of Developmental Teaching and Mathematical Research with GeoGebra contribute to the student's mental development and consequently to their role in the teaching-learning process of Mathematics.

**Keywords:** Theory of Developmental Teaching; Mathematical Investigation; Geogebra; Ellipse.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Superfície cônica circular infinita formada por duas folhas .....	30
Figura 2 – Intersecções de um cone com um plano.....	31
Figura 3 – Construção da elipse utilizando um fio inextensível.....	31
Figura 4 – Simetria da elipse .....	32
Figura 5 – Centro de simetria da elipse .....	32
Figura 6 – Centro de simetria da elipse pelos vértices .....	33
Figura 7 – Vértices da elipse pertencentes à mediatriz do segmento focal .....	35
Figura 8 – Regiões determinadas pela elipse.....	35
Figura 9 – Reta tangente à elipse.....	36
Figura 10 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas.....	37
Figura 11 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas com focos no eixo $x$ . .....	38
Figura 12 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas com focos no eixo $y$ . .....	39
Figura 13 – Fachada do Colégio Estadual Rafael Nascimento. ....	53
Figura 14 – Interface do software GeoGebra .....	55
Figura 15 – Ferramenta mover do GeoGebra.....	56
Figura 16 – Ferramenta ponto do GeoGebra .....	56
Figura 17 – Ferramenta reta do GeoGebra .....	57
Figura 18 – Ferramenta reta perpendicular do GeoGebra .....	57
Figura 19 – Ferramenta polígono do GeoGebra.....	57
Figura 20 – Ferramenta círculo do GeoGebra .....	58
Figura 21 – Ferramenta cônicas do GeoGebra .....	58
Figura 22 – Ferramenta ângulo do GeoGebra .....	58
Figura 23 – Ferramenta reflexão do GeoGebra .....	59
Figura 24 – Ferramenta controle deslizante do GeoGebra. ....	59
Figura 25 – Ferramenta mover do GeoGebra.....	59
Figura 26 – Problema do jardineiro .....	60
Figura 27 – Resolução do problema gerador.....	61
Figura 28 – Desenvolvimento do experimento didático-formativo.....	63
Figura 29 – Ferramenta elipse do GeoGebra.....	63
Figura 30 – Ferramenta eixos e malhas do GeoGebra .....	65
Figura 31 – Criação de dois pontos no GeoGebra.....	65

Figura 32 – Construção da elipse no GeoGebra .....	65
Figura 33 – Ponto da elipse no GeoGebra .....	66
Figura 34 – Segmentos de reta na elipse .....	66
Figura 35 – Animando um ponto da elipse.....	67
Figura 36 – Soma dos comprimentos dos segmentos de reta .....	68
Figura 37 – Momento da construção dos elementos da elipse no GeoGebra.....	69
Figura 38 – Definição geométrica da elipse .....	70
Figura 39 – Elementos da elipse.....	70
Figura 40 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas com focos no eixo $x$ .....	72
Figura 41 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas com focos no eixo $y$ .....	73
Figura 42 – Ferramenta controle deslizante do GeoGebra .....	74
Figura 43 – Configuração do controle deslizante $a$ .....	74
Figura 44 – Controle deslizante $a$ .....	75
Figura 45 – Configuração do controle deslizante $b$ .....	75
Figura 46 – Controles deslizante $a$ e $b$ .....	76
Figura 47 – Equação da elipse no campo de entrada.....	76
Figura 48 – Elipse com eixo maior em $x$ .....	77
Figura 49 – Elipse com eixo maior em $y$ .....	77
Figura 50 – Equação dos focos.....	78
Figura 51 – Coordenadas dos focos $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ .....	78
Figura 52 – Excentricidade no campo de entrada.....	79
Figura 53 – Manuseio da distância focal.....	79
Figura 54 – Focos coincidentes .....	80

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Investigação Matemática em Sala de Aula.....	42
Quadro 2 – Elementos da elipse .....	71

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>18</b>
<b>2.1 Materialismo Histórico-Dialético .....</b>	<b>18</b>
<b>2.2 Teoria Histórico-Cultural .....</b>	<b>20</b>
<b>2.3 Teoria da Atividade.....</b>	<b>25</b>
<b>2.4 Teoria do Ensino Desenvolvimental.....</b>	<b>26</b>
<b>3 ESTUDO DA ELIPSE .....</b>	<b>29</b>
<b>3.1 História das Seções Cônicas.....</b>	<b>29</b>
<b>3.2 Tratamento Geométrico da Elipse .....</b>	<b>31</b>
<b>3.3 Tratamento Analítico da Elipse .....</b>	<b>36</b>
<b>4 GEOGEBRA .....</b>	<b>41</b>
<b>4.1 Investigação Matemática com o GeoGebra .....</b>	<b>41</b>
<b>5 METODOLOGIA.....</b>	<b>44</b>
<b>5.1 Característica da pesquisa .....</b>	<b>45</b>
<b>5.2 Experimento Didático-Formativo .....</b>	<b>47</b>
<b>5.2.1 Etapa da revisão da literatura e diagnóstico da realidade a ser estudada .....</b>	<b>50</b>
<b>5.2.2 Etapa da elaboração do experimento didático-formativo .....</b>	<b>51</b>
<b>5.2.3 Etapa da aplicação do experimento didático-formativo.....</b>	<b>52</b>
<b>5.2.4 Etapa da análise dos dados e elaboração do relatório do experimento.....</b>	<b>52</b>
<b>5.3 Características do local e do objeto de pesquisa.....</b>	<b>53</b>
<b>5.4 Produção de dados.....</b>	<b>54</b>
<b>6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO EXPERIMENTO DIDÁTICO-FORMATIVO .....</b>	<b>55</b>
<b>6.1 Primeiro encontro – Introdução ao software GeoGebra .....</b>	<b>55</b>
<b>6.2 Segundo encontro – Problema Gerador .....</b>	<b>60</b>
<b>6.3 Terceiro encontro – Construção da Elipse no GeoGebra.....</b>	<b>62</b>
<b>6.4 Quarto encontro – Elementos da Elipse no GeoGebra .....</b>	<b>69</b>
<b>6.5 Quinto encontro – Equação reduzida da elipse .....</b>	<b>73</b>
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>81</b>

<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>83</b>
<b>APÊNDICE .....</b>	<b>88</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A motivação para o desenvolvimento desta pesquisa surgiu dos resultados alcançados em pesquisas no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) e no Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia. Nesses trabalhos foram realizadas pesquisas bibliográficas em Geometria Analítica, com foco nas Seções Cônicas e suas aplicações em algumas áreas do conhecimento.

Nessas pesquisas foram analisadas as abordagens das Seções Cônicas na literatura de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral. Durante a análise da teoria, observamos que as seções cônicas são abordadas, majoritariamente, sob o enfoque das equações algébricas e verificamos como uma abordagem pautada no tratamento geométrico das cônicas poderia otimizar o estudo desses objetos matemáticos, articulando as linguagens algébrica e geométrica.

O interesse em pesquisar na área da Educação Matemática surgiu devido à busca em vincular matemática com a realidade dos alunos e sua relação com as diversas áreas do conhecimento, pois acredita-se que utilizar novas tendências e teorias pedagógicas podem proporcionar, ao aluno, o protagonismo no desenvolvimento de seu conhecimento, consequentemente, otimizar o processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Decidi escolher como tema, para esta pesquisa, o processo de ensino-aprendizagem da elipse baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental e na Investigação Matemática com o GeoGebra, haja visto que diversas pesquisas relacionam a Teoria do Ensino Desenvolvimental à Educação Matemática. Podemos ressaltar as pesquisas desenvolvidas no Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás e do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás que já relacionaram diversos objetos matemáticos com a Teoria do Ensino Desenvolvimental, como: geometria, funções, matrizes, determinantes, álgebra linear, entre outros.

Utilizamos, como referencial teórico para nossa pesquisa, a Teoria do Ensino Desenvolvimental e a Investigação Matemática com o GeoGebra. Visto que, ultimamente diversas pesquisas adotaram esses temas como metodologia de ensino de Matemática.

Para que nossa pesquisa se configurasse foi necessária a aplicação de um experimento didático-formativo na 3ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Rafael Nascimento, em Montividiu – GO. Aplicamos, nesse período, um experimento didático-formativo que fazia uso

da metodologia de Investigação Matemática com o GeoGebra e da Teoria do Ensino Desenvolvimental.

A teorização do Ensino Desenvolvimental possui convergências em relação a Investigação Matemática com o GeoGebra pois, ambas foram utilizadas em pesquisas que apontaram em seus resultados o desenvolvimental mental do aluno e o seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem de objetos matemáticos.

Diante do que foi exposto, procuramos responder a seguinte questão: Como a Investigação Matemática com o GeoGebra, baseada nos pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvimental, poderia contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da elipse, na 3ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Rafael Nascimento?

Diante disso, o principal objetivo desta proposta de pesquisa é analisar como a Investigação Matemática com o GeoGebra, baseada nos pressupostos do Ensino Desenvolvimental, poderia contribuir para o ensino da elipse na 3ª série do Ensino Médio, e conseqüentemente no desenvolvimento mental do aluno.

Para alcançarmos nosso objetivo, esta pesquisa foi pautada nos pressupostos da abordagem qualitativa e orientada na Teoria do Ensino Desenvolvimental. E, como resultado (produto educacional da nossa pesquisa) elaboramos um experimento didático-formativo, composto pela apresentação de uma análise crítica da nossa experiência; e, orientações para que outros professores possam relacionar a Teoria do Ensino Desenvolvimental e a Investigação Matemática com o GeoGebra, e colocar em prática essa forma de ensinar Matemática, enfatizando este trabalho como uma nova perspectiva de ensino de Matemática.

A pesquisa de Davydov (1930-1998), referente ao Ensino Desenvolvimental, tinha foco na atividade de estudo, tendo o conhecimento teórico como base. Essa teoria é um desdobramento da aplicação pedagógica da teoria histórico-cultural, “fundada por Vygotsky (1896-1934) e desenvolvida por Luria (1902-1977), Leontiev (1903-1979), Galperin, Elkonin (1904-1984), entre outros colaboradores” (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p.327).

Para Davydov, o estudo em ambientes escolares, se organizado, pode contribuir para o desenvolvimento mental da criança, sendo a formação de conceitos científicos uma etapa importante do processo de conhecimento, e o pensamento teórico, a etapa superior deste processo. E mais, fundamentado na teoria histórico-cultural de Vygotsky, elaborou o método do experimento didático-formativo com o objetivo de “investigar os processos de surgimento de novas formações mentais nos alunos durante a atividade de estudo” (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p.340).

Em termos de pesquisa educacional, os procedimentos de um experimento didático-formativo, de acordo com Oliveira (2010), assemelham-se aos de uma pesquisa-ação, pesquisa-intervenção ou pesquisa-participante. Nesse método de pesquisa, o “investigador ao mesmo tempo deixa fluir o desempenho do sujeito, sem aprisioná-lo numa situação experimental muito estruturada, e interfere com perguntas e propostas de tarefas para provocar comportamentos relevantes por parte do sujeito” (OLIVEIRA, 2010, p. 67).

Diante do que foi exposto, esta pesquisa foi estruturada em sete capítulos, apresentados a seguir. No capítulo 1, temos a presente introdução, que faz uma apresentação de todo o processo de investigação da pesquisa, da motivação da pesquisa e como o texto foi organizado. O capítulo 2 apresenta o referencial teórico dessa pesquisa, onde abordamos o Materialismo Histórico-Dialético (Marx e Engels), a Teoria Histórico-Cultural (Vygostky), a Teoria da Atividade (Leontiev) e o Ensino Desenvolvimental (Davydov). Já no capítulo 3, mostramos a história das seções cônicas e os tratamentos algébricos e geométricos da Elipse. No capítulo 4, apresentamos o software de Matemática Dinâmica GeoGebra e a Investigação Matemática com o Geogebra, no capítulo 5, destacamos os aspectos metodológicos desta pesquisa, por meio da caracterização da pesquisa, do local, os participantes, a teoria sobre o experimento didático-formativo e os instrumentos de coletas de dados. No capítulo 6, apresentamos a descrição, análise e resultados de cada etapa do experimento didático-formativo desenvolvido. E, no capítulo 7, apresentamos as considerações finais, momento em que retomamos as perguntas norteadoras para a apresentação dos resultados da pesquisa.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

Neste capítulo, apresentamos alguns fundamentos teóricos: o Materialismo Histórico-Dialético, a Teoria Histórico-Cultural, a Teoria da Atividade e por fim, apresentamos a Teoria do Ensino Desenvolvimental.

O materialismo histórico-dialético é uma teoria que surgiu a partir dos trabalhos de Karl Marx e Friedrich Engels, que buscavam explicar as relações sociais e a dinâmica do desenvolvimento histórico. Essa teoria afirma que as relações sociais, políticas e econômicas de uma sociedade são determinadas pelas condições materiais existentes naquele momento histórico.

A Teoria Histórico-Cultural é uma abordagem que se baseia nos estudos do psicólogo e pedagogo russo Lev Vygotsk e foi pautada nos pressupostos do materialismo histórico-dialético. Essa teoria afirma que o desenvolvimento humano é um processo histórico e culturalmente determinado, que ocorre através da interação entre o indivíduo e o meio social e cultural em que está inserido.

Já a Teoria da Atividade parte do pressuposto de que a atividade humana é o principal meio pelo qual o ser humano se relaciona com o mundo e transforma a realidade ao seu redor. A teoria da atividade entende que a atividade humana é sempre realizada em um contexto social, cultural e histórico, e que é influenciada por fatores externos, como normas, valores, hábitos e costumes

No Ensino Desenvolvimental a aprendizagem é um processo contínuo, que ocorre ao longo de toda a vida, e que está diretamente relacionado ao desenvolvimento humano. Dessa forma, o foco do ensino não está apenas no conteúdo a ser aprendido, mas também na forma como esse conteúdo é aprendido, tendo em vista a promoção do desenvolvimento integral do estudante.

Considerando que a Teoria do Ensino Desenvolvimental foi desenvolvida, em observância dos pressupostos da teoria histórico-cultural e sua matriz, o materialismo histórico-dialético, consideramos de suma importância apresentar, uma visão geral desses tópicos para fundamentação e elaboração da pesquisa.

### **2.1 Materialismo Histórico-Dialético**

A extensa e densa obra de Karl Marx (1818-1883) e Friederich Engels (1820-1895) concentra-se na pesquisa, análise e reflexão das relações econômicas, políticas e sociais em

busca do conhecimento e a história da humanidade. As análises realizadas por Marx e Engels sobre a sociedade, o capitalismo e as suas relações tiveram como base o materialismo, a história e a dialética.

José Paulo Netto (2002) assegura que a principal característica do materialismo histórico-dialético é a conexão entre três pilares fundamentais: o método dialético, que lhe permitiu compreender o movimento contraditório da realidade; a teoria do valor-trabalho, que lhe permitiu, na aplicação do método, compreender historicamente o funcionamento da sociedade capitalista, e a perspectiva da revolução, onde a classe operária vislumbrou sua independência. Esses pilares são subsidiados uns pelos outros. Segundo o autor, remover um desses pilares, é mutilar o método de Marx.

Para que possamos compreender o materialismo histórico-dialético é necessário recorrer à análise dos pilares fundamentais aplicados aos homens, a história e a sociedade, elaboradas por Marx e Engels ao apresentarem as conclusões a que chegaram e que serviram como base de suas pesquisas, resumidamente assim formuladas:

[...] os homens estabelecem relações determinadas, necessárias, independentes da sua vontade, relações de produção que correspondem a um determinado grau de desenvolvimento das forças produtivas materiais. O conjunto dessas relações de produção constitui a estrutura econômica da sociedade, a base concreta sobre a qual se eleva uma superestrutura jurídica e política e a qual correspondem determinadas formas de consciência social. O modo de produção da vida material condiciona o desenvolvimento da vida social, política em geral. Portanto, não é a consciência dos homens que determina o seu ser; é o ser social que, inversamente, determina a sua consciência (MARX, 2008, p. 46-47).

A estruturação do materialismo histórico-dialético só foi possível pela intensa atividade política da classe trabalhadora, principalmente pelo conhecimento histórico produzido até então. A história em seu movimento contraditório, ganhou protagonismo em suas análises por meio de uma perspectiva materialista e dialética. Assim, para Marx e Engels, a classe trabalhadora se destacava como sujeitos históricos da transformação social (PIRES, 1997).

Marx (1999) teve como base de seus estudos a produção para analisar o desenvolvimento do ser humano e a transformação da natureza através do trabalho. Para entendermos o materialismo histórico-dialético é necessário contextualizar a produção apresentada em sua obra. Ele não limitou esse conceito ao nível econômico, mas, através do entendimento do que seria a produção, explicou o desenvolvimento humano e a sua

humanização através do processo dialético entre natureza e sociedade, então, a produção explicita a formação ontológica e sociológica do ser humano.

Segundo Marx (2008), o desenvolvimento humano é realizado através da sua atividade, do seu trabalho, ao longo de trajetória ontológica:

Na produção social da própria existência, os homens entram em relações determinadas, necessárias, independentes de sua vontade; essas relações de produção correspondem a um grau determinado de desenvolvimento de suas forças produtivas materiais. A totalidade dessas relações de produção constitui a estrutura econômica da sociedade, a base real sobre a qual se eleva uma superestrutura jurídica e política e à qual correspondem formas sociais determinadas de consciência. O modo de produção da vida material condiciona o processo de vida social, política e intelectual. Não é a consciência dos homens que determina o seu ser; ao contrário, é o seu ser social que determina a sua consciência (MARX, 2008).

Portanto, é a dialética de Marx, construção lógica do método que fundamenta o pensamento marxista. Assim, o materialismo histórico-dialético é um método de interpretação da realidade, visão de mundo e práxis. Ele é caracterizado pelo movimento do pensamento pela materialidade histórica da vida dos homens em sociedade. Marx

[...] A investigação tem de apoderar-se da matéria, em seus pormenores, de analisar suas diferentes formas de desenvolvimento e de perquirir a conexão íntima que há entre elas. Só depois de concluído esse trabalho é que se pode descrever, adequadamente, o movimento real. Se isto se consegue, ficará espelhada no plano ideal a vida da realidade pesquisada, que pode dar a impressão de uma construção a priori. Meu método dialético, por seu fundamento, difere do método hegeliano, sendo a ele inteiramente oposto. Para Hegel, o processo do pensamento – que ele transforma em sujeito autônomo sob o nome de ideia – é o criador do real, e o real é apenas sua manifestação externa. Para mim, ao contrário, o ideal não é mais que o do que o material transposto para a cabeça do ser humano e por ela interpretado (MARX, 2019, p. 28).

Desse modo, considerar o materialismo histórico-dialético como instrumento teórico e metodológico para a interpretação da realidade, significa compreender esse processo de interpretação e análise que vai do empírico ao concreto pelo movimento do pensamento.

## **2.2 Teoria Histórico-Cultural**

A filosofia de Marx e Engels, ao inverter o modelo dialético hegeliano, definindo como causas do desenvolvimento histórico as condições materiais de existência e não mais as ideias, provocou uma reviravolta nas pesquisas antropológicas, abrindo espaço para o estudo dos

fenômenos psicológicos. Vygotsky, em suas pesquisas, procurava elaborar categorias e princípios para desenvolver uma teoria psicológica que abarcasse o psiquismo humano, fundamentando-se no materialismo histórico-dialético de Marx. Sendo assim, tinha como motivação em sua obra identificar o mecanismo do desenvolvimento de processos psicológicos no indivíduo por meio da experiência social e cultural (VYGOSTKY, 1988).

O materialismo histórico-dialético, entendido como método mais coerente de leitura da realidade em seu desenvolvimento histórico foi de suma importância para estabelecer um modelo científico de pesquisa dos fenômenos psíquicos. Vygotsky não tinha a intenção apenas de citar o marxismo em pesquisa, mas apropriar-se do método dele para avançar em profundidade teórica e prática de seus estudos.

A estruturação da psicologia marxista era vista por Vygotsky não como o nascimento de mais uma entre as correntes da psicologia, mas sim como o processo de construção de uma psicologia verdadeiramente científica. Ele entendia como necessária uma teoria que realizasse a mediação entre o materialismo histórico-dialético, enquanto filosofia e os estudos sobre os fenômenos psíquicos concretos. Portanto, o materialismo histórico-dialético permitiu a Vygotsky ir do abstrato para chegar ao ponto concreto na perspectiva da totalidade (GONZÁLEZ, 2012).

Desse modo, Vygotsky iniciou seus estudos para a elaboração da Teoria Histórico-Cultural ao desafiar as correntes psicológicas em vigor. A Teoria Histórico-Cultural foi criada pelo russo Lev Semyonovich Vygotsky (1896-1934), o qual teve Aleksandr Romanovitch Luria (1902-1977) e Aleksei Nikolaevitch (1903-1979) como parceiros de trabalho, com o objetivo de criar uma abordagem dos processos psicológicos humanos a partir do quadro teórico do materialismo histórico-dialético. Em contraposição a essas correntes, Vygotsky, ao explicitar a constituição histórico-social do desenvolvimento psicológico humano no processo de apropriação da cultura mediante a comunicação com outras pessoas, destacou que as características humanas não estão presentes desde o nascimento do indivíduo, mas resultam na interação dialética do homem com o seu meio histórico-cultural. Segundo Vygotsky (2001), o desenvolvimento cultural, o desenvolvimento histórico e o desenvolvimento social são as forças motrizes de todas as funções mentais humanas.

Para explicar o desenvolvimento da mente humana como construção sócio-histórica e cultural, Vygotsky buscou, no conceito de atividade, desenvolvido por Marx (1974), compreender as relações existentes entre o sujeito e o objeto e, identificar na ciência contemporânea pela lógica dialética. A atividade, cuja expressão maior é o trabalho, pode ser

destacada como a principal mediação nas relações que os homens estabelecem entre si com o mundo objetivo.

Assim, podemos concluir que, na relação mediada pelos instrumentos de trabalho e pela sociedade, os homens agem sobre a natureza, modificando-a e por ela sendo modificados. Nesse processo, o trabalho humano como atividade social e coletiva, que se realiza por meio da utilização de instrumentos com os quais os homens agem sobre a natureza, leva à modificação da atividade psíquica, a partir da atividade externa, que se transforma atividade da consciência. Logo, o desenvolvimento do pensamento, como conhecimento humano, ocorreu em união com o desenvolvimento da consciência social por meio da atividade da prática humana de transformação da natureza. Segundo Leontiev (2004, p.94), “a consciência é o reflexo da realidade, refratada através do prisma das significações e dos conceitos linguísticos, elaborados socialmente”.

Nesse processo dialético do desenvolvimento do psiquismo humano, em que a cultura é apropriada mediante a comunicação com outras pessoas, as funções psíquicas superiores nele envolvidas se efetivam primeiramente na atividade interpessoal que, por consequência, são internalizadas pela atividade individual, regulada pela consciência. Assim, as funções psicológicas superiores possuem origem sociocultural e afloram de processos psicológicos elementares, de origem biológica (TOSTA, 2012).

As funções biológicas não desaparecem com a emergência das culturas, mas adquirem uma nova forma de existência: elas são incorporadas na história humana. Afirmar que o desenvolvimento humano é cultural equivale, portanto a dizer que é histórico, ou seja, “traduz o longo processo de transformação que o homem opera na natureza e nele mesmo como parte dessa natureza” (PINO, 2000, p.51).

Vygotsky não nega a interferência dos processos psicológicos elementares, de origem biológica, no desenvolvimento das funções psicológicas superiores, mas afirma que o desenvolvimento humano é cultural. Assim, o desenvolvimento das funções superiores é histórico, que expressa o processo de transformação que o homem opera na natureza e nele mesmo como parte dessa natureza. Como ressalta:

Podem-se distinguir, dentro de um processo geral do desenvolvimento, duas qualitativamente diferentes de desenvolvimento, diferindo quanto à sua origem: de um lado, os processos elementares, que são de origem biológica; de outro, as funções psicológicas superiores, de origem sociocultural. A história do desenvolvimento das funções psicológicas superiores seria impossível sem um estudo de sua pré-história, de suas raízes biológicas, e de seu arranjo orgânico (VYGOTSKY, 1991, p.35).

Vygotsky (1988) considera o período da infância de suma importância para o estudo da psicologia, ele acredita que é na infância o momento de entender o desenvolvimento social. Ele entende que o desenvolvimento da criança depende de um processo de maturação do organismo. Segundo ele:

Desde os primeiros dias do desenvolvimento da criança, suas atividades adquirem um significado próprio num sistema de comportamento social e, sendo dirigidas a objetivos definidos, são refratadas através do ambiente da criança. O caminho do objeto até a criança e desta até o objeto passa através de outra pessoa. Essa estrutura humana complexa é o produto de um processo de desenvolvimento profundamente enraizado nas ligações entre história individual e história social (VYGOTSKY, 1981).

Assim, a linguagem é uma das primeiras ferramentas utilizadas pela criança, uma conquista extremamente importante para a criança, a utilização dessa ferramenta promove o indivíduo a buscar seus objetivos através de ferramentas auxiliares. O alcance desse conhecimento é realizado através do contato social. A partir do momento que a criança dialoga com indivíduos de diferentes mentalidades, mas de mesma cultura, processos mentais são desencadeados, ampliando o seu pensamento e a comunicação, através da linguagem. É por meio da palavra que surge o pensamento e que o homem pode comunicar-se, sendo uma palavra carregada de significado, o qual é uma função da linguagem e do pensamento (VYGOTSKY, 1991).

Segundo Rego (2007), Vygotsky concebe a conquista da linguagem como fator imprescindível no desenvolvimento do indivíduo. Durante o desenvolvimento do indivíduo a linguagem possui um papel de extrema importância no processo de aprendizado, pois que as formas avançadas de pensamento estão na cultura e são transmitidas através da linguagem oral. A autora também ressalta que é através do desenvolvimento da linguagem escrita e falada que o indivíduo adquire diversas maneiras de se relacionar com a sociedade.

O desenvolvimento humano tem dependência direta com o aprendizado determinado pelas relações culturais, então a aprendizagem é um movimento que antecede o desenvolvimento. Os estudos de Vygotsky mostram dois níveis de desenvolvimento: o nível de desenvolvimento real, constituído pelas funções mentais que se estabeleceram como resultados de ciclos de desenvolvimento já completados e o nível de desenvolvimento potencial, caracterizado pelas situações que podem ser apropriadas pelo indivíduo. A lacuna entre esses dois níveis é caracterizada como zona de desenvolvimento proximal, na qual estão

contempladas as funções mentais que ainda não amadureceram, mas que poderão amadurecer e se tornar o nível de desenvolvimento real. Então, “o nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente (VYGOTSKY, 1991, p. 58).

Diante disso, formar o conceito científico é o processo pelo qual a zona de desenvolvimento proximal deve passar para se tornar um nível de desenvolvimento real. Esse processo se inicia com a obtenção da relação universal, da essência desse conceito e é obtida pela análise do desenvolvimento histórico do objeto real que condiz com o conceito a ser formado. Cada objeto possui uma palavra que o denomina, sendo ela carregada de sentidos e significados que são historicamente construídos, então esses sentidos e significados se transformam com as variações culturais ao longo da história.

Para Vygotsky (2001, p. 400-401), “no curso do desenvolvimento histórico da palavra modificam-se tanto o conteúdo concreto da palavra quanto o próprio caráter da representação e da generalização da realizada na palavra”.

Nesse sentido, Vygotsky (1984, p.98 apud REGO, 2007, p.74) argumenta que a zona de desenvolvimento proximal hoje, será o de desenvolvimento real amanhã, pois “aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã”.

Assim, pensar o objeto de estudo é pensá-lo em seu desenvolvimento histórico, cerceado do contexto em que surgiu e se desenvolveu até chegar a nós como um produto da ciência que, cientificamente, está concluído, porém, está em constante processo de transformação por meio das abstrações e generalizações subjetivas do indivíduo, mediadas por seus instrumentos que estimulam o desenvolvimento.

Vygotsky (1988) objetivou desenvolver um método para compreender a natureza do ser humano pelo seu contexto histórico. Seu fundamento é que o ser humano pode interiorizar seus momentos vividos e isso se transforma em mudanças qualitativas e quantitativas psicologicamente, mostrando que o meio cultural do indivíduo, o psicológico e o biológico são interiorizadas e se transformam em processos superiores e insere o indivíduo no contexto social. Desse modo, ao elaborar uma teoria que compreende a natureza do comportamento humano como parte do desenvolvimento histórico, Vygotsky ofereceu expressivas contribuições para o cenário pedagógico no sentido de transpor a visão mecanizada de ensino, aprendizagem e desenvolvimento, dando alternativas para formação científica no plano pedagógico.

Diante disso, Vygotsky entende como essencial um ensino voltado para a compreensão e o entendimento, já que o indivíduo só desenvolve porque aprende, então ele só terá

oportunidade de se desenvolver socialmente, culturalmente e historicamente através da inserção em um ambiente de aprendizagem.

A escola desempenhará bem seu papel, na medida em que, partindo daquilo que a criança já sabe (o conhecimento que ela traz de seu cotidiano, suas ideias a respeito dos objetos, fatos e fenômenos, suas “teorias” acerca do que observa no mundo), ela for capaz de ampliar e desafiar a construção de novos conhecimentos, na linguagem vygotskyana, incidir na zona de desenvolvimento potencial dos educandos. Desta forma poderá estimular processos internos que acabarão por se efetivar, passando a constituir a base que possibilitará novas aprendizagens (REGO, 2007).

O ambiente escolar deve ser propício para a transição dos conceitos espontâneos para os conceitos científicos, proporcionando o protagonismo do desenvolvimento ao aluno, através da mediação do professor. Vygotsky ressalta em sua obra a importância do ambiente escolar para a assimilação de conceitos, principalmente os científicos, através de atividade de investigação.

### **2.3 Teoria da Atividade**

Tendo como referencial teórico e metodológico o materialismo histórico-dialético, Leontiev utilizou, assim como Marx (1989) a atividade vital humana – o trabalho – como a base para o estudo da sociedade e das relações sociais entre os homens.

Em sua principal obra sobre atividade, Leontiev constitui a atividade como a unidade molecular da vida humana que tem por objetivo orientar o sujeito no mundo objetivo:

A atividade é uma unidade molecular, não uma unidade aditiva da vida do sujeito corporal, material. Em um sentido mais estrito, quer dizer, a nível psicológico, é a unidade da vida mediada pelo reflexo psicológico, cuja função real consiste em que orienta ao sujeito no mundo objetivo. Em outras palavras, a atividade não é uma reação nem um conjunto de reações, mas um sistema que tem estrutura, suas transições e transformações internas, seu desenvolvimento (LEONTIEV, 1978, p. 66-67).

Leontiev, ao destacar uma síntese dessa relação entre sociedade, trabalho e natureza, escreve:

O trabalho se efetua em condições de atividade comum coletiva, de modo que o homem, no seio deste processo, não entre apenas numa relação determinada com a natureza, mas com outros homens, membros de uma dada sociedade. É apenas por intermédio desta

relação a outros homens que o homem se encontra em relação com a natureza (LEONTIEV, 2004, p.80).

Leontiev define a atividade como o processo produtor, mediado pelo reflexivo psíquico da realidade, responsável por concretizar as relações de caráter objetivo/subjetivo do homem com o mundo e com o gênero humano e satisfazer suas necessidades, promovendo, assim, seu desenvolvimento integral e garantindo a produção e reprodução de sua vida material (LEONTIEV,1978).

A Teoria da Atividade considera o outro como participante ativo no desenvolvimento do sujeito, também aportada nos princípios do materialismo histórico-dialético. Para Marx, o ser humano é resultado de um “[...] entrelaçamento do aspecto individual, no sentido biológico, social e no sentido cultural” (MORETTI; ASBAHR; RIGON, 2011, p. 478).

A atividade só existe por meio de ações, que podem fazer parte de distintas atividades e uma mesma atividade pode gerar distintas ações.

Os elementos estruturantes da atividade são: necessidade, motivo, ação e operação. O motivo é regido por uma necessidade, que mobiliza as ações, as quais estão subordinadas a objetivos e dependem das condições para a sua realização por meio das operações, que nada mais são que os modos de realização da ação. (MORAES; MOURA, 2009, p. 108).

Desse modo, é necessário estruturar o ensino de forma em que os conhecimentos elaborados historicamente pela humanidade possam ser apropriados por seus alunos. Além deste conhecimento específico, a criança deve estar em um espaço propício à assimilação de outras características como: reflexão, criticidade, criatividade e cooperação.

## **2.4 Teoria Histórico Cultural**

Vasili Vasilievich Davydov (1930-1988) foi membro da Academia de Ciências Pedagógicas, doutor em Psicologia, professor universitário e integrou conceitos dos psicólogos russos que desenvolveram pesquisas iniciadas por Vygotsky. Para o autor:

[...] a tarefa da escola contemporânea não consiste em dar às crianças uma soma de fatos conhecidos, mas em ensiná-las a orientar-se independentemente na informação científica e em qualquer outra. Isto significa que a escola deve ensinar os alunos a pensar, quer dizer, desenvolver ativamente neles os fundamentos do pensamento contemporâneo para o qual é necessário organizar um ensino que impulse o desenvolvimento. Chamemos esse ensino de desenvolvimental (DAVYDOV, 1988, p. 3).

A partir das obras do grupo de estudos de Vygotsky, dedicou-se a estruturação teórica da atividade de estudo, propondo um modo organizacional do ensino específico para o desenvolvimento intelectual do aluno. Neste modo, o conteúdo da atividade de estudo é o pensamento teórico. Libâneo (2008, p. 61) esclarece que o pensamento teórico ou conceito:

[...] não se refere apenas às características e propriedades dos fenômenos em estudo, mas a uma ação mental peculiar pela qual se efetua uma reflexão sobre um objeto que, ao mesmo tempo, é um meio de reconstrução mental desse objeto no pensamento.

Nesse sentido, pensar teoricamente é desenvolver processos mentais pelos quais chegamos aos conceitos e os transformamos em ferramentas para fazer generalizações conceituais e aplicá-las a problemas específicos.

Assim, o planejamento do ensino tem como objetivo a assimilação, pelos alunos, do processo investigativo utilizado para a criação dos conceitos, incorporados através dos processos histórico e cultural de sua produção. Desse modo, mediante a aprendizagem de conceitos teóricos, tomados pelas capacidades humanas formadas historicamente na cultura material e social, os alunos interiorizam ações mentais de abstração e generalização relacionados ao objeto de estudo. Para Davydov (1988), o objetivo principal da atividade de ensino é o pensamento teórico, sendo que é por meio de sua aquisição que se estrutura o pensamento através da formação de conceitos e, por consequência, o desenvolvimento psíquico da criança.

A dinâmica deste processo envolve a formação de conceitos teóricos para além dos conceitos empíricos, cuja peculiaridade consiste em promover, por meio do ensino, o desenvolvimento do pensamento dos alunos, introduzindo-os no domínio do caráter abstrato e generalizante dos saberes, de modo que aprendem formando abstrações, generalizações e conceitos, que constituem a base do processo de desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

Assim como Vygotsky, Davydov compreende que as especificidades humanas não são dadas biologicamente, mas pela relação simbólica do indivíduo com a cultura a qual está inserido. Assim, a atividade de ensino pode proporcionar a formação humana promovendo a compreensão e o conhecimento dos objetos culturais em suas relações de significação.

Então, a atividade de aprendizagem escolar da criança é relacionada à metodologia de ensino do conhecimento científico, com o percurso do abstrato ao concreto. Segundo Davydov

(1988), o conhecimento científico deve ser apresentado ao aluno na atividade de estudo de forma a permiti-lo atingir o conhecimento teórico abstrato, expondo esse conhecimento de forma que o escolar, através da atividade, consiga compreender as especificidades do objeto em estudo. O autor ressalta:

Embora o pensamento das crianças tenha alguns traços em comum com o pensamento dos cientistas, artistas, filósofos da moral e teóricos do direito, os dois não são idênticos. As crianças em idade escolar não criam conceitos, imagens, valores e normas de moralidade social, mas apropriam-se deles no processo da atividade de aprendizagem. Mas, ao realizar esta atividade, as crianças executam ações mentais semelhantes às ações pelas quais estes produtos da cultura espiritual foram historicamente construídos. Em sua atividade de aprendizagem, as crianças reproduzem o processo real pelo qual os indivíduos vêm criando conceitos, imagens, valores e normas. Portanto, o ensino de todas as matérias na escola deve ser estruturado de modo que, como escreveu Ilenkov, “seja reproduzido, de forma condensada e abreviada, o processo histórico real da gênese e desenvolvimento do conhecimento”. (DAVYDOV, 1988, p. 95).

Tendo como orientação uma teoria para o desenvolvimento da criança em idade escolar, Davydov colocou como questão principal o desenvolvimento de novas formações mentais na criança através da atividade de estudo, utilizando o conceito da zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky.

Como explicam Libâneo e Freitas (2013), o principal desafio para Davydov era buscar uma metodologia de ensino que promovesse o avanço da zona de desenvolvimento proximal das crianças, considerando que o ensino eficiente é aquele que se adianta ao desenvolvimento, sendo improdutivo o conhecimento de níveis já atingidos.

### 3 ESTUDO DA ELIPSE

Neste capítulo apresentamos a história das cônicas e os tratamentos algébrico e geométrico da elipse. Na atividade de ensino, o lógico-histórico tem como principal objetivo auxiliar o pensamento, tanto do professor, quanto dos alunos, a movimentarem-se no sentido de buscar verdades que são relativas, porque são definidas e redefinidas, continuamente, a partir das especificidades de cada conceito.

#### 3.1 História das Seções Cônicas

O estudo das seções cônicas e das suas propriedades geométricas começou na Grécia, como parte da busca pela solução do problema da duplicação do cubo. Menaecmo (350 a. C.) resolveu o problema por meio das seções de um cone reto de revolução por planos perpendiculares a alguma das geratrizes, Menaecmo tornou-se então, como afirma uma carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu Euergeta, o descobridor das seções cônicas (CUNHA, 2019).

As seções cônicas são curvas com formas geométricas denominadas por elipse, parábola e hipérbole, obtidas a partir da intersecção de um cone de duas folhas e um plano com inclinação variada. Tais curvas possuem propriedades de reflexão e rotação que as fazem importantes em várias aplicações, como em órbitas ou trajetórias de corpos celestes com base nas Leis de Newton e Leis de Kepler (WATARI, 2003; BOCCALETTI; PUCACCO, 1996).

No início do período Alexandrino, o matemático grego Apolônio de Perga (262 a.C.) produziu um trabalho de oito volumes sobre as propriedades geométricas das curvas cônicas. No fim do período Alexandrino, Hipácia (370 d.C.) escreveu um livro chamado “As Cônicas de Apolônio” (DEAKIN, 1994; KATZ, 1993).

Apolônio, na sua monumental obra *As Cônicas*, composta de oito livros dos quais apenas o último se perdeu, que desenvolveu generalizações, aplicou novos métodos, descobriu e provou teoremas e praticamente exauriu as conclusões puramente geométricas envolvidas nas seções cônicas, façanha pela qual ficou conhecido na sua época como “O Grande Geômetra”.

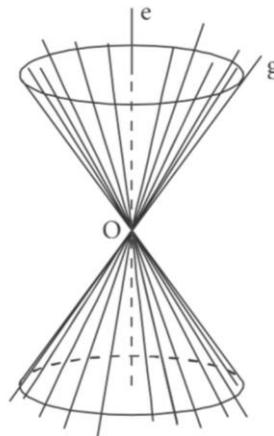
Entre as façanhas de Apolônio está a de ter descoberto a possibilidade de se obter as cônicas a partir de qualquer seção em qualquer cone, mesmo oblíquo, partindo de um cone de diâmetro geral e seção também geral. Para tanto, foi preciso admitir o cone circular duplo, ligado pelo vértice, e as duas folhas da hipérbole como uma única curva.

No início do século XVII, os matemáticos Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) desempenharam um papel proeminente no desenvolvimento do Cálculo, aliando os

conhecimentos da Álgebra aos estudos das curvas geométricas, pois foi possível fazer qualquer representação geométrica por meio de pares ordenados e na forma de suas equações conhecidas atualmente (LARSON; HOSTETLER; EDWARDS, 1998).

Sejam duas retas  $e$  e  $g$  concorrentes em  $O$  e não perpendiculares. Se a reta  $e$  for fixa e a reta  $g$  for girada em torno de  $e$  mantendo constante o ângulo entre as retas, a reta  $g$  formará uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice  $O$ , como mostra a Figura 1 (WINTERLE, 2014).

**Figura 1 – Superfície cônica circular infinita formada por duas folhas.**

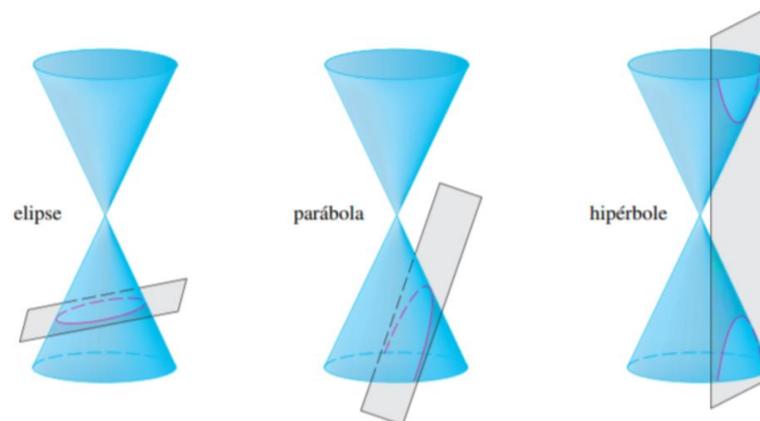


Fonte: (WINTERLE, 2014).

As retas  $g$  e  $e$  são denominadas, geratriz e eixo da superfície cônica, respectivamente. Chama-se seção cônica, ou simplesmente cônica, o conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica, como ilustra a figura 2. Quando uma superfície cônica é seccionada por um plano qualquer que não passa pelo vértice  $O$ , a cônica será (STEWART, 2013):

- uma parábola, se o plano for paralelo a uma geratriz da superfície;
- uma elipse, se o plano não for paralelo a uma geratriz e interceptar apenas uma das folhas da superfície;
- uma hipérbole, se o plano não for paralelo a uma geratriz e interceptar as duas folhas da superfície.

**Figura 2 – Intersecções de um cone com um plano.**



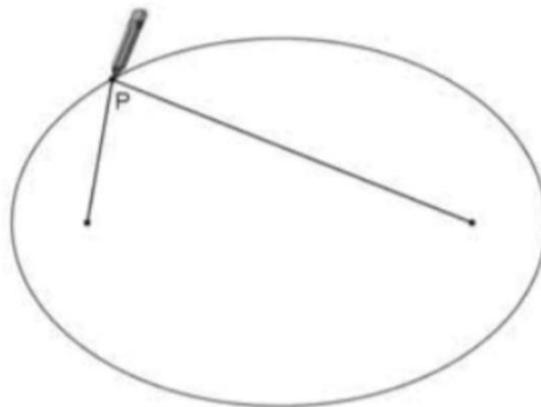
Fonte: (STEWART, 2013)

### 3.2 Tratamento geométrico da elipse

**Definição:** Elipse é o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois pontos distintos fixados é igual a uma constante, maior que a distância entre esses pontos (LOPES; SEIXAS, 2011).

Geometricamente podem os construir uma elipse utilizando um fio inextensível, uma folha de papel, um lápis e dois suportes (pregos). Utilizando o fio de comprimento  $2a$ , prendemos suas extremidades sobre a folha de papel em dois pontos distintos,  $F1$  e  $F2$ , tal que  $d(F1, F2) = 2c < 2a$ . Ao deslizar o lápis na folha, mantendo o fio sempre esticado, a curva resultante será uma elipse de eixo maior  $2a$ , segmento focal  $2c$  e excentricidade  $e = \frac{c}{a}$  (LOPES; SEIXAS, 2011), e conforme mostra a Figura 3.

**Figura 3 – Construção da elipse utilizando um fio inextensível.**

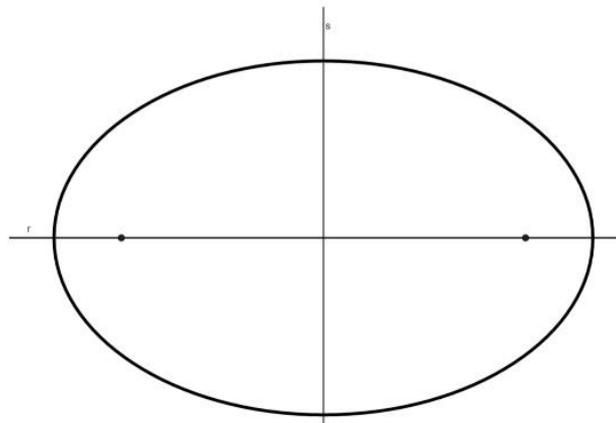


Fonte: Lopes e Seixas (2011).

A curva obtida satisfaz a definição, pois a soma das distâncias de  $P$  aos dois pontos fixados é igual ao comprimento do fio, que é um valor constante e maior que a distância entre os pontos dados. Os dois pontos fixados são denominados **focos** da elipse e o segmento determinado por eles é denominado de **segmento focal**.

**Propriedade (Eixos de simetria da Elipse):** Toda elipse admite dois eixos de simetria: a reta suporte do segmento focal e a mediatriz do segmento, (SATO, 2004), como ilustra a Figura 4.

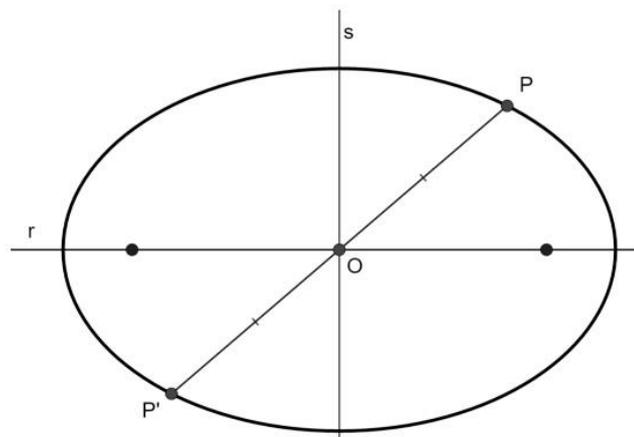
**Figura 4 – Simetria da elipse.**



Fonte: CUNHA; FONSECA (2019).

O **centro de simetria** de uma elipse é um ponto  $O$  determinado pela interseção de seus eixos de simetria.

**Figura 5 – Centro de simetria da elipse.**

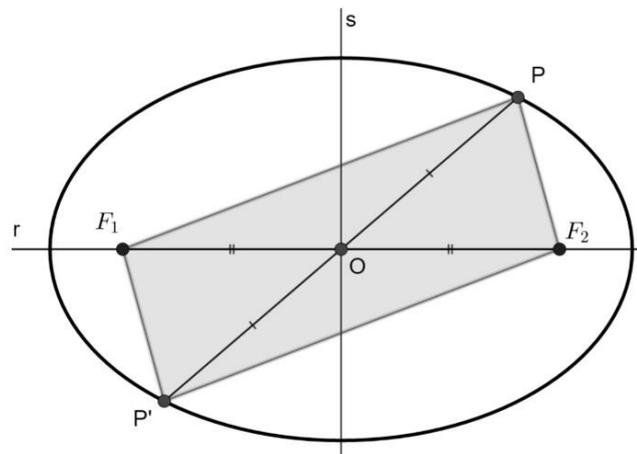


Fonte: CUNHA; FONSECA (2019).

**Propriedade:** Toda reta que passa por  $O$  intercepta a elipse num ponto  $P$  e no seu simétrico  $P'$  em relação a  $O$ , tal que  $O$  é o ponto médio de  $PP'$ , como mostra a Figura 5 (LOPES; SEIXAS, 2011).

Seja  $P$  um ponto qualquer da elipse e  $P'$  o seu simétrico em relação ao centro  $O$  dessa curva. Então,  $O$  é simultaneamente ponto médio de  $PP'$  e de  $F_1F_2$ . Assim, o quadrilátero  $PF_1P'F_2$  é um paralelogramo, pois suas diagonais se interceptam em seus pontos médios, como mostra a Figura 6 (LOPES; SEIXAS, 2011).

**Figura 6 – Centro de simetria da elipse pelos vértices**



Fonte: CUNHA; FONSECA (2019).

Com base na construção da elipse e de suas propriedades de simetria é possível estabelecer alguns de seus elementos. Assim, os quatro pontos de interseção da elipse com seus eixos de simetria são denominados vértices. Os segmentos determinados pelo par de vértices não consecutivos, possuem comprimentos diferentes. Eles podem ser classificados em eixo maior e eixo menor da elipse conforme será mostrado a seguir (STEWART, 2013; WINTERLE, 2014).

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  vértices da elipse sobre o eixo de simetria que contém os focos  $F_1$  e  $F_2$  e  $a =$  constante, tal que  $PF_1 + PF_2 = 2a$ , como mostra a Figura 15. Como  $A_1$  pertence à elipse, tem-se que:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a.$$

Por outro lado, os pares  $A_1, A_2$  e  $F_1, F_2$  são simétricos em relação à origem. Então,

$$A_1O = A_2O \text{ e } F_1O = F_2O,$$

e como,  $A_1F_1 = A_1O - F_1O$  e  $A_2F_2 = A_2O - F_2O$ , vamos usar  $A_1F_1 = A_2F_2$ , e substituir na equação tendo-se:

$$A_2F_2 + A_1F_2 = 2a.$$

Logo,  $A_1A_2 = 2a$ . O segmento que contém os dois vértices da elipse e que passa pelos focos tem comprimento igual a  $2a$ .

Sejam  $B_1$  e  $B_2$  os vértices que estão sobre a reta  $s$ . Como  $s$  é mediatriz do segmento  $F_1F_2$ , tem-se que:

$$B_1F_1 = B_1F_2.$$

Como  $B_1$  pertence à elipse, tem-se

$$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a.$$

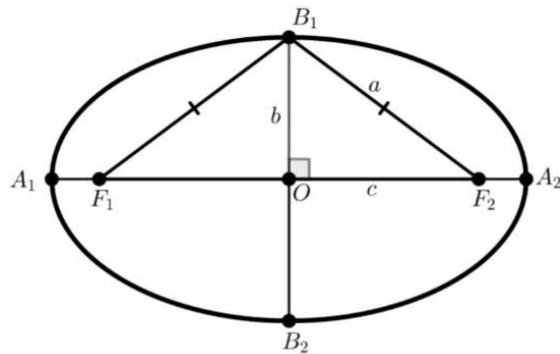
Igualando as equações, conclui-se que:

$$B_1F_1 = a \text{ e } B_1F_2 = a.$$

Conforme a figura 7, o triângulo é retângulo com hipotenusa de comprimento  $a$ . E como  $OB_1 = b$  e  $OF_2 = c$ , então pelo Teorema de Pitágoras tem-se, então,  $a > b$ .

Logo,  $A_1A_2 > B_1B_2$ . O eixo  $A_1A_2$  será denominado eixo maior da elipse e  $B_1B_2$  o eixo menor (LIMA, 2014).

**Figura 7 – Vértices da elipse pertencentes à mediatriz do segmento focal.**



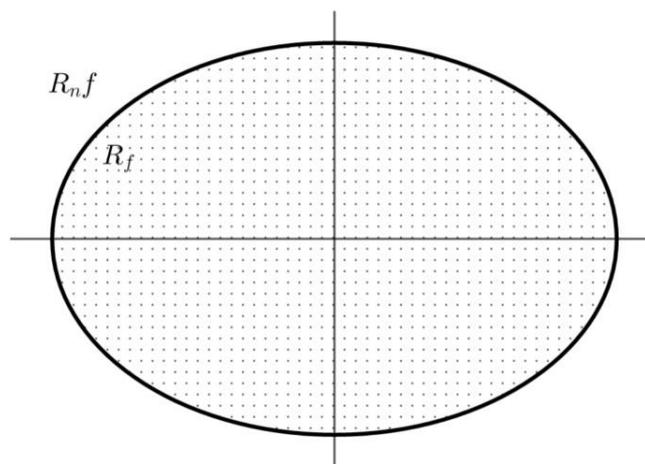
Fonte: CUNHA; FONSECA (2019).

Considerando  $F_1$  e  $F_2$  os focos da elipse e  $2a$  um valor real positivo maior que o comprimento do segmento  $F_1F_2$ , sabe-se que se  $P$  pertencer à elipse, então,  $PF_1 + PF_2 = 2a$ . Diante disso, a elipse delimita os pontos do plano em **duas regiões**,  $R_f$  e  $R_{nf}$ :

1. Região focal ( $R_f$ ) onde cada ponto  $P$  satisfaz  $PF_1 + PF_2 < 2a$ ,
2. Região não focal ( $R_{nf}$ ) onde cada ponto  $P$  satisfaz  $PF_1 + PF_2 > a$ .

A Figura 8 ilustra essas duas regiões ( $R_f$  e  $R_{nf}$ ).

**Figura 8 – Regiões determinadas pela elipse.**



Fonte: CUNHA (2019).

**Propriedade:** A reta tangente  $t$  à elipse num ponto  $P$  forma ângulos iguais com os segmentos do ponto  $P$  aos focos, ou seja, com  $PF_1$  e  $PF_2$  (SATO, 2004).

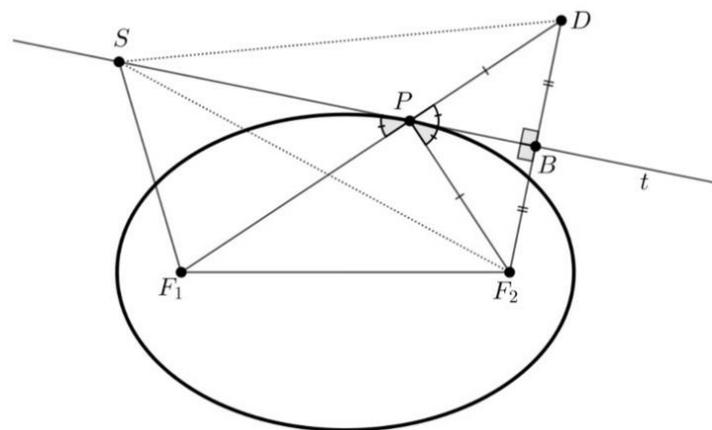
Considere os ângulos  $SP\hat{F}_1$  e  $SP\hat{F}_2$  os ângulos determinados pela reta  $t$  com os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$ , respectivamente.

No triângulo  $\Delta PF_2D$ , a reta  $t$  é mediatriz do lado  $F_2D$  no ponto  $B$  e passa pelo vértice  $P$ . Então, a altura  $PB$  do triângulo  $\Delta PF_2D$  é bissetriz do ângulo  $F_2P\hat{D}$ .

Logo, os ângulos  $BP\hat{D}$  e  $F_1P\hat{S}$  são opostos pelo vértice, prova-se que  $F_1P\hat{S} = F_2P\hat{B}$ .

A Figura 9 mostra a descrição geométrica dessa propriedade.

**Figura 9 – Reta tangente à elipse.**



Fonte: CUNHA (2019).

**Propriedade:** A reta normal a um ponto  $P$  da elipse é bissetriz do ângulo  $F_1P\hat{F}_2$  (LOPES; SEIXAS, 2011).

Esse resultado é consequência da propriedade anterior. De fato, como a tangente no ponto  $P$  da elipse forma ângulos congruentes com os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$ , a reta normal que passa por  $P$  divide o ângulo  $F_1P\hat{F}_2$  em dois ângulos da mesma medida.

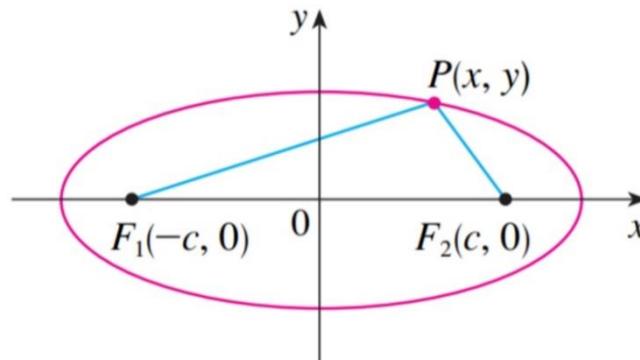
### 3.3 Tratamento analítico da elipse

**Definição:** Sejam  $F_1$  e  $F_2$  pontos distintos no plano  $\pi$ ,  $2c > 0$  a distância entre eles. Seja  $a$  um número real tal que  $a > c$ . O lugar geométrico  $\varepsilon$  determinado pelos pontos  $P$  de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  tais que  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$  denomina-se elipse, onde  $d$  representa distância euclidiana entre os pontos do plano.

Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são chamados de focos da elipse. O segmento  $F_1F_2$  é chamado de segmento focal e seu ponto médio de centro da elipse. O valor  $2c$  é chamado distância focal (STEWART, 2013).

A equação reduzida da elipse  $\varepsilon$  será deduzida sobre um sistema ortogonal de coordenadas onde os focos,  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , pertençam ao eixo  $Ox$ , de modo que a origem  $O$  esteja no ponto médio do segmento focal, para simplificar os cálculos, como mostra a Figura 10 (STEWART, 2013).

**Figura 10 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas.**



Fonte: (STEWART, 2013)

Seja a soma das distâncias de um ponto na elipse até os focos,  $2a > 0$ . Então,  $P(x, y)$  é um ponto na elipse quando:

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

isto é,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação e simplificando, temos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Elevando ao quadrado e simplificando novamente:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Do triângulo  $F_1F_2P$ , da Figura 18, temos que  $2c < 2a$ , assim,  $c < a$  e, portanto,  $a^2 - c^2 > 0$ . Seja  $b^2 = a^2 - c^2$ . Então, a equação da elipse torna-se

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Se ambos os membros da equação forem divididos por  $a^2b^2$ , temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

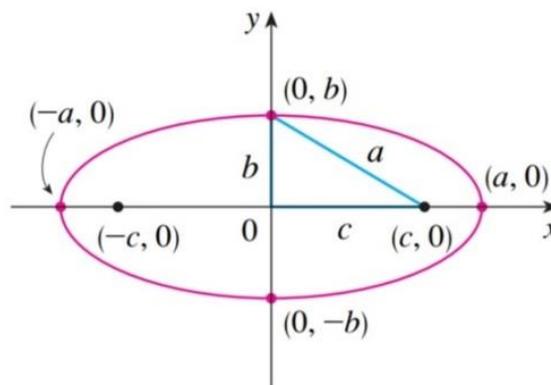
Como  $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ , segue que  $b < a$ . As interseções com o eixo  $Ox$  são encontradas fazendo  $y = 0$ .

Então  $x^2 = a^2$ , assim  $x = \pm a$ . Os pontos  $(a, 0)$  e  $(-a, 0)$  são chamados vértices da elipse, e o segmento de reta que une os vértices é chamado **eixo maior**.

Para encontrar as interseções com o eixo  $Oy$  basta fazer  $x = 0$  para obter  $y^2 = b^2$ , ou seja,  $y = \pm b$ .

O segmento de reta unindo os pontos  $(0, b)$  e  $(0, -b)$  é o **eixo menor**, (STEWART, 2013; LIMA, 2014; WINTERLE, 2014), conforme a Figura 11.

**Figura 11 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas com focos no eixo  $x$ .**



Fonte: (STEWART, 2013)

A elipse da Figura 11 é dada pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0,$$

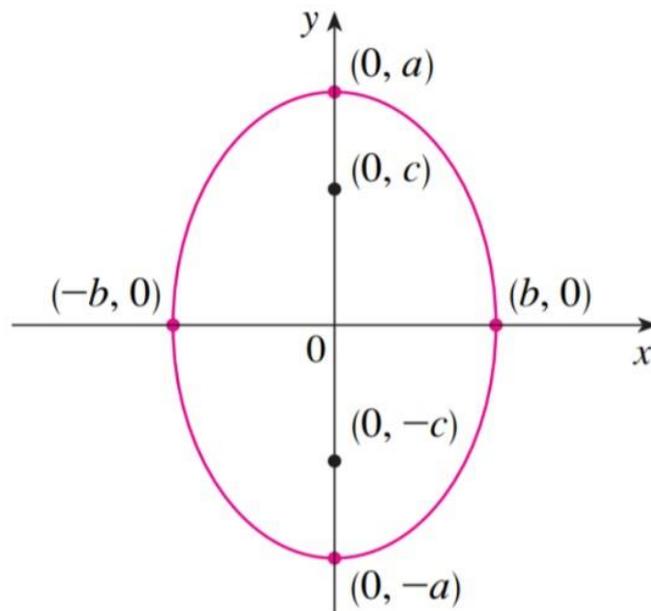
com focos  $(\pm c, 0)$ , onde  $c^2 = a^2 - b^2$  e vértices  $(\pm a, 0)$ .

Se os focos de uma elipse estiverem localizados no eixo  $Oy$  em  $(0, \pm c)$ , conforme a Figura 12. Então, a equação da elipse será:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a \geq b > 0,$$

com focos  $(0, \pm c)$ , onde  $c^2 = a^2 - b^2$  e vértices  $(0, \pm a)$ .

**Figura 12 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas com focos no eixo  $y$ .**



Fonte: (STEWART, 2013)

Se  $P(x, y)$  é solução da equação, os pontos  $(-x, -y)$ ,  $(x, -y)$  e  $(-x, y)$  também serão, pois os expoentes dessa equação são pares.

Então, para todo  $P(x, y)$  da elipse, seus simétricos em relação a  $O$ ,  $Ox$  e a  $Oy$  pertencerão a esta curva. Logo, a elipse é simétrica em relação à reta focal  $Ox$ , à mediatriz do segmento focal  $Oy$  e ao centro  $O$ .

Se os focos forem pontos coincidentes, então  $c = 0$ , portanto,  $a = b$  e a elipse torna-se um círculo de raio  $r = a = b$  (STEWART, 2013).

Diante do que foi exposto, é importante ressaltar diversas pesquisas se dedicaram ao tratamento analítico das Seções Cônicas, outras, partiram da premissa do tratamento geométrico, assim concluímos que o tratamento geométrico é de suma importância no estudo das aplicações dessas curvas, pois possibilita a determinação da relação entre os elementos fundamentais das cônicas, a análise dos resultados pertinentes à reta tangente e a análise das propriedades de simetria. Além disso, é possível perceber que o tratamento analítico das cônicas validam os resultados obtidos no tratamento geométrico.

## 4 GEOGEBRA

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única aplicação.

A palavra GeoGebra tem como origem as palavras álgebra e geométrica, o software foi desenvolvido na linguagem Java. Ele foi criado em 2001 a partir da tese de doutorado de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. O GeoGebra recebeu diversos prêmios educacionais na Europa e nos Estados Unidos, e foi instalado em milhões de computadores em vários países ao redor do mundo (O GEOGEBRA, 2021).

Como sua principal característica, destacamos a propriedade de colocar os objetos matemáticos em movimento, evidenciando a Geometria Dinâmica, que é caracterizada pela integração entre os tratamentos algébricos e geométricos dos objetos matemáticos.

Por essa dinamicidade, esse software de matemática dinâmica+ pode ser utilizado sob várias perspectivas no ensino de Matemática. No Brasil, diversas pesquisas utilizaram o software em seu desenvolvimento. Há, também, diversos Institutos GeoGebra, que desenvolvem estudos e pesquisas com o objetivo otimizar a utilização da tecnologia no ensino de Matemática.

### 4.1 Investigação Matemática com o GeoGebra

A investigação matemática em sala de aula não pode ser considerada como uma solução de todos os problemas relacionadas ao ensino de Matemática. Porém, segundo Ponte et. Al. (2013), ela pode trazer grandes contribuições para o processo de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, os autores explicam que:

Em numerosas experiências já empreendidas com o trabalho investigativo, os alunos têm mostrado realizar aprendizagens e desenvolver entusiasmo pela matemática. Apesar disso, não encaramos as investigações matemáticas como a chave que permite por si só resolver todos os problemas do ensino da matemática. Há muitas outras atividades a realizar na sala de aula. (PONTE et al, 2013, p.10)

Como toda ferramenta didático-pedagógica, a investigação matemática em sala de aula, pode ser utilizada em diversos vieses, o que demanda aprofundamento teórico para que as atividades de investigação atinjam o objetivo pedagógico. Como esteio de nossa pesquisa o Ensino Desenvolvimental e a Investigação Matemática com o GeoGebra, buscamos relacionar

essas teorias para que o protagonismo da construção do conhecimento matemático seja do aluno.

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informações sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar fazendo erros e aprendendo com eles. (BRAUMANN, 2002, p. 5 apud PONTE et al 2013, p. 19).

Para Ponte et al (2013, p. 21), a investigação matemática apresenta quatro momentos que apresentamos a seguir:

**Quadro 1 – Investigação Matemática em sala de aula**

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Reconhecer uma situação problema</i></li> <li>• <i>Explorar a situação problemática</i></li> <li>• <i>Formular questões</i></li> </ul>
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Organizar dados</i></li> <li>• <i>Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre conjecturas)</i></li> </ul>
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Realizar testes</i></li> <li>• <i>Refinar uma conjectura</i></li> </ul>
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Justificar uma conjectura</i></li> <li>• <i>Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio</i></li> </ul>

Fonte: Ponte et al (2013).

O primeiro momento, exploração e formulação, é dedicado a operação de conhecimento da situação a ser investigada, bem como a formulação dessa situação em forma de questão. Já na conjectura, segundo momento, os dados são devidamente organizados, e as hipóteses são apresentadas. No terceiro momento, testes e reformulação, são testadas as possíveis soluções do problema. Ou, dependendo da situação, a solução é reformulada e submetida a novos testes. Por último, no momento da justificação e avaliação, são realizadas a

argumentação, a demonstração e a avaliação de todo o processo e ferramentas utilizadas para a resolução do problema.

Destacados esses momentos da investigação matemática em sala de aula, Vaz (2012) acrescentou a utilização do software de matemática dinâmica GeoGebra nessa importante ferramenta didático-pedagógica, criando a Investigação Matemática com o GeoGebra.

Assim, a importância do software no processo de investigação é evidenciada na reprodução dos objetos matemáticos abstratos em uma situação concreta que reproduza o seu núcleo, possibilitando ao aluno a compreensão e reconstrução desses objetos abstratamente. Consequentemente, proporcionando ao aluno a integração entre os tratamentos algébricos e geométricos dos objetos matemáticos, na mesma tela, tornando possível a compreensão desses objetos em todas as suas dimensões.

Vaz (2012) ressalta que a possibilidade de movimentar os objetos matemáticos através do GeoGebra é de suma importância para as atividades investigativas, já que a propriedade de algum objeto ou teorema pode não representar um objeto estático. Nada obstante, essas funcionalidades sejam importantes, essa dinamicidade proporcionada pelo software não é suficiente para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática, sendo de suma importância que os alunos pensem também, sob a perspectiva da Matemática como ciência. Logo, ele destaca a necessidade de buscar fundamentos matemáticos definitivos e, respeitando o nível cognitivo do aluno, conduzi-lo a outro, como abordado na Teoria Histórico-Cultural.

A proposta de Vaz (2012) de Investigação Matemática com o GeoGebra adaptada da proposta de Ponte et. Al. (2013) apresenta quatro etapas: experimentação; conjecturas; formalização; generalização.

A primeira etapa, a experimentação, é dedicada a utilização do software para trabalhar atividades que permitam ao aluno a movimentação dos objetos matemáticos para que a comparação entre os tratamentos algébricos e geométricos possa ser evidenciado através de propriedades e definições. Já na segunda etapa, a fase das conjecturas, as relações obtidas da experimentação são utilizadas para relacionar os resultados gerais para continuação da atividade investigativa. Na terceira etapa, a formalização, são realizadas as demonstrações matemáticas ou uma contraposição da conjectura levantada, nos dois casos levando em consideração o rigor matemático. Por último, depois de experimentar, conjecturar e formalizar o saber matemático é de extrema importância tentar generalizar esses resultados, isto é, investigar outras situações para exploração dos resultados obtidos.

## 5 METODOLOGIA

Neste capítulo descrevemos os aspectos metodológicos desta pesquisa. Serão apresentados o tipo de pesquisa, a caracterização da população estudada e a descrição do experimento didático-formativo.

A pesquisa consistiu em um experimento didático formativo. Segundo Davydov (1988), o método de intervenção didática é considerado a forma mais eficiente de intervenção nos processos mentais dos alunos. Por ser um método de pesquisa, ele se baseia na organização e na reorganização dos programas de ensino e dos procedimentos necessários para concretizá-los, utilizando procedimentos que formam ativamente nos alunos um novo nível de desenvolvimento das capacidades mentais (DAVYDOV, 1988).

Assim, Freitas (2007), ao explicar que o experimento didático-formativo é uma investigação que resulta em conhecimento sobre as mudanças no sujeito durante o processo de ensino-aprendizagem, explica:

A investigação resulta em um conhecimento que busca explicar o objeto estudado (funções psicológicas), buscando também resultar em mudança qualitativa no sujeito investigado. No experimento didático, o que se busca é a explicação histórica das mudanças qualitativas no pensamento do sujeito, mudanças estas que são investigadas como uma cadeia complexa de processos inseparáveis de aprendizado, decorrentes da realização de uma tarefa proposta no experimento e contida no modo como este se encontra organizado. A tarefa proposta e os passos da tarefa estão ancorados em um determinado conceito científico a ser aprendido. A organização desses passos está ancorada em princípios teóricos da teoria histórico-cultural e da teoria do ensino desenvolvimental. Esses passos, ao serem cumpridos pelos sujeitos participantes exigem determinado movimento do pensamento, movimento este que pode resultar em mudanças na sua qualidade em relação ao conteúdo da tarefa, ou seja, o conceito científico. Em outras palavras: no decorrer do experimento acontece aquisição de atos mentais, atos esses que contribuem para reorganizar o pensamento, as operações mentais realizadas pelo sujeito. (FREITAS, 2007, p. 11)

Assim, nesta pesquisa, o experimento didático-formativo é concebido como um procedimento investigativo que permite a análise da aprendizagem do conceito de Elipse, ressaltando a relação entre a organização do ensino fundamentado nos pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvimental e da Investigação Matemática com o GeoGebra, de modo que os conhecimentos apropriados sejam mediadores de ações mentais, que resultam em mudanças nas funções cognitivas.

## 5.1 Características da pesquisa

Caracterizamos nossa pesquisa como qualitativa, pois ela permitirá uma relação e uma interação entre o pesquisador e os pesquisados. De fato, “uma pesquisa qualitativa considera a existência de uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito” (KAUARK et al, 2010, p. 26).

Para Triviños (2009), a pesquisa qualitativa tem como objetivo estudar o fenômeno dentro do seu contexto, explicar suas características e sua origem e, junto com o pesquisador, pretende produzir dados.

[...] o pesquisador qualitativo considera a participação do sujeito como um dos elementos de seu fazer científico apoia-se em técnicas e métodos que reúnem características *sui generis*, que ressaltam sua implicação e da pessoa que fornece as informações. Mas nesse sentido, talvez sejam a entrevista semiestruturada, a entrevista aberta ou livre, o questionário aberto, a observação livre, o método clínico e o método da análise do conteúdo os instrumentos mais decisivos para estudar os processos e produtos nos quais está interessado o investigador qualitativo (TRIVIÑOS, 2009, p. 138).

A característica fundamental de uma abordagem qualitativa é a flexibilidade que permite que as respostas dos sujeitos se baseiem em suas próprias perspectivas e não em intervenções moldadas e elaboradas, levando sempre em consideração que muito pouco se sabe sobre os sujeitos e ambientes que se tornarão o objeto de estudo (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Caracterizamos nossa pesquisa também como pesquisa-ação. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 112), “pesquisa-ação é um tipo especial de pesquisa participante, em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas, sobretudo para mudá-lo”. Ainda segundo os autores, nesse tipo de pesquisa o pesquisador busca melhorar as práticas, promovendo a autonomia dos participantes no processo de aprendizagem, pode-se afirmar que é um tipo de pesquisa que se apresenta como transformadora.

Sobre pesquisa-ação, Tripp (2005) afirma:

É importante que se reconheça a pesquisa-ação como um dos inúmeros tipos de investigação-ação, que é um termo genérico para qualquer processo que siga um ciclo no qual se aprimora a prática pela oscilação sistemática entre agir no campo da prática e investigar a respeito dela. Planeja-se, implementar-se, descreve-se e avalia-se uma mudança para a melhora de sua prática, aprendendo mais, no decorrer do processo, tanto a respeito da prática quanto da própria investigação (TRIPP, 2005, p. 3).

Nesse método de pesquisa, o “investigador ao mesmo tempo deixa fluir o desempenho do sujeito, sem aprisioná-lo numa situação experimental muito estruturada, e interfere com perguntas e propostas de tarefas para provocar comportamentos relevantes por parte do sujeito” (OLIVEIRA, 2010, p. 67).

Para Vilela (2014), a pesquisa-ação é, sobretudo, um processo de intervenção em que os participantes buscam uma mudança social com a contribuição dos pesquisadores, que, por sua vez, possuem a função de acompanhar e analisar as ações desenvolvidas.

A metodologia da pesquisa-ação é apontada em função da investigação matemática com o GeoGebra, podendo ser aplicada em diversos campos de atuação. É um tipo de pesquisa que não aborda o nível individual, ela dá ênfase, do ponto de vista sociológico, a análise das diferentes formas de ação, considerando que a ação só se manifesta num conjunto de relações sociais estruturalmente determinadas (THIOLLENT, 2016).

Como o principal objetivo desta pesquisa é analisar as contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvimental e a Investigação Matemática com o GeoGebra através de um experimento didático-formativo elaborado para a formação do pensamento teórico sobre Elipse na 3ª série do Ensino Médio, utilizamos esse método de intervenção a fim de pautar o desenvolvimento da atividade de pesquisa em sala de aula.

O experimento didático-formativo é uma intervenção pedagógico-didática visando interferir nas ações mentais dos alunos no processo de aprendizagem de um conteúdo específico [...]. O experimento didático consiste na experimentação teórica e metodológica do processo de ensino e aprendizagem no contexto da sala de aula (PERES, 2010, p. 23)

Deste modo, segundo Davydov (1988), o experimento didático-formativo oferece ao pesquisador a mediação nos processos psíquicos e pedagógicos aos quais estuda. Essa mediação não é uma averiguação do atual estágio de desenvolvimento do pensamento do aluno, e sim, uma mediação que objetiva a organização do ensino para o desenvolvimento de novas ações mentais:

O método do experimento formativo tem como característica a intervenção ativa do pesquisador nos processos mentais que ele estuda. Neste aspecto, difere substancialmente do experimento de verificação (constatação e comprovação) que somente enfoca o estado já formado e presente de uma formação mental particular. A realização do experimento formativo pressupõe a projeção e modelação do conteúdo de novas formações mentais a serem constituídas, dos meios psicológicos e pedagógicos e das vias de sua formação (DAVYDOV, 1988, p. 188).

## 5.2 Experimento Didático-Formativo

O experimento didático-formativo é uma aplicação da Teoria de Vygotsky sobre a zona de desenvolvimento proximal e, devido esse fato, não é organizado de forma a se adaptar ao nível de desenvolvimento real dos alunos, mas sim como um método que impulsiona o desenvolvimento de novas ações mentais (AQUINO, 2014).

O ensino e a educação experimentais não são implementados por meio da adaptação a um nível existente, já formado de desenvolvimento mental das crianças, mas sim utilizando, por meio da comunicação do professor com as crianças, procedimentos que formam ativamente nelas o novo nível de desenvolvimento das capacidades (DAVYDOV, 1988, p. 188).

Para Libâneo (2007):

O experimento formativo é um método de investigação utilizado por psicólogos russos vinculadores à teoria histórico-cultural que consiste em estudar as mudanças no desenvolvimento do psiquismo por meio da ativa influência do pesquisador na experimentação, ou em outras palavras, pela formação dirigida dos processos psicológicos que serão investigados (LIBÂNEO, 2007, p. 2).

Diante do que foi exposto, Libâneo (2008) elenca os seguintes processos para que o professor leve em consideração no momento da elaboração de um experimento didático-formativo:

1. Identificar as relações gerais básicas do objeto de estudo, indo de encontro ao núcleo conceitual, que contém a generalização esperada para que o aluno a interiorize e, posteriormente, a utilize de forma a deduzi-la em situações particulares;
2. Identificar as ações mentais presentes no objeto, no momento do estudo da gênese e dos processos investigativos do conteúdo, onde os alunos deverão se apropriar dessas ações mentais durante o estudo do objeto;
3. Construir uma rede de conceitos básicos que dão suporte ao núcleo conceitual do objeto, de forma que o aluno possa estabelecer relações e articulações entre esses conceitos básicos e o núcleo conceitual do objeto;
4. Elaborar tarefas, contendo situações-problema, de forma que o aluno assimile o modo de pensamento presente no conteúdo estudado e assim desenvolva capacidades e habilidades cognitivas gerais e específicas em relação ao objeto;
5. Prever formas de avaliação objetivando verificar se o aluno se apropriou ou está desenvolvendo a capacidade de se apropriar dos conceitos e utilizá-los como ferramentas mentais.

Além desses processos, que precisam ser considerados na elaboração do experimento didático-formativo, é de extrema importância que o professor organize a atividade de estudo de

maneira que o aluno possa perpassar pelas ações de aprendizagem descritas por Davydov (1988).

1. Transformação dos dados da tarefa objetivando identificar a relação geral do objeto de estudo;
2. Modelação da relação geral do objeto de estudo;
3. Transformação do modelo da relação geral do objeto de estudo a fim de estudar as suas propriedades em forma pura;
4. Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
5. Controle ou monitoramento das ações realizadas anteriormente;
6. Avaliação da aprendizagem.

Com relação a primeira ação, os alunos devem descobrir a relação geral do objeto de estudo, sendo essa relação que reflete o conceito teórico e que serve como base genética e fonte das características e peculiaridades do objeto. Para isso, na primeira ação da tarefa, deverá ser apresentado ao aluno um problema, podendo ser em forma de pergunta ou um jogo que o aluno irá utilizar ou um problema envolvendo um caso (FREITAS, 2017).

Dessa forma, “os alunos precisam reunir armações e dados presentes no problema examiná-los [...] em busca da relação geral universal do objeto, destacando o núcleo dessa relação como base genética e fonte de todas as suas características e peculiaridades” (FREITAS, 2017, p. 412).

A ação de aprendizagem posterior consiste na criação de um modelo que representa a relação geral do objeto de estudo. Dessa forma, ir em busca das características internas do objeto significa conduzir o aluno em um processo histórico para a recriação de algo que representa a relação geral do objeto: “para eles consiste em criar algo para representar a relação, no entanto eles estarão reproduzindo algo que já foi historicamente criado pelos pesquisadores tratando-se, portanto, de uma recriação” (FREITAS, 2016, p. 412).

A terceira ação de aprendizagem possibilita o aluno estudar as propriedades da relação geral do objeto, não somente em seu aspecto abstrato, mas, também, em seu aspecto concreto. Isso consiste em introduzir alterações na relação geral do objeto a fim de alterar o seu núcleo e o seu resultado (FREITAS, 2016). Dessa forma, ao introduzir mudanças na relação geral do objeto, de forma que altere o núcleo dessa relação, poderá provocar uma alteração que descaracteriza o objeto de estudo, o que pode vir a causar consequências.

Portanto, os alunos, ao compreenderem isso, reforçam a base genética do objeto e ainda “[...] identificam seu vínculo com relações particulares que interferem na forma pela qual se apresenta na realidade e compreendem que está sujeita a um processo de transformação” (FREITAS, 2016, p. 413).

Em seguida, a quarta ação de aprendizagem, segundo Davydov (1988, p. 175), “[...] permite que as crianças concretizem a tarefa de aprendizagem inicial e a convertam na diversidade de tarefas particulares que podem ser solucionadas por um procedimento único (geral), assimilado durante a execução das ações anteriores de aprendizagem”. Assim, essas tarefas particulares são uma variação da tarefa inicial e que envolvem diversas situações reais e gerais onde os alunos irão identificar, nessas tarefas, a presença da relação geral do objeto (FREITAS, 2016). Portanto, segundo Davydov (1988), a validação dessa ação de aprendizagem é verificada na solução de tarefas particulares que, para isso, o aluno se orienta pela relação geral anteriormente assimilada.

A quinta ação de aprendizagem consiste em assegurar que o aluno conseguiu executar corretamente as operações que compõem a tarefa, por meio de um processo de reflexão sobre suas ações e sobre o caminho de seu pensamento, visando o cumprimento da assimilação da relação geral (PERES; FREITAS, 2014). Dessa forma, o monitoramento ou o controle das ações realizadas anteriormente “[...] consiste em um exame qualitativo substancial do resultado da aprendizagem em comparação com o objetivo do ensino e, nesse sentido, equivale à avaliação dos alunos por si próprios, tendo como referência o conteúdo de suas ações [...]” (FREITAS, 2016, p. 414-415).

A sexta e última ação de aprendizagem o professor avaliará, individualmente, a apropriação do conceito pelo aluno. Assim, no momento da avaliação, segundo Freitas (2016, p. 415), o professor pode se orientar por uma pergunta, sendo esta: “[...] o aluno se apropriou da relação geral abstrata e a utiliza na análise de relações particulares concretas do objeto?”. Dessa forma, avaliar a aprendizagem, segundo Davydov (1988, p. 176), possibilita verificar se o aluno está assimilando, “[...] ou não, e em que medida, o procedimento geral de solução da tarefa de aprendizagem, se o resultado das ações de aprendizagem corresponde, ou não, e em que medida, ao objetivo final”.

Diante disso, essas seis ações de aprendizagem, que o aluno deve cumprir, segundo Davydov (1988), estão dirigidas para que possibilite a descoberta das condições de surgimento do conceito que os alunos estão assimilando e, ainda, segundo o autor, “é como se os próprios escolares construíssem o conceito, ainda que sob a direção sistemática do professor, (embora a

natureza desta direção mude gradualmente e cresça, também gradualmente, o grau de autonomia exibido pelo escolar)” (DAVYDOV, 1988, p. 176).

Para proporcionar o desenvolvimento de novas ações mentais, segundo Aquino (2015), o experimento didático-formativo deve ser dividido em quatro etapas, sendo elas:

- a revisão da literatura e o diagnóstico da realidade que será estudada;
- a elaboração do sistema didático experimental;
- desenvolvimento do experimento didático-formativo;
- a análise dos dados e elaboração do relatório.

### ***5.2.1 Etapa da revisão de literatura e diagnóstico da realidade a ser estudada***

Baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental, Aquino (2014) produz um recorte para a fundamentação da pesquisa, bem como seu referencial teórico. É necessário realizar um levantamento bibliográfico para identificar se existem estudos similares, caso haja estudos similares prévios, a revisão deles é extremamente importante para a organização e justificativa da pesquisa.

É necessário fazer um diagnóstico da prática pedagógica em relação a uma dada disciplina no seu respectivo nível de ensino. Para Aquino (2014, p. 17), "O propósito é definir os rasgos que caracterizam a metodologia tradicional de ensino".

De acordo com o autor, o objetivo dessa tarefa é mostrar as características marcantes da metodologia tradicional que está sendo usada para se ensinar. É igualmente importante saber caracterizar a turma e o professor na qual se vai aplicar o experimento. Na sequência, deve-se fazer um diagnóstico dos alunos e dos professores com os quais vamos trabalhar o experimento.

Caracterizando esta etapa foi realizada uma revisão bibliográfica no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (CAPES), sobre o ensino da elipse pautado nos pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvimental, também foram realizadas buscas nos repositórios da Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC-GO) e do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG), visto que ambos concentram as pesquisas relacionadas ao ensino de Matemática e essa teoria. Durante a revisão não foram encontradas, nessas fontes, nenhuma pesquisa com essa temática.

### ***5.2.2 Etapa da elaboração do experimento didático-formativo***

Derivando dos resultados da primeira etapa, o pesquisador deve elaborar um experimento didático-formativo que contemple a essência dos conceitos a serem ensinados. Aquino (2013), baseado em Davydov (2013), aponta nove pontos relevantes a serem observados na reestruturação do programa das disciplinas:

- 1) Sem mudar o conteúdo fundamental do programa vigente, devem-se buscar os princípios gerais de organização e os fundamentos dos conteúdos, segundo a lógica da ciência, assim como suas potencialidades pedagógico-didáticas.
- 2) O ponto anterior deve preservar o Programa, e cada uma de suas unidades, da fragmentação e da falta de sistematicidade dos conteúdos de ensino.
- 3) Buscar as correspondências entre os objetivos didáticos da disciplina e os conteúdos organizados segundo os seus princípios lógicos gerais.
- 4) Os objetivos do programa devem refletir a apropriação da experiência humana, expressada em conhecimentos, habilidades, hábitos e valores, assim como na apropriação dos métodos da ciência por parte dos escolares.
- 5) O anterior deve guiar o desenvolvimento integral da personalidade do aluno, por meio da apropriação da experiência humana, sob a direção do professor.
- 6) Selecionar o método de ensino mais adequado para aqueles objetivos e conteúdos.
- 7) Selecionar os meios ou recursos didáticos mais adequados aos objetivos, conteúdo e métodos.
- 8) Elaborar o sistema de tarefas ou problemas de estudo que serão apresentados aos alunos, para sua solução, sob a direção do professor. O sistema de tarefas inclui a apropriação progressiva do sistema conceitual da disciplina.
- 9) As tarefas ou problemas de estudo devem ser previstas, segundo a ordem de dificuldades e níveis de ajuda que serão necessários para que os alunos as possam executar no menor tempo e com o menor número de erros possível. (AQUINO, 2014, p.18)

Esses nove pontos funcionam como ponto de partida na preparação do experimento didático-formativo, bem como abordam pontos da Teoria do Ensino Desenvolvimental que buscam integralizar a teoria com a prática pedagógica.

O principal objetivo desta etapa é a apropriação do conceito nuclear do objeto matemático, no nosso caso, a Elipse, por meio do método da ascensão do abstrato ao concreto, para aplicá-lo em situações particulares.

Então, para que esse objetivo seja atingido os alunos devem cumprir as ações descritas por Davydov (1988), onde serão planejadas e aplicadas tarefas de aprendizagem para a formação do pensamento teórico sobre a Elipse, logo o aluno deve identificar o conceito nuclear da Elipse, por meio da realização dessas tarefas.

Desta forma, o conceito nuclear da Elipse, é a sua própria definição: *elipse é o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois pontos distintos fixados é igual a uma constante, maior que a distância entre esses pontos.*

Assim, identificar esse conceito nuclear e aplicá-lo em situações contextualizadas, indica a formação do pensamento teórico, atingindo o objetivo desta etapa.

### **5.2.3 Etapa da aplicação do experimento didático-formativo**

Esta etapa consiste na aplicação do experimento didático-formativo desenvolvido nas etapas anteriores. O tempo de aplicação depende da necessidade de teste dos resultados dessa nova metodologia no ensino, bem como, nas consequências do desenvolvimento dos alunos.

Como principal técnica de coleta de dados, Aquino (2014) destaca a observação. Na observação a ser realizada pelo pesquisador, ele sugere atenção na conduta do professor aplicador e nos alunos, bem como o "contexto socioeducativo subjacente, e nas demais ocorrências que de alguma forma interfira nas aulas" (AQUINO, 2014, p. 123).

De acordo com as características desta etapa, aplicamos o experimento didático-formativo no Colégio Estadual Rafael Nascimento, em Montividiu – GO, para uma turma da 3ª série do Ensino Médio, composta por 35 alunos. Foram realizadas 10 aulas de cinquenta minutos cada.

### **5.2.4 Etapa da análise dos dados e elaboração do relatório do experimento didático-formativo**

Essa, possivelmente, é a parte mais sensível e complexa da pesquisa. A análise é feita baseada num conjunto de categorias, que foram previamente montadas e devidamente ancoradas nas evidências de aprendizagem e no desenvolvimento dos alunos, por ocasião da realização do experimento didático-formativo.

Aquino (2014, p. 22) baseado em Vygotsky, afirma que "a análise baseia-se na indução e ao mesmo tempo a guia". Dessa forma, a análise tem como base a indução, mas o próprio processo de análise dirige a forma como ocorre essa indução.

Sobre a forte interação entre a análise e o método experimental, Vygotsky afirma que:

É a análise que coloca as questões; que constitui a base de todo experimento: todo experimento é uma análise em ação, assim como toda análise é um experimento que se leva a cabo na mente. Por isso, o correto seria denominar a análise de método experimental. [...] A análise é o que oferece o volume de propagação das conclusões, isto é, o fato de destacar em A, B, C, os traços comuns ao grupo em questão. Mas ainda mais: no experimento observo

sempre um sintoma do fenômeno e isto é mais uma vez trabalho da análise. (VYGOTSKY, 1996, p.369)

A primeira etapa, a experimentação, é dedicada a utilização do software para trabalhar atividades que permitam ao aluno a movimentação dos objetos matemáticos para que a comparação entre os tratamentos algébricos e geométricos possa ser evidenciado através de propriedades e definições.

Já na segunda etapa, a fase das conjecturas, as relações obtidas da experimentação são utilizadas para relacionar os resultados gerais para continuação da atividade investigativa.

Na terceira etapa, a formalização, são realizadas as demonstrações matemáticas ou uma contraposição da conjectura levantada, nos dois casos levanto em consideração o rigor matemático.

Por último, depois de experimentar, conjecturar e formalizar o saber matemático é de extrema importância tentar generalizar esses resultados, isto é, investigar outras situações para exploração do resultado obtidos.

### 5.3 Características do Local e do Objeto de Pesquisa

Para configurar essa pesquisa foi desenvolvido um experimento didático-formativo, baseada nos pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvimental e da Investigação Matemática com o GeoGebra, em uma turma com 32 alunos, da 3ª série do Ensino Médio, no turno matutino, do Colégio Estadual Rafael Nascimento, situado na cidade de Montividiu – GO. O colégio é a única Unidade Escolar do município que oferta o Ensino Médio Regular e a 3ª etapa da Educação de Jovens e Adultos.

**Figura 13 – Fachada do Colégio Estadual Rafael Nascimento.**



Fonte: dados da pesquisa

O primeiro passo para que essa pesquisa se concretizasse, foi o contato com os responsáveis do Colégio Estadual Rafael Nascimento, ou seja, a equipe gestora. Nesse contato, foi solicitado à diretora da Unidade Escolar a elaboração do termo de anuência para a aplicação da pesquisa e uma reunião com a coordenadora pedagógica para alinhamento das atividades desenvolvidas durante a pesquisa.

Durante a reunião, foi apresentada à equipe pedagógica do colégio o experimento didático formativo que seria aplicado, para discutirmos o desenvolvimento da pesquisa em sala de aula. Como o Professor-Pesquisador era o professor regente da turma, essa etapa burocrática relacionada a pesquisa foi facilitada.

#### **5.4 Produção de dados**

Para a produção de dados, realizamos durante o desenvolvimento do experimento didático-formativo, anotações sobre as falas dos alunos, gravações em áudio e vídeo, capturas de telas do GeoGebra, aplicação de tarefas e questionários.

Foram ministradas 10 aulas de 50 minutos de duração, onde foram aplicadas tarefas e um questionário, que compunham o experimento didático-formativo. Além disso, utilizamos um diário de campo para anotar os fatos que entendemos como relevantes tais como os diálogos entre os alunos e as atividades desenvolvidas, para a análise dos dados.

## 6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO EXPERIMENTO DIDÁTICO-FORMATIVO

Neste capítulo apresentamos a descrição, análise e resultados da aplicação do experimento didático-formativo.

O experimento didático-formativo buscou, dentre outras coisas, impulsionar o desenvolvimento cognitivo dos alunos, atuando no modo de estruturar o processo de ensino-aprendizagem da Elipse, passando por um processo de construção da relação nuclear desse conceito, seguido por uma modelação no software GeoGebra.

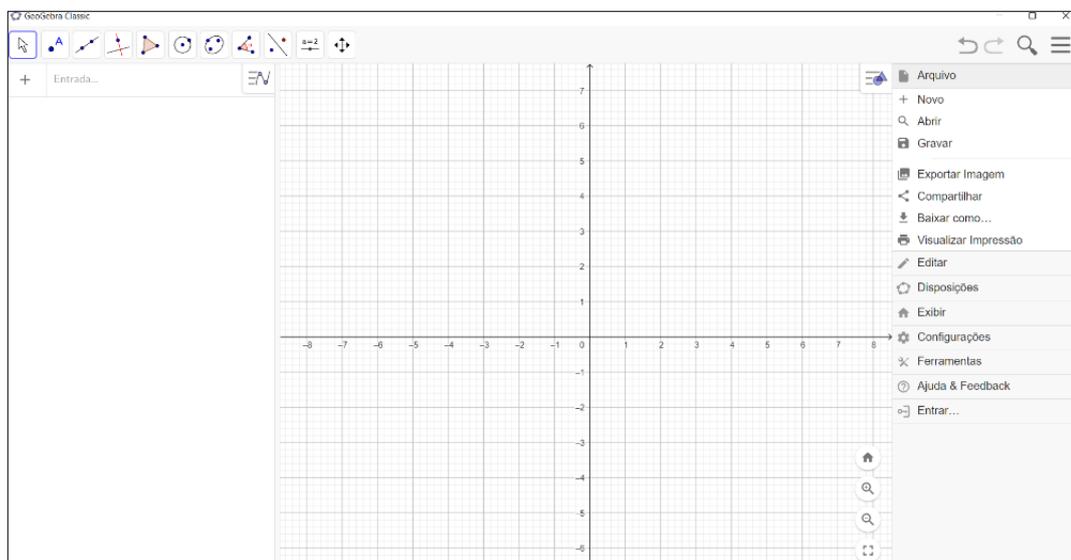
### 6.1 Primeiro encontro – Introdução ao *software* GeoGebra

Neste encontro o principal objetivo foi a apresentação da interface do software GeoGebra e suas principais ferramentas. Participaram 32 alunos e teve duração de 2 aulas de 50 minutos cada. Cada aluno recebeu um notebook com o GeoGebra já instalado, para desenvolverem as atividades propostas.

Com a utilização de um projetor o Professor-Pesquisador apresentou a interface padrão do GeoGebra: barra de menus, barra de ferramentas, janela de álgebra, campo de entrada, janela de visualização e a lista de comandos, enfatizando as ferramentas e configurações que seriam mais utilizadas para o desenvolvimento da pesquisa.

Iniciamos esse momento com a apresentação da interface do GeoGebra: barra de menus, barra de ferramentas, janela de álgebra, campo de entrada, janela de visualização e a lista de comandos, como ilustrado na figura 14.

**Figura 14 – Interface do software GeoGebra.**

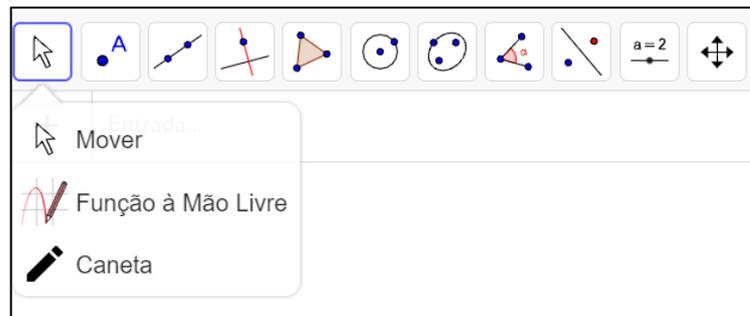


Fonte: dados da pesquisa

Ressaltamos que na barra de menus estão dispostas as opções para salvar o arquivo e as configurações gerais. Na barra de ferramentas são concentradas todas as ferramentas para a construção de pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos, interseção entre objetos, entre outros. A janela de álgebra é caracterizada pela exibição das coordenadas, equações, medidas e outras características dos objetos construídos. O campo de entrada é dedicado a digitação de comandos e/ou equações. Na janela de visualização são apresentados os gráficos dos objetos que possuem representação geométrica.

Como as ferramentas mais utilizadas estão na barra de ferramentas, fizemos uma breve apresentação de cada ferramenta e suas principais aplicabilidades, conforme as figuras 15-25.

**Figura 15 – Ferramenta mover do GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

**Figura 16 – Ferramenta ponto do GeoGebra.**



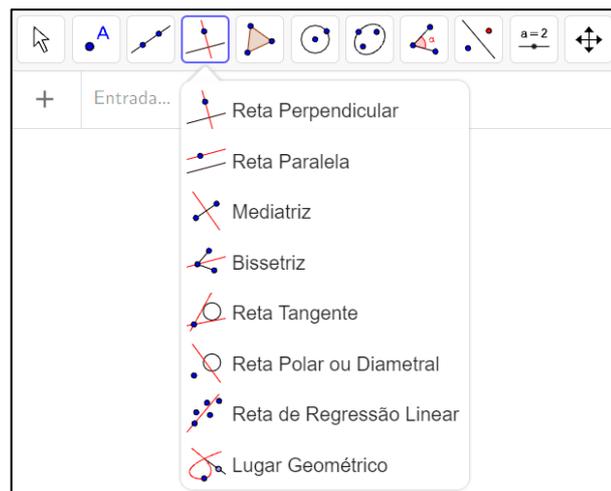
Fonte: dados da pesquisa

**Figura 17 – Ferramenta reta do Geogebra.**



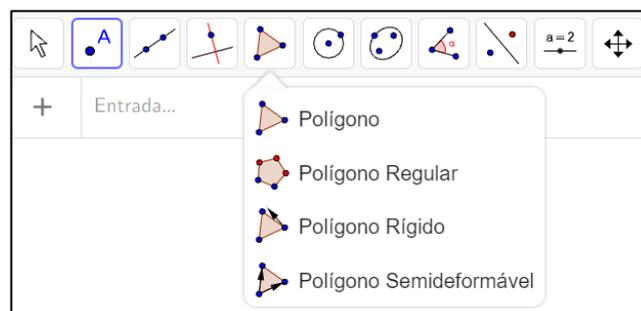
Fonte: dados da pesquisa

**Figura 18 – Ferramenta reta perpendicular no GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

**Figura 19 – Ferramenta polígono do GeoGebra.**



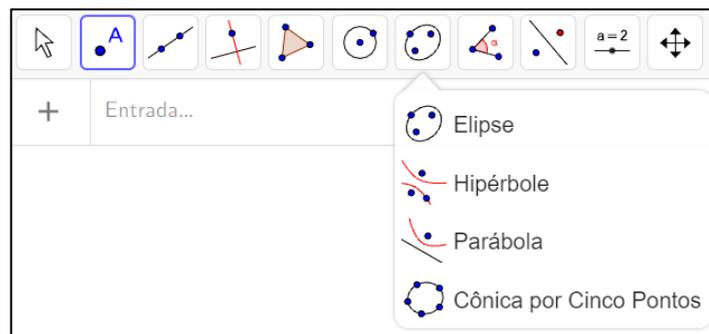
Fonte: dados da pesquisa

**Figura 20 – Ferramenta círculo do GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

**Figura 21 – Ferramenta cônicas do GeoGebra.**



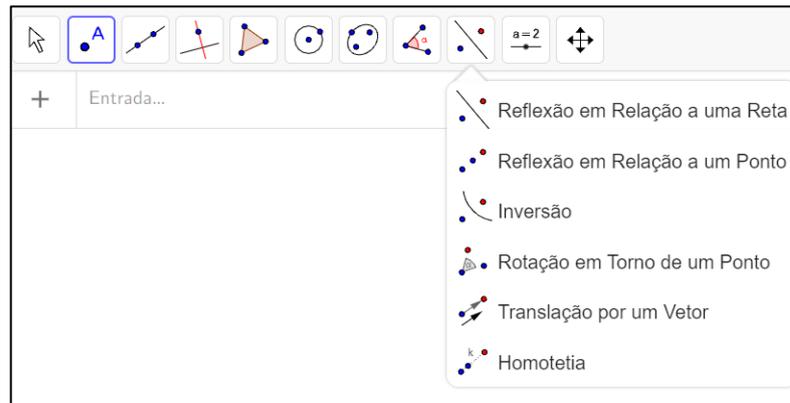
Fonte: dados da pesquisa

**Figura 22 – Ferramenta ângulo do GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

**Figura 23 – Ferramenta reflexão do GeoGebra.**



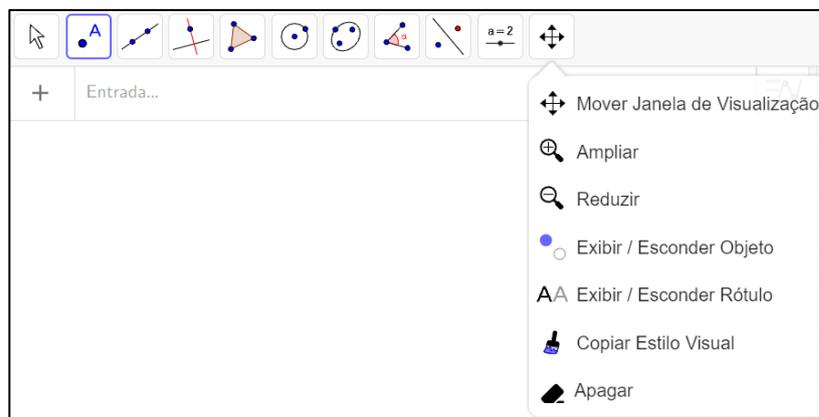
Fonte: dados da pesquisa

**Figura 24 – Ferramenta controle deslizante.**



Fonte: dados da pesquisa

**Figura 25 – Ferramenta mover do GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

Como os alunos já tinham certa experiência com o software após a apresentação da interface e das principais ferramentas, reservamos o restante da aula para que os alunos pudessem manusear as ferramentas e criassem objetos de forma aleatória.

Os alunos se mostraram bastante empolgados com a aula e realizaram alguns trabalhos com conhecimentos prévios, trocaram informações e compartilharam experiências. Durante essa atividade ficamos atentos aos comentários e os trabalhos produzidos pelos alunos.

Enfatizamos aqui a fala de uma aluna: “consegui identificar a equação de uma circunferência que desenhei utilizando a ferramenta”.

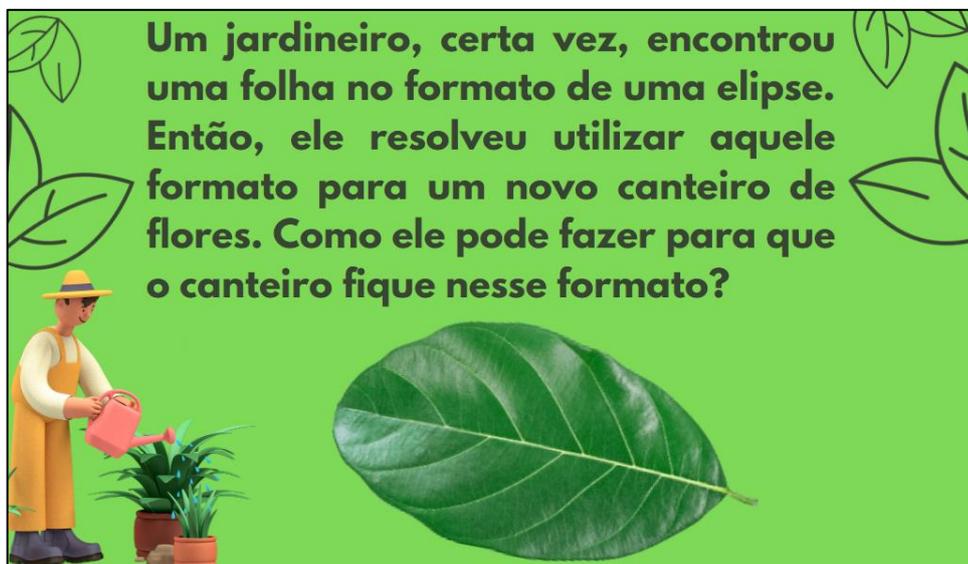
Logo, conseguimos destacar a principal funcionalidade do software que é integrar os tratamentos algébricos e geométricos dos objetos matemáticos.

## 6.2 Segundo Encontro – Problema Gerador

Neste encontro participaram 32 alunos e teve duração de 2 aulas de 50 minutos. O principal objetivo era a resolução do problema gerador para que os alunos conseguissem identificar o conceito nuclear da elipse.

Neste encontro cada aluno recebeu o problema gerador de forma impressa para que iniciassem a resolução, a partir da leitura individual. Após essa etapa o problema foi projetado para toda a turma para que fosse realizada a leitura em grupo e o compartilhamento de possíveis estratégias para a resolução do problema, como ilustra a figura 26.

**Figura 26 – Problema do jardineiro.**



Fonte: dados da pesquisa

Este problema motivador cumpre os quatro passos da metodologia da Investigação Matemática em Sala de Aula de Ponte et al (2013, p. 21). Pois, a exploração e a formulação da questão, já é intrínseca ao problema e propõe o levantamento de conjecturas.

Nesse momento o software GeoGebra não foi utilizado, pois a intenção era que os alunos tentassem resolver o problema a partir de conhecimentos prévios, conforme a figura 27.

**Figura 27 – Resolução do problema gerador.**



Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos ficaram intrigados com o problema e expressavam a curiosidade e certa dificuldade em resolvê-lo, então o Professor-Pesquisador apresentou perguntas auxiliares como:

- *Se a folha encontrada pelo jardineiro tivesse o formato de um quadrado, de um retângulo ou de um círculo? Como ele poderia fazer o canteiro de flores nesses formatos?*

Logo, uma aluna destacou:

- ✓ *Se a folha tivesse o formato de um retângulo ou quadrado o jardineiro poderia usar linhas de costura para dar forma ao canteiro.*

Após a fala dessa aluna, todos os alunos ficaram inquietos com a possibilidade de resolver o problema, em seguida um aluno afirmou:

- ✓ *Professor, se o formato da folha fosse uma circunferência, o jardineiro poderia utilizar uma ferramenta parecida com um compasso, assim ele conseguiria um canteiro com formato circular.*

Ao finalizar a atividade do problema motivador, percebemos que pelo fato da maioria dos alunos serem desafiados a solucionar o problema motivador, toda a turma mostrou bastante interesse na atividade de resolução do problema. Assim, percebemos que possibilitar a autonomia, a tomada de decisão no processo de ensino-aprendizagem, motivou os alunos a buscarem o conhecimento, a entrarem em atividade de estudo e a trabalharem em grupo.

Logo, em consonância com nosso referencial teórico a interação coloca em movimento vários processos de desenvolvimento que, sem a ajuda externa, seriam impossíveis de ocorrer. Esses processos se internalizam e passam a fazer parte das aquisições do seu desenvolvimento individual (REGO, 2007, p. 74).

### **6.3 Terceiro Encontro – Construção da Elipse no GeoGebra**

Este encontro foi dedicado a construção da elipse utilizando o software GeoGebra a partir da resolução do problema gerador do último encontro. Então cada aluno recebeu um notebook para desenvolver as atividades previstas para essas aulas.

Durante essa atividade, o nosso objetivo era atingir a Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos, através da utilização do problema gerador e do software GeoGebra, pelas relações com os colegas e a mediação da atividade pelo Professor-Pesquisador. Com a utilização do GeoGebra foi possível a testagem de conjecturas e a integração entre os tratamentos algébricos e geométricos da elipse.

Como os alunos com a mediação do Professor-Pesquisador chegaram a um consenso que para a resolução do problema do jardineiro (problema gerador) poderiam ser utilizadas duas estacas com uma corda inextensível com comprimento maior que a distância entre as estacas e esticando essa corda com outra estaca e marcando o terreno teria o formato de uma elipse. Então, a partir desse resultado dedicamos ao estudo agora no software GeoGebra, conforme a figura 28.

**Figura 28 – Desenvolvimento do experimento didático-formativo.**

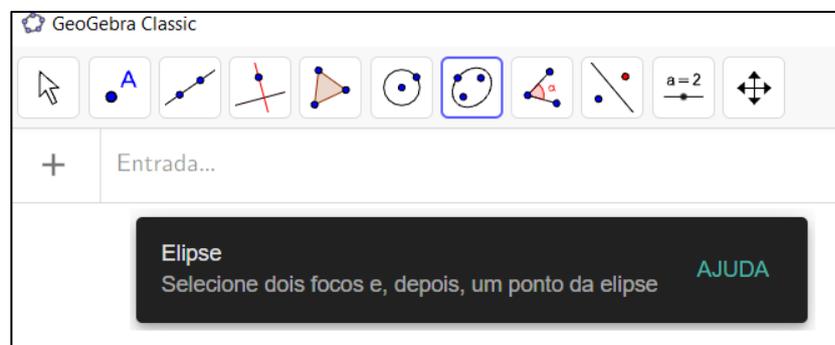


Fonte: dados da pesquisa

Cada aluno estava com um notebook e o Professor-Pesquisador também estava projetando a tela de seu computador, então foi questionado pelo Professor-Pesquisador quais ferramentas poderiam ser utilizadas para a construção, logo a maioria dos alunos falaram que lembravam da ferramenta elipse, da aula introdutória ao GeoGebra.

Então, o professor-pesquisador sugeriu que o cursor do mouse fosse colocado sobre o ícone da elipse na barra de menu para que o próprio GeoGebra apresentasse as características dessa ferramenta, como ilustra a figura 29.

**Figura 29 – Ferramenta elipse do GeoGebra.**



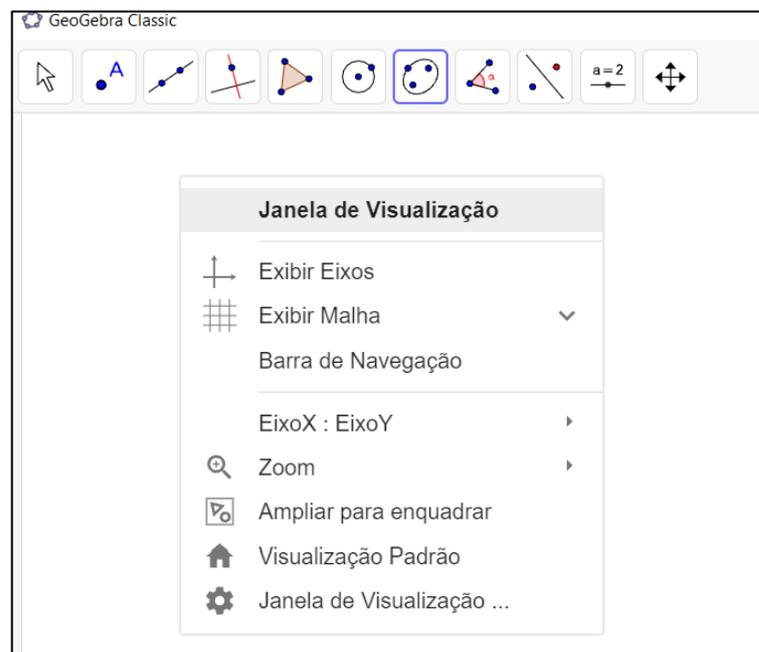
Fonte: dados da pesquisa

Após a mensagem exibida pelo software, um aluno indagou:

- Esses focos devem ser os pontos que as estacas poderiam ser fixadas.

Então com a mediação do Professor-Pesquisador começamos a construção da elipse a partir da ferramenta de mesmo nome situada na barra de menus do GeoGebra. Para iniciarmos a construção, ocultamos os eixos e a malha quadriculada da janela de visualização utilizando o botão direito do mouse, conforme a figura 30.

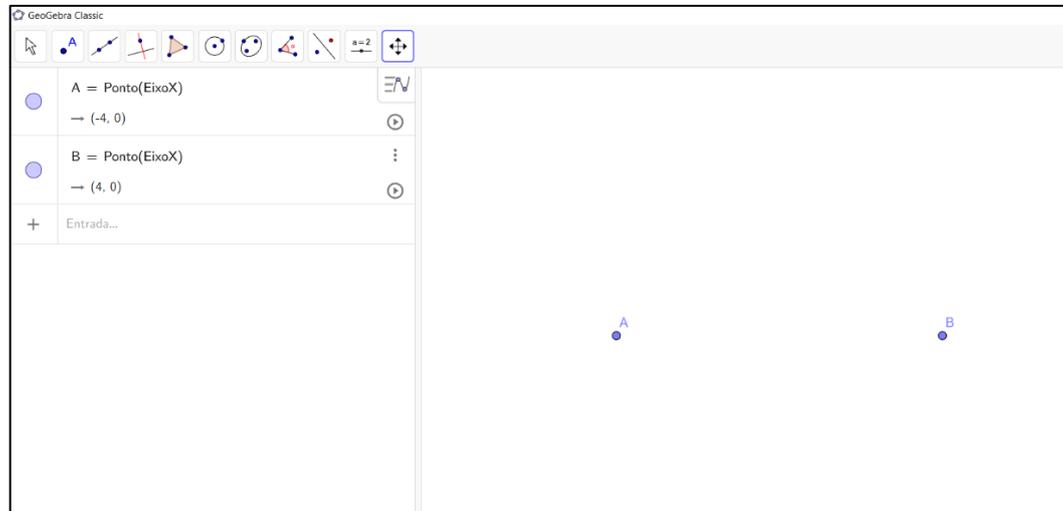
**Figura 30 – Ferramenta eixos e malhas no GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

Em seguida, marcamos dois pontos aleatórios A e B, utilizando a ferramenta ponto, representando as estacas da resolução do problema do jardineiro (problema gerador), conforme a figura 31.

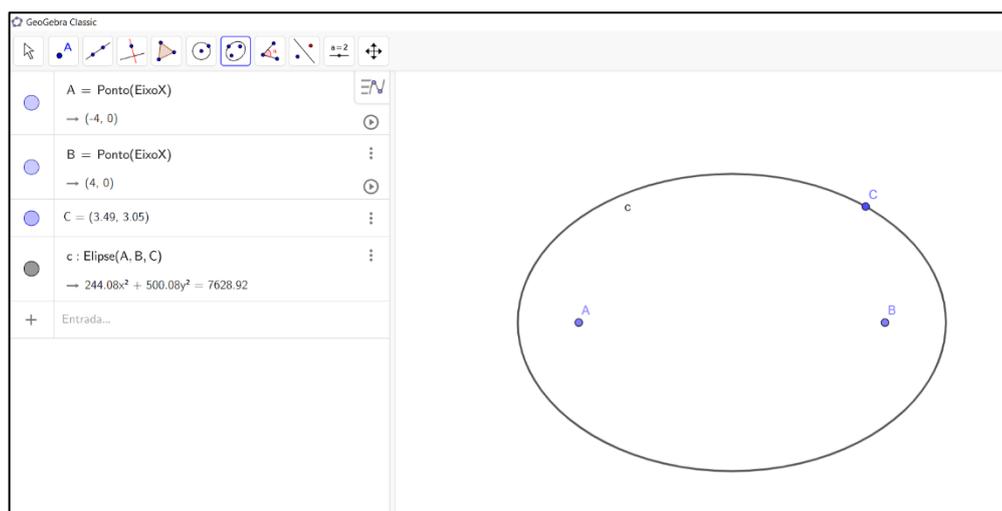
**Figura 31 – Criação de dois pontos no GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

Após essa etapa utilizamos a ferramenta elipse, conforme orientação do próprio software, selecionamos os dois pontos já construídos *A* e *B* (estacas) e marcamos o ponto *C* que representasse à estaca que estaria esticado as cordas da resolução do problema.

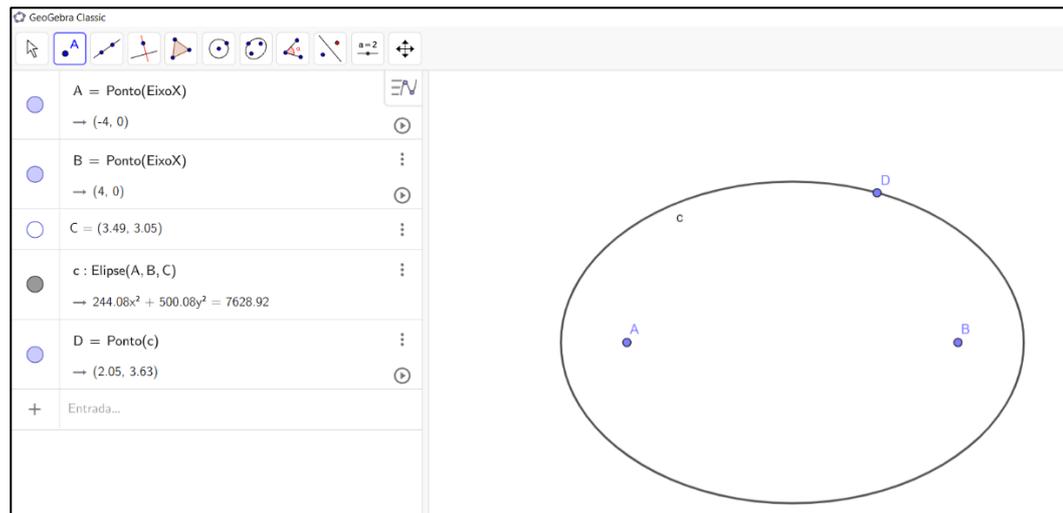
**Figura 32 – Construção da elipse no GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

Para evidenciarmos a resposta do problema do jardineiro (problema gerador) encontrada na outra aula, ocultamos o ponto C da elipse, e com a ferramenta ponto marcamos um novo ponto na Elipse, conforme a figura 33.

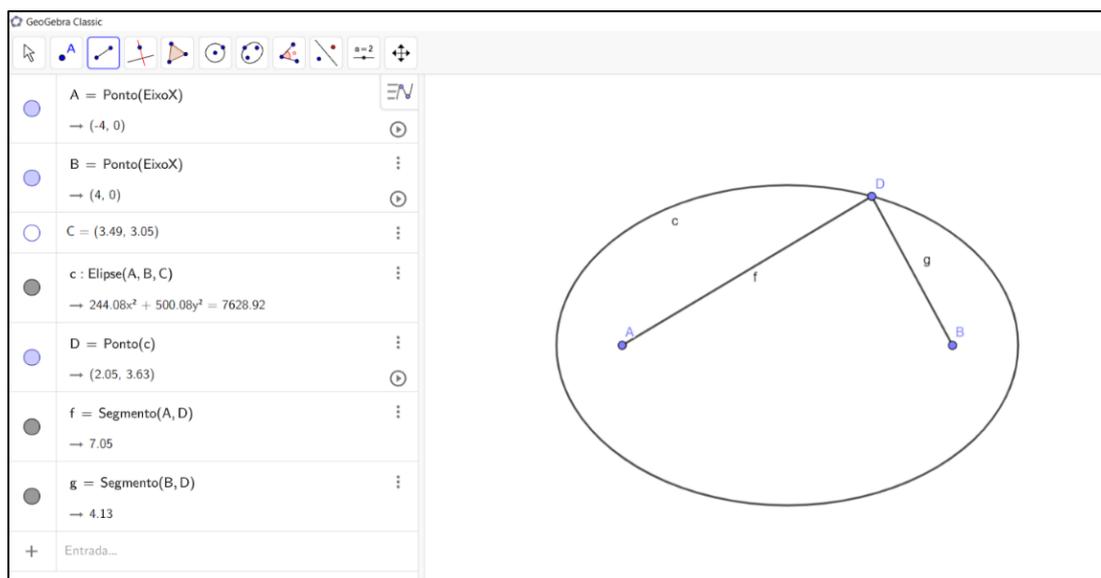
**Figura 33 – Ponto da elipse no GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

Em seguida, utilizando a ferramenta segmento de reta, marcamos os segmentos AD e BD, ilustrando a corda da resolução do problema.

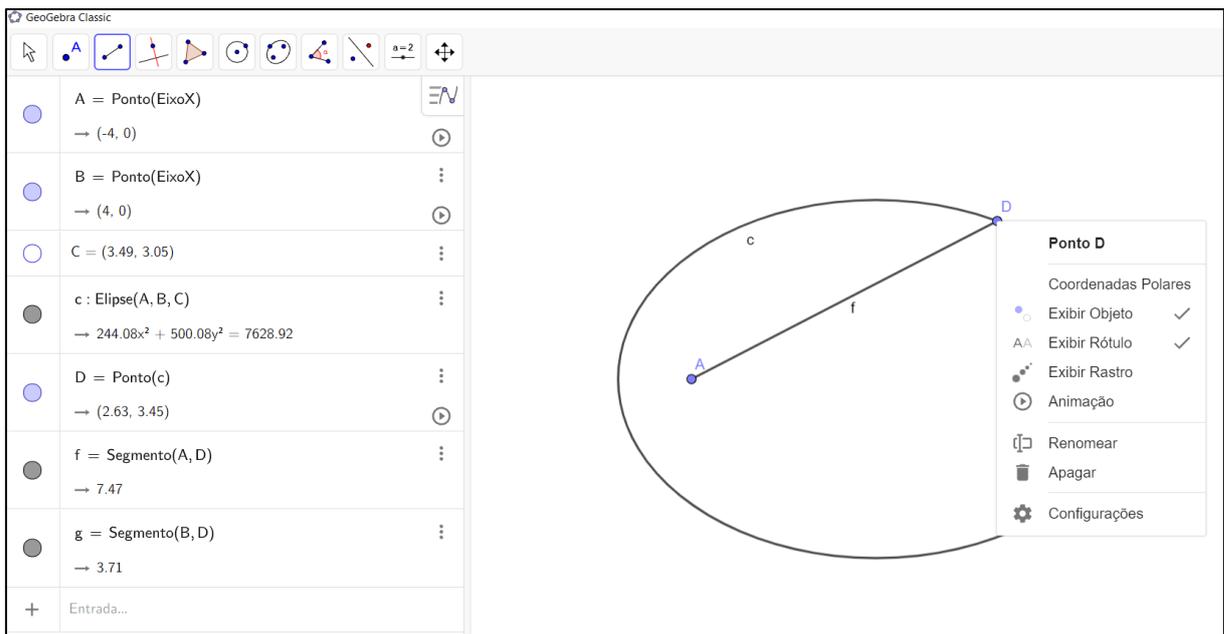
**Figura 34 – Segmentos de reta na elipse.**



Fonte: dados da pesquisa

Com essa construção, conseguimos ilustrar a resolução do problema gerador, onde um aluno chegou à conclusão que se o jardineiro fixa-se uma corda inextensível em duas estacas, com o comprimento da corda maior que a distância entre as duas estacas, e com a corda esticada fosse riscando o terreno, o desenho seria de uma elipse. Para essa ilustração no software GeoGebra, utilizamos o comando “animar” com o botão direito no mouse sobre o ponto D.

**Figura 35 – Animando um ponto da elipse.**



Fonte: dados da pesquisa

Após esta etapa, todos os alunos conseguiram compreender a resolução do problema através da construção realizada no GeoGebra. Com a animação do ponto D da elipse construída, uma aluna ressaltou:

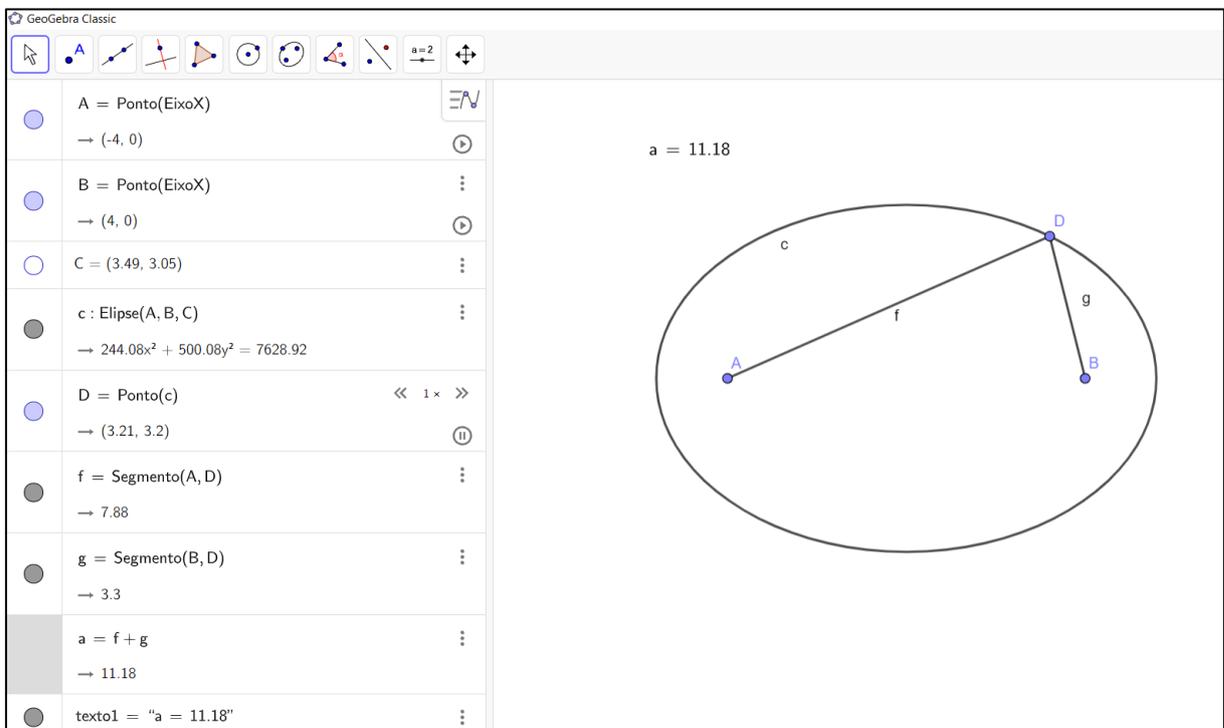
- Se a corda utilizada pelo jardineiro não estica e nem diminui o seu comprimento durante a demarcação do desenho, ela não pode mudar de tamanho, então a soma do comprimento da corda que liga as estacas até o ponto em que a corda está sendo esticada sempre será igual.

Outro aluno comentou:

- Isso mesmo. Se pegarmos o comprimento do segmento de reta AD e somarmos com o comprimento do segmento de reta BD, sempre teremos o mesmo resultado, que é o comprimento total da corda.

Então, o Professor-Pesquisador sugeriu que tais hipóteses fossem testados utilizando a construção no GeoGebra, então como o segmento de reta AD, foi nomeado  $f$  e o segmento de reta BD, foi nomeado  $g$ ; no campo de entrada do software digitamos:  $f + g$ . Logo, validamos as hipóteses levantadas anteriormente, como ilustra a figura a seguir.

**Figura 36 – Soma dos comprimentos dos segmentos de reta.**



Fonte: dados da pesquisa

Diante do que foi exposto, após a construção realizada no GeoGebra e a animação do ponto os alunos conseguiram enxergar a resolução do problema do jardineiro (problema gerador) de forma dinâmica, atingindo o conceito nuclear do objeto matemático Elipse, que é a sua própria definição: **elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.**

Segundo Vygotsky (2000, p.237), a formação de conceitos surge sempre durante o processo de resolução de algum problema que se coloca para o pensamento do adolescente, com a resolução desse problema surgem os conceitos. Quando o aluno entra em atividade

realizando a construção da elipse no GeoGebra a partir da resolução do problema gerador, ele está construindo conhecimento a partir do movimento do abstrato para o concreto. Assim, entendemos que o aluno, conseguiu atingir a ascensão dos conhecimentos abstratos aos conhecimentos concretos.

#### 6.4 Quarto encontro – Elementos da Elipse no GeoGebra

Neste momento, dedicamos a identificação dos elementos da elipse e suas equações reduzidas, utilizando o software GeoGebra, conforme figura. Partimos da definição da elipse para construção e identificação dos elementos da elipse.

**Figura 37 – Momento da construção dos elementos da elipse no GeoGebra.**

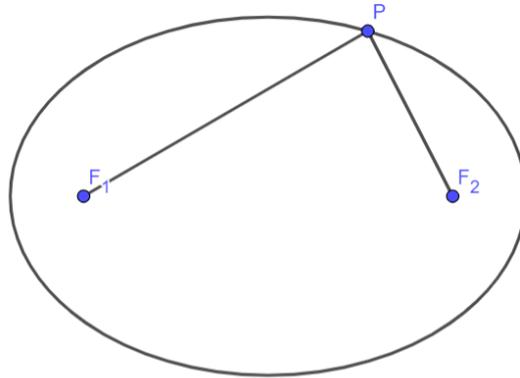


Fonte: dados da pesquisa

Consideremos dois pontos distintos,  $F_1$  e  $F_2$ , tal que a distância  $d(F_1, F_2) = 2c$ , e um número real positivo  $a$  com  $2a > 2c$ .

Chamando de  $2a$  a constante relatada na definição, um ponto  $P$  pertence à elipse se, e somente se,  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , como ilustra a figura 38.

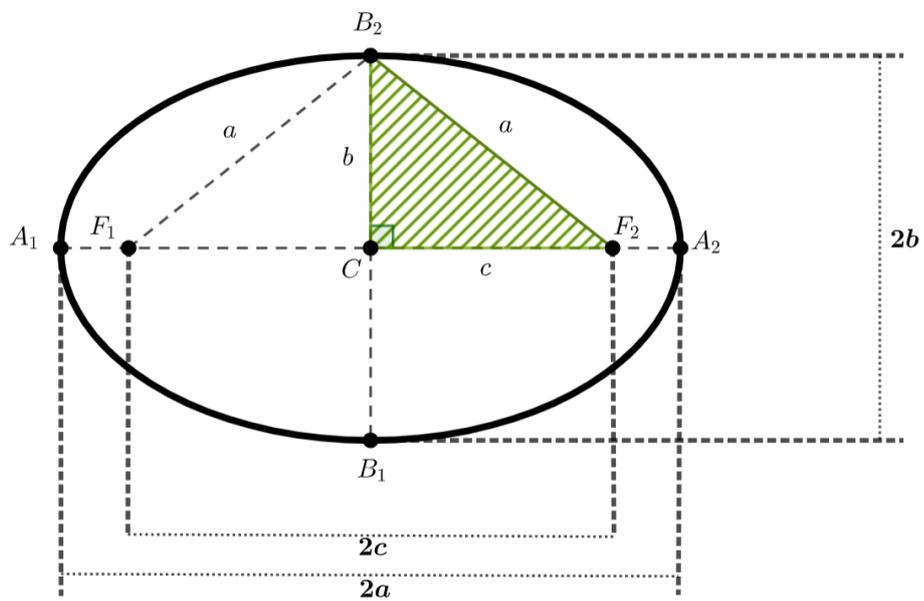
**Figura 38 – Definição geométrica da elipse.**



Fonte: dados da pesquisa

Com base na figura 39, podemos destacar os elementos da elipse.

**Figura 39 – Elementos da elipse.**



Fonte: dados da pesquisa

**Quadro 2 – Elementos da Elipse**

<b>ELEMENTOS DA ELIPSE</b>	
<b>Focos</b>	São os pontos $F_1$ e $F_2$ .
<b>Distância focal</b>	É a distância $2c$ entre os focos.
<b>Centro</b>	É o ponto médio $C$ do segmento $F_1F_2$ .
<b>Eixo maior</b>	É o segmento $A_1A_2$ de comprimento $2a$ (este segmento contém os focos).
<b>Eixo menor</b>	É o segmento $B_1B_2$ de comprimento $2b$ e perpendicular a $A_1A_2$ no seu ponto médio.
<b>Vértices</b>	São os pontos $A_1, A_2, B_1$ e $B_2$ .

Fonte: dados da pesquisa

A partir da figura, temos que  $B_2F_2 = a$  pois  $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$ , que é a definição da elipse e  $B_2F_1 = B_2F_2$ .

Assim, do triângulo retângulo  $B_2CF_2$  temos que:  $a^2 = b^2 + c^2$ . Essa igualdade mostra que  $b < a$  e  $c < a$ .

Também apresentamos a excentricidade da elipse, que é um número real obtido por:

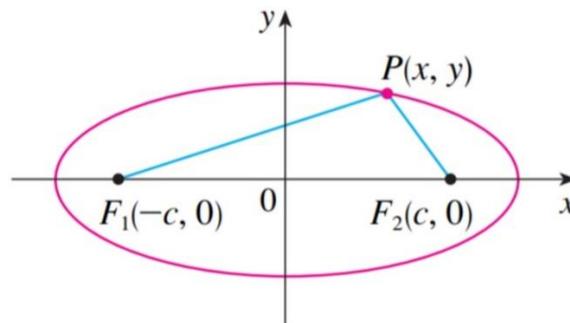
$$e = \frac{c}{a}, \text{ onde } (0 < e < 1).$$

A excentricidade é responsável pela “forma” da elipse: elipses com excentricidade próximas a zero são aproximadamente circulares, enquanto elipse com excentricidade próxima a um são achatadas.

Seja a elipse de centro  $C(0,0)$ , consideramos dois casos, o primeiro quando o eixo maior está sobre o eixo das abscissas.

Seja  $P(x, y)$  um ponto qualquer de uma elipse de focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ , de acordo com a definição temos que  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , logo

**Figura 40 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas com focos no eixo x.**



Fonte: dados da pesquisa

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \quad (1.11)$$

isto é,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação e simplificando, temos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Elevando ao quadrado e simplificando novamente:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Do triângulo  $F_1F_2P$ , da Figura 18, temos que  $2c < 2a$ , assim,  $c < a$  e, portanto,  $a^2 - c^2 > 0$ .

Seja  $b^2 = a^2 - c^2$ . Então, a equação da elipse torna-se

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

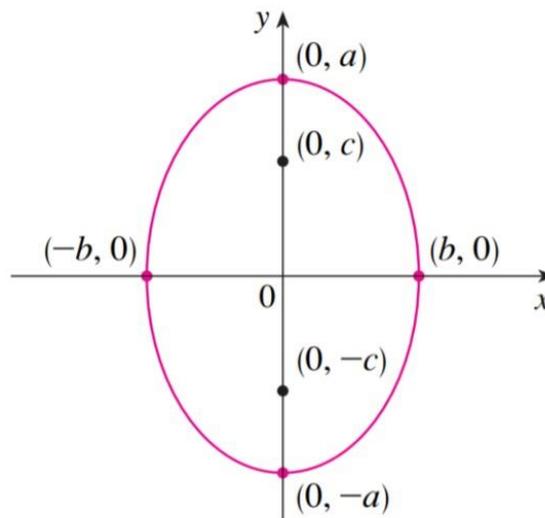
Se ambos os membros da equação forem divididos por  $a^2b^2$ , temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O segundo caso consiste se os focos de uma elipse estiverem localizados no eixo  $Oy$  em  $(0, \pm c)$ , conforme a Figura 20. Então, a equação da elipse será:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

**Figura 41 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas com focos no eixo  $y$ .**



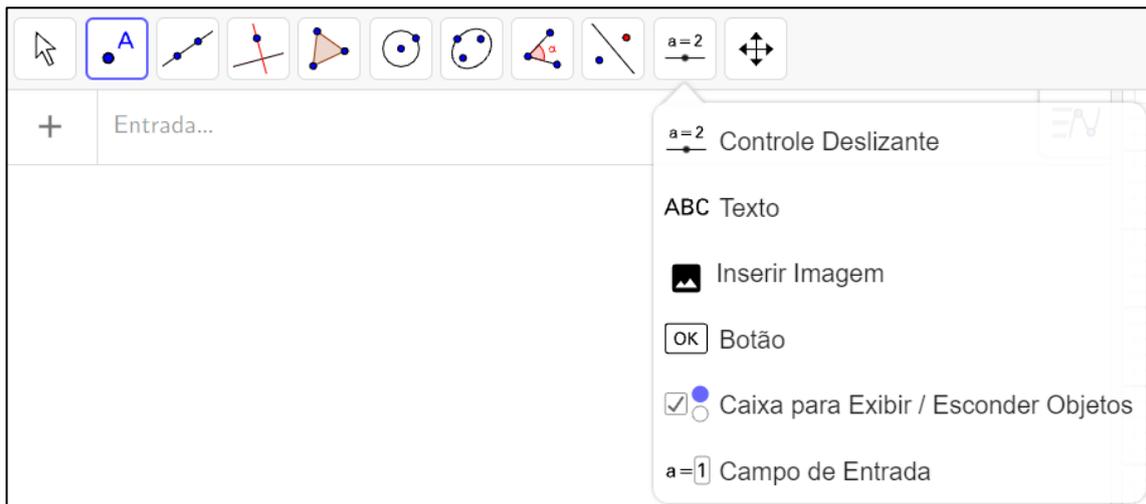
Fonte: dados da pesquisa

### 6.5 Quinto Encontro – Construção da Elipse no GeoGebra a partir da equação reduzida

Este momento foi dedicado a construção de uma elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo das abscissas, essa construção foi realizada a partir da equação reduzida e dos elementos da elipse abordadas no último encontro.

Para o início da construção ocultamos os eixos e as malhas no GeoGebra para que a visualização da elipse e de seus elementos ficassem mais evidentes, já que trabalharemos de forma generalizada utilizando a ferramenta de controle deslizante, como ilustra a figura 42.

**Figura 42 – Ferramenta controle deslizante do GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

Para a utilização da ferramenta do controle deslizante, clicamos em qualquer lugar livre na janela de visualização para criar um controle deslizante para um número ou ângulo. Imediatamente é apresentada uma janela de diálogo que permite a especificação do nome, intervalo e incremento do número ou ângulo, bem como o alinhamento e largura do controle deslizante.

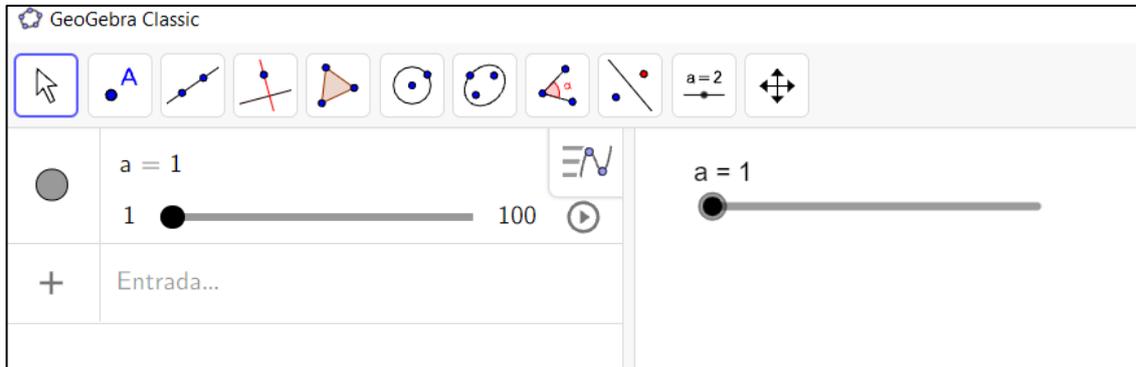
Para a nossa construção utilizamos o nome do controle deslizante  $a$  com intervalo definido entre 1 e 100 com incremento 1, como mostra a figura 43.

**Figura 43 – Configuração do controle deslizante  $a$ .**

Fonte: dados da pesquisa

Como apresentado na figura 44, após as configurações na janela de diálogo o controle deslizante é ilustrado dessa forma na janela de visualização.

**Figura 44 – Controle deslizante  $a$ .**



Fonte: dados da pesquisa

Seguindo a construção da elipse a partir de sua equação reduzida, repetimos os mesmos passos para a construção do controle deslizante  $b$ , com as mesmas configurações do controle deslizante  $a$ .

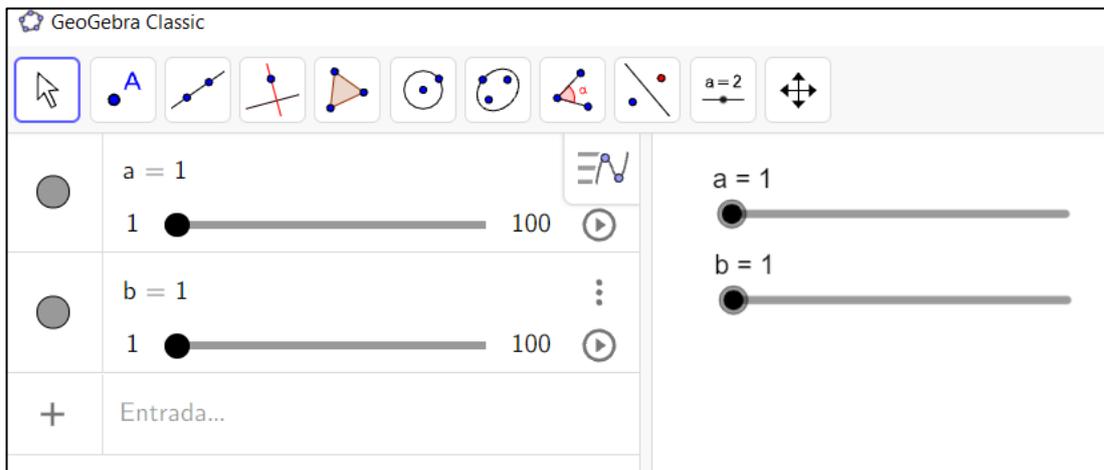
**Figura 45 – Configuração do controle deslizante  $b$ .**

The image shows the 'Controle Deslizante' dialog box. The title is 'Controle Deslizante'. The 'Nome' field is set to 'b = 1'. There are three radio buttons: 'Número' (selected), 'Ângulo', and 'Inteiro'. Below the radio buttons, there are three tabs: 'Intervalo' (selected), 'Controle Deslizante', and 'Animação'. Under the 'Intervalo' tab, there are three input fields: 'min' (set to 1), 'max' (set to 100), and 'Incremento' (set to 1). At the bottom, there are two buttons: 'CANCELAR' and 'OK'.

Fonte: dados da pesquisa

Após os controles deslizantes  $a$  e  $b$  serem configurados, eles ficaram dispostos na janela de visualização conforme apresenta a figura 46.

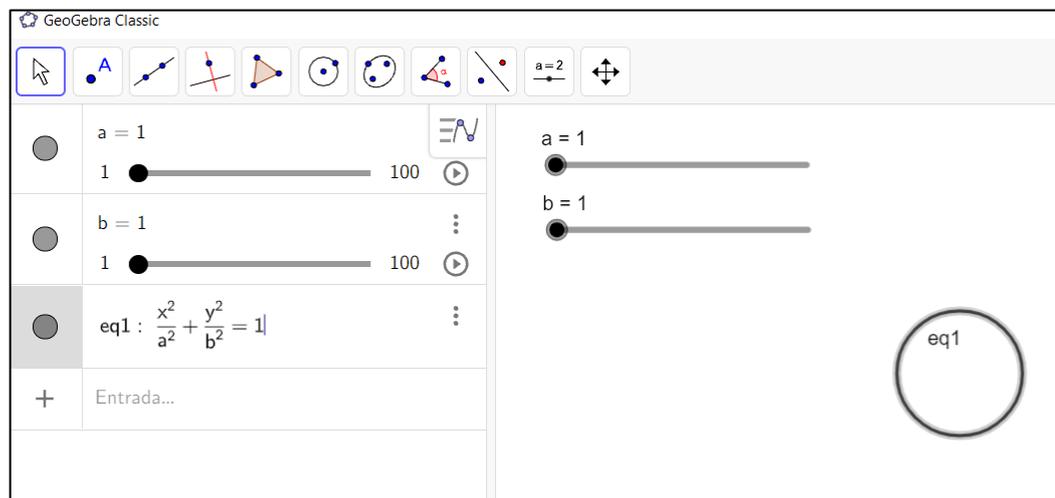
**Figura 46 – Controles deslizante  $a$  e  $b$ .**



Fonte: dados da pesquisa

Assim, com os controles deslizantes configurados, no campo de entrada, digitamos a equação da elipse centrada na origem com eixo maior no eixo das abscissas, conforme ilustra a figura 47.

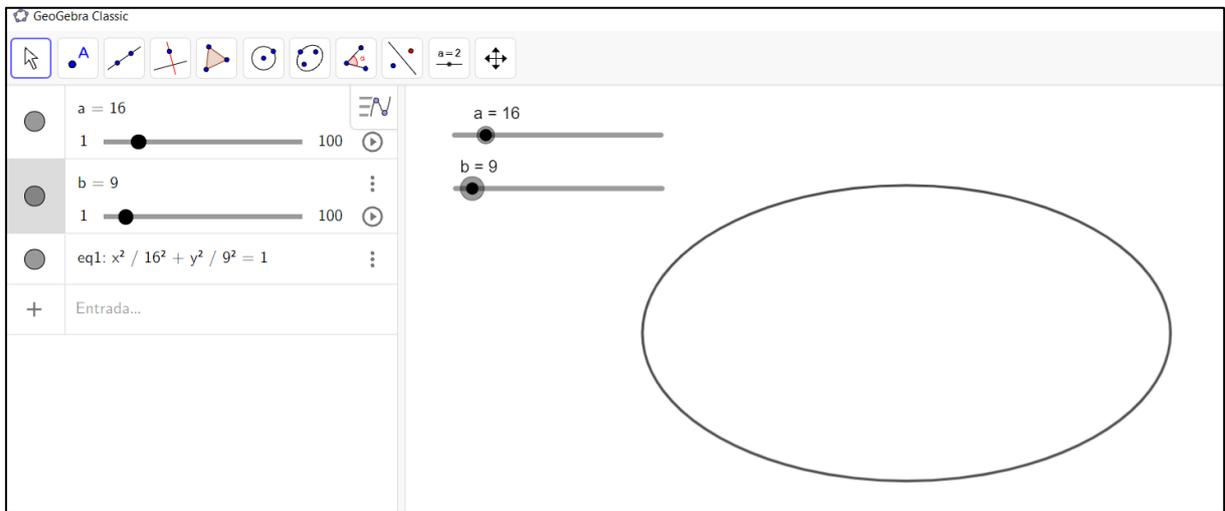
**Figura 47 – Equação da elipse no campo de entrada.**



Fonte: dados da pesquisa

Neste momento, o Professor-Pesquisador apresentou que os controles deslizantes  $a$  e  $b$  poderiam ser alterados, conforme ilustra a figura 48.

**Figura 48 – Elipse com eixo maior em x.**

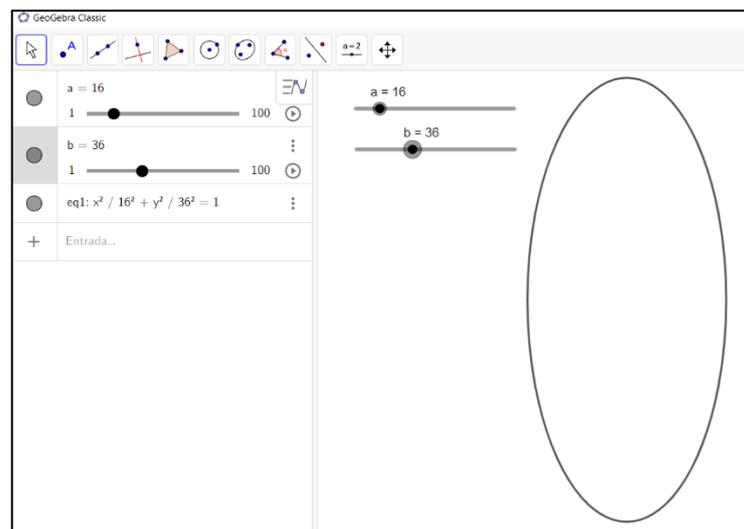


Fonte: dados da pesquisa

Logo, os alunos foram fazendo as modificações e relacionando os conhecimentos construídos nas aulas anteriores. Destacamos aqui o comentário de uma aluna:

- *Se o valor de b for maior que o de a, o eixo maior da elipse fica no eixo y.*

**Figura 49 – Elipse com eixo maior em x.**



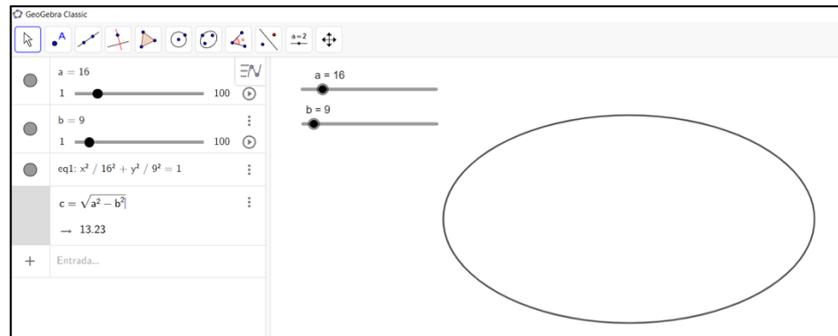
Fonte: dados da pesquisa

Continuando a construção da elipse e de seus elementos a partir da equação reduzida, o Professor-Pesquisador ressaltou que, como a equação inserida no campo de entrada, era de

uma elipse centrada na origem com eixo maior no eixo das abscissas o controle deslizante  $a$  sempre deveria estar maior que o controle deslizante  $b$ .

Então, inserimos no campo de entrada a equação dos focos da elipse, como mostra a figura 47, no GeoGebra inserimos o seguinte comando:  $c = \text{srqt}(a^2 - b^2)$ .

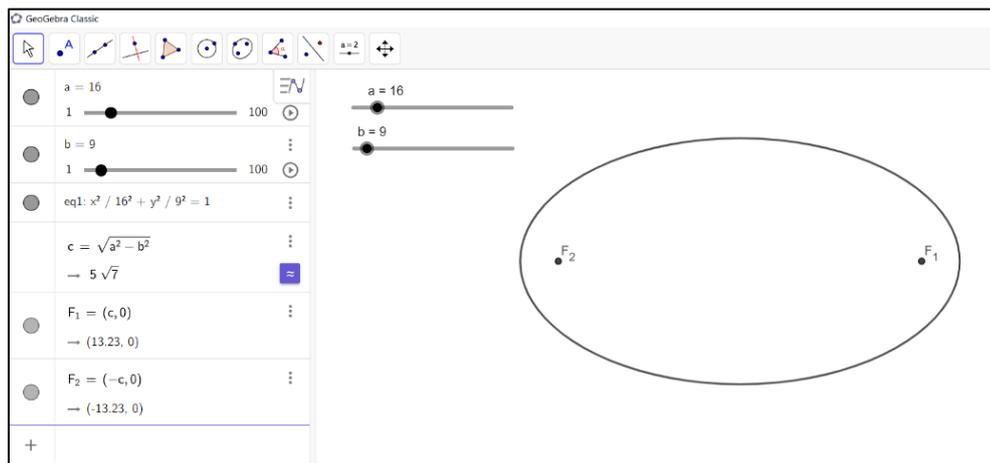
**Figura 50 – Equação dos focos.**



Fonte: dados da pesquisa

Após esta etapa, inserimos as coordenadas dos focos da elipse no comando de entrada  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$ .

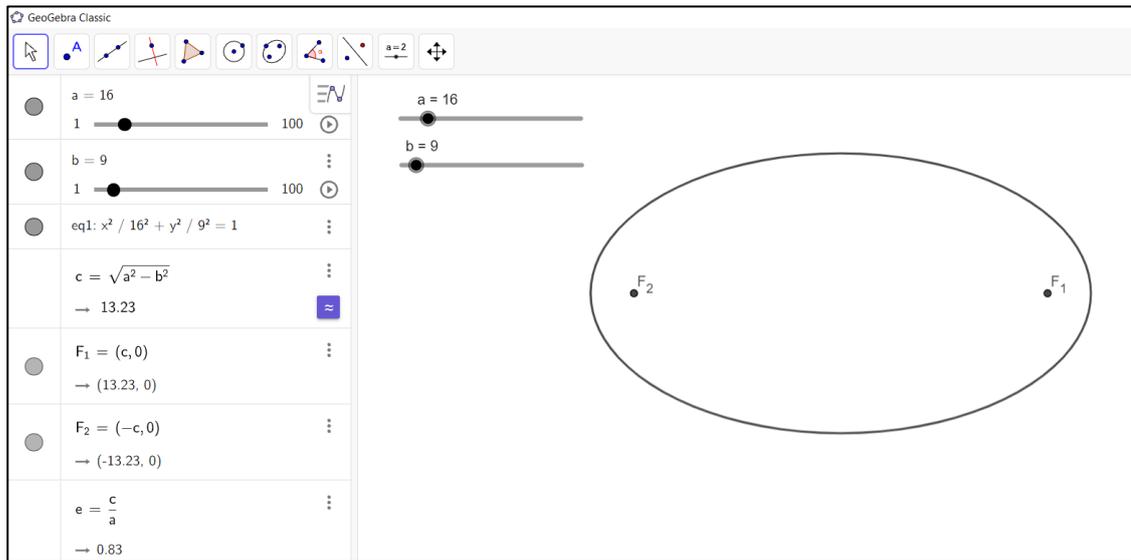
**Figura 51 – Coordenadas dos focos  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$ .**



Fonte: dados da pesquisa

Também inserimos a equação da excentricidade da elipse segundo a figura 52.

**Figura 52 – Excentricidade no campo de entrada.**

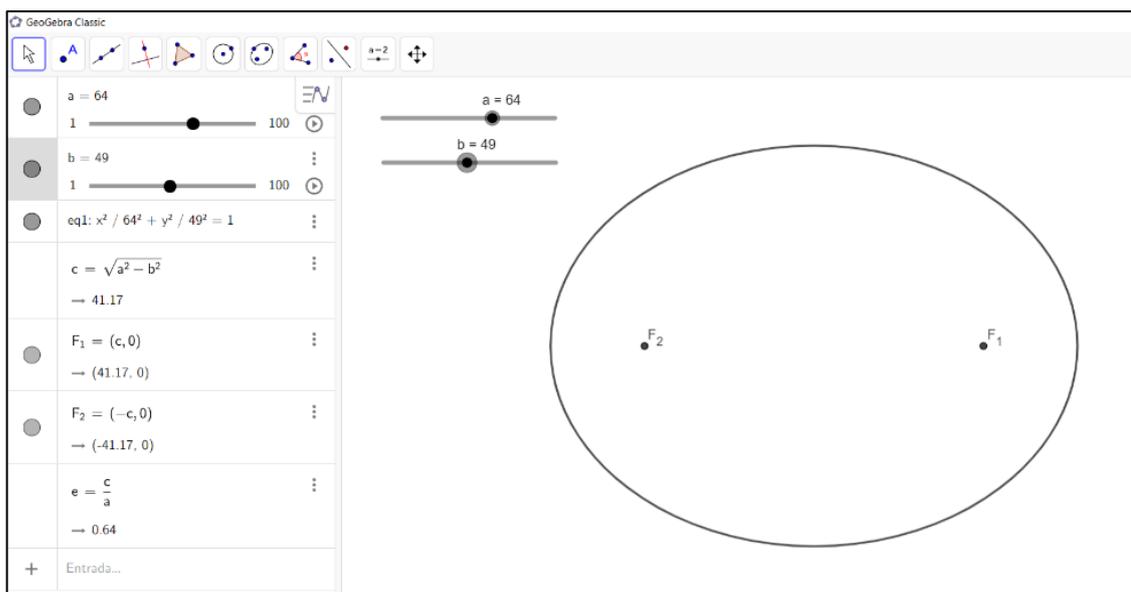


Fonte: dados da pesquisa

Após essas etapas, reservamos um momento para que os alunos pudessem manusear a elipse construída e analisar o comportamento de seus elementos. Ressaltamos outro comentário de um aluno:

- *Quanto maior a diferença entre os valores de  $a$  e  $b$ , maior será a distância entre os dois focos.*

**Figura 53 – Manuseio da distância focal.**



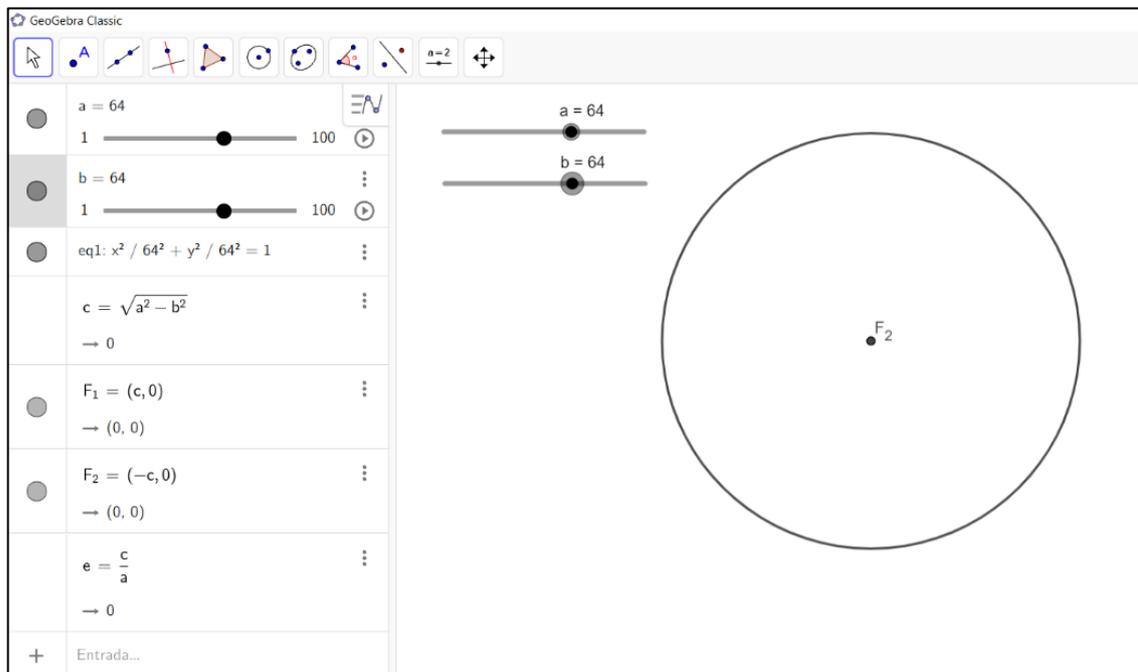
Fonte: dados da pesquisa

A partir do comentário desse aluno, outro aluno disse:

- *Isso mesmo. E quanto menor a diferença, os focos vão se aproximando e a elipse vai ficando mais arredondada. Se os focos ficarem em cima do outro, a elipse vira uma circunferência e sua excentricidade fica igual a 1.*

Diante disso, o Professor-Pesquisador instigou para que a partir desses comentários os alunos fizessem essas modificações no arquivo construído no GeoGebra, como ilustra a figura 54.

**Figura 54 – Focos coincidentes.**



Fonte: dados da pesquisa.

Durante todas as etapas, os alunos fizeram conexões entre técnicas operatórias e conteúdos já aprendidos, viabilizando a percepção do conceito nuclear da elipse, trabalhar com o que é nuclear, o que é a relação geral principal do objeto matemático é valioso para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e se demonstrou importante ao longo da realização desse experimento didático-formativo.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa, conforme retratada, apresentou como objetivo principal, analisar as contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvimental e da Investigação Matemática no processo de ensino-aprendizagem da elipse na 3ª série do Ensino Médio. Com base nos pressupostos de nosso referencial teórico, buscamos responder ao seguinte problema de pesquisa: como a Investigação Matemática com o GeoGebra, baseada nos pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvimental, poderia contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da elipse, na 3ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Rafael Nascimento?

Após todas as reflexões tendo esta pergunta como norte, voltamos para a análise dos dados coletados e ao referencial teórico adotado nesta pesquisa.

Para tanto, construímos um experimento didático-formativo que foi apresentado no quarto capítulo deste trabalho. O experimento didático-formativo, em nossa avaliação, além de contribuir para que o aluno percebesse o conceito nuclear da elipse através da resolução do problema gerador e da utilização do software GeoGebra. Na aplicação do experimento, os alunos conseguiram usar o conceito nuclear da elipse na resolução do problema gerador, bem como, nas atividades desenvolvidas utilizando o GeoGebra.

Ressaltamos o movimento de ascensão do abstrato ao concreto, durante o desenvolvimento do experimento-didático formativo meio das atividades realizadas, para que o aluno de forma ativa experimentasse movimento, formando uma unidade dialética em benefício do avanço cognitivo.

O desenvolvimento desta pesquisa apoiada na Teoria do Ensino Desenvolvimental e na Investigação Matemática com o GeoGebra foi de suma importância para a análise da ampliação da Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos durante a aplicação experimento didático-formativo. Pois, todas as atividades, partindo do problema gerador, exploraram diversas técnicas operatórias, manipulação dos objetos matemáticos no software GeoGebra, mesmo que, algumas vezes, alguns conteúdos já fossem conhecidos, corroboraram para a construção de um novo conhecimento.

Nesta pesquisa, através de nosso produto educacional (experimento didático-formativo), foi apresentada uma alternativa para se desenvolver o ensino de Matemática de forma participativa, onde o professor atua como mediador do conhecimento e os alunos são protagonistas na construção do conhecimento matemático.

A Teoria do Ensino Desenvolvimental e a Investigação Matemática com o GeoGebra colaboraram positivamente para o percurso desta pesquisa. Podemos notar que os alunos durante a aplicação do experimento didático-formativo foram protagonistas na construção de seu próprio conhecimento, desde a primeira etapa da resolução do problema gerador.

Durante todas as etapas, os alunos fizeram conexões entre técnicas operatórias e conteúdos já aprendidos, viabilizando a percepção do conceito nuclear da elipse, trabalhar com o que é nuclear, o que é a relação geral principal do objeto matemático é valioso para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e se demonstrou importante ao longo da realização do nosso experimento didático-formativo sobre a Elipse.

Os materiais produzidos pelos alunos, os diálogos produzidos por meio de gravações de áudio e as observações anotadas no diário de campo do Professor-Pesquisador, nos levam a perceber os compartilhamentos de experiências e de construção do conhecimento.

Evidenciamos, também, o papel coadjuvante do *software* GeoGebra, onde os alunos conseguiram perceber a relação entre o tratamento geométrico e algébrico da elipse, durante os encontros, facilitando o entendimento dos elementos e da resolução do problema gerador. Para finalizar nossas considerações, destacamos a importância da Teoria do Ensino Desenvolvimental e da Investigação Matemática com o GeoGebra para a nossa análise das contribuições no ensino da Elipse na 3ª série do Ensino Médio, pois possibilitou a ressignificação da prática docente do Professor-Pesquisador. A utilização desse referencial teórico em nossa pesquisa nos permitiu evidenciar a importância de o aluno ser protagonista no processo de construção do conhecimento e a necessidade da atuação do professor como mediador desse conhecimento.

## REFERÊNCIAS

- AQUINO, O. F.. O experimento didático-formativo: contribuições para a pesquisa em didática desenvolvimental. E-Book: **Didática e Prática de Ensino na relação com a Formação de Professores**, p. 04645-04657, 2014.
- BOCCALETTI, D.; PUCACCO, G. Theory of Orbits. Berlin: Springer, 1996. v. 1.
- BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.
- DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental**. Moscú: Editorial Progreso, 1988a.
- DEAKIN, M. A. B. Hipatia and her mathematics. **The American Mathematical Monthly**, v. 101, n. 3, p. 234–243, 1994.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2012.
- FREITAS, H. C. L. **As novas políticas de formação dos educadores. In: Formação do educador, Educação, demandas sócias e utopias**. Ijuí: Editora Unijuí, 2007.
- FREITAS, R. A. M. M. **Formação de conceitos na aprendizagem escolar e atividade de estudo como forma básica para organização do ensino**. *Educativa*, v. 19, n. 2, p. 388, 2017.
- FREITAS, R. A. M. M.. Pesquisa em didática: o experimento didático formativo. In: Encontro de Pesquisa em Educação da ANPED Centro-Oeste, 2010, Uberlândia. **X Encontro de Pesquisa em Educação da ANPED Centro-Oeste: Desafios da Produção e Divulgação do Conhecimento**. Uberlândia, 2010. v. I. p. 1-11.
- GONZÁLEZ, R. F. (2012). A configuração subjetiva dos processos psíquicos: avançando na compreensão da aprendizagem como produção subjetiva. In A. M. Martinez, B. J. L. Scoz, & M. I. S. Castanho (Orgs.), **Ensino e aprendizagem: a subjetividade em foco** (pp. 21-41). Brasília: Líber Livro.
- KATZ, V. J. A. History Of Mathematics. New York: Haper Collins College Publishers, 1993.
- KAUARK, S. F.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. **Metodologia de Pesquisa: um guia prático**. Itabuna: Via Litterarum, 2010. 88p.
- LARSON, R.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. **Cálculo com Geometria Analítica**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998. v. 2.
- LEONTIEV, A. O desenvolvimento do psiquismo. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.
- LEONTIEV, A.; O Desenvolvimento do Psiquismo. São Paulo, Centauro, 2004.

LEONTIEV. **O desenvolvimento do psiquismo**. Trad. Rubens Eduardo Frias. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: Edufu, 2015, p. 327-362.

LIBÂNEO, J. C. Didática e epistemologia: para além do debate entre a didática e as didáticas específicas. In: VEIGA, Ilma P.A. e D'ÁVILA, Cristina (orgs.). **Profissão docente: novos sentidos, novas perspectivas**. Campinas (SP): Papirus, 2008.

LIBÂNEO, J. C. Didática e epistemologia: para além do embate entre a didática e as didáticas específicas. In: VEIGA, Ilma P. A.; D'ÁVILA, Cristina (orgs.). **Profissão docente: novos sentidos, novas perspectivas**. Campinas: Papirus Editora, 2008.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vygotsky, Leontiev e Davídov: contribuições da teoria histórico-cultural para a didática. In: SILVA, Carlos C. e SUANNO, Marilza V. R. **Didática e interfaces**. Rio de Janeiro: Deescubra, 2007.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, Andréa M.; PUENTES, Roberto V. (Org.). **Ensino Desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LOPES, J. F.; SEIXAS, W. **Cônicas e aplicações**. São Paulo: Dissertação Mestrado Profissional em Matemática Universitária - Departamento de Matemática - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP, 2011.

MARX, K. **Contribuição à crítica da economia política**. Tradução Florestan Fernandes. 2. ed. São Paulo: Expressão Popular, 2008.

MARX, K. **Manuscritos econômico-filosóficos e outros textos escolhidos**. São Paulo: Abril Cultural, 1974. (Os Pensadores).

MARX, K.; ENGELS, F. **Ideologia Alemã (Feuerbach)**. 11. ed. Tradução do alemão por José Carlos Bruni e Marco Aurélio Nogueira. São Paulo: Hucitec, 1999.

MARX, K. **Contribuição para a crítica da economia política**. Lisboa: Editorial Estampa, 1974, pp. 228-237.

MORAES, S. P. G.; MOURA, M. O. **Avaliação do Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática: contribuições da teoria histórico-cultural**. Bolema, Rio Claro (SP), 2009.

MORETTI, V. D.; ASBAHR, F. DA S. F.; RIGON, A. J. O humano no homem: os pressupostos teórico-metodológicos da teoria histórico-cultural. **Psicologia & sociedade**, v. 23, n. 3, p. 477-485, 2011.

- OLIVEIRA, A. M.; CAPELLINI, S. A. **Desempenho de escolares na adaptação brasileira da avaliação dos processos de leitura.** Pró-fono Revista de Atualização Científica, v. 22, n. 4, p. 55-560, 2010.
- OLIVEIRA, B. A. A dialética do singular-particular-universal. In ABRANTES, A.; SILVA, N. MARTINS, S. (org.). **Método histórico-social na psicologia social.** Petrópolis: Vozes, 2005, p. 86-104.
- PERES, T. F. C. **Volume dos sólidos geométricos – um experimento de ensino baseado na teoria de V. V. Davydov.** Dissertação de Mestrado em Educação – Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2010.
- PICHETH, S. F.; CASSANDRE, M. P.; THIOLENT, M. J. M. (2016). **Analisando a pesquisa-ação à luz dos princípios intervencionistas: um olhar comparativo.** *Educação*, 39(4), s3-s13.
- PINO, A. **O social e o cultural na obra de Vygotsky.** *Educação & Sociedade. Revista quadrimestral de Ciências da Educação.* Centro de Estudos Educação e Sociedade (CEDES), Campinas, v. 21, n. 71, jul. 2000.
- PIRES, M. F. C. **O materialismo histórico-dialético e a Educação.** *Interface*, v. 1, n. 1, p. 83–94, 1997.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemática na sala de aula.** 3 ed. Belo Horizonte: autêntica, 2013.
- REGO, T. C. **Vygotsky - Uma Perspectiva Histórico-Cultural da Educação.** Petrópolis: Vozes, 2007.
- SATO, J. **As cônicas e sus aplicações.** Uberlândia: Dissertação Mestrado em Matemática - Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, 2004.
- STEWART, J. **Cálculo.** 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Vol. 2.
- TOSTA, C. G. VIGOTSKI E O DESENVOLVIMENTO DAS FUNÇÕES PSICOLÓGICAS SUPERIORES. **Perspectivas em Psicologia**, [S. l.], v. 16, n. 1, 2012.
- TRIPP, D. **Pesquisa-ação: uma introdução metodológica.** Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 3, set./dez. 2005, p. 443-466. Tradução de Lólio Lourenço de Oliveira.
- TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução a pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação.** São Paulo: Atlas, 2009.
- VAZ, D. A. F. **Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o GeoGebra.** *Revista Educativa*, v. 15, n. 1. Goiânia: Editora PUC Goiás, 2012. p. 39-51
- VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e linguagem**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

VILELA, D. S. Reflexão filosófica acerca dos significados matemáticos nos contextos da escola e da rua. In: KLUT, Verilda Speridião; ANASTACIO, Maria Queiroga Amoroso. (Orgs.). **Filosofia da educação matemática: debates e confluências**. São Paulo: Centauro, 2009. p. 81-96.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. S. Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VYGOTSKY, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In: VIGOTSKY, Lev Semenovich; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Alexis N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Tradução de Maria da Penha Villa.

WATARI, K. **Mecânica Clássica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2003.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014.

## APÊNDICES

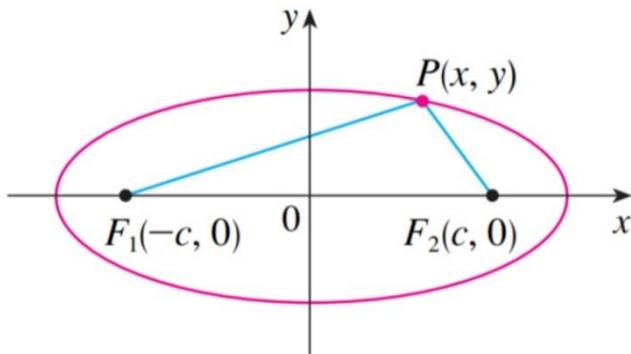
**APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL**

**O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA ELIPSE BASEADO NOS  
PRESSUPOSTOS DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL E DA  
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA**

**LUCAS MENDONÇA PEREIRA CUNHA  
DUELCI APARECIDO DE FREITAS VAZ**

JATAÍ

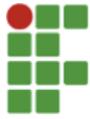
2023



LUCAS MENDONÇA PEREIRA DE CUNHA  
DUELCI APARECIDO DE FREITAS VAZ

**O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA ELIPSE BASEADO NOS  
PRESSUPOSTOS DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL E DA  
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA**

**Produto Educacional vinculado à dissertação: As Contribuições da Teoria do Ensino  
Desenvolvimental Aliada à Investigação Matemática com o GeoGebra para o Ensino da  
Elipse na 3ª Série do Ensino Médio**



**INSTITUTO FEDERAL**  
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS  
CÂMPUS JATAÍ

**LUCAS MENDONÇA PEREIRA CUNHA**

**O ENSINO DE ELIPSE NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO BASEADO NOS PRESSUPOSTOS DA TEORIAL DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL E NA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA**

Produto educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre(a) em Educação para Ciências e Matemática, defendido e aprovado, em 09 de fevereiro de 2023, pela banca examinadora constituída por: **Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz** - Presidente da banca / Orientador - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás; **Profa. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca** - Membro Interno - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás e **Prof. Dr. Leonardo Antônio Souto** - Membro externo - Universidade Estadual de Goiás. A sessão de defesa foi devidamente registrada em ata que depois de assinada foi arquivada no dossiê do(a) aluno(a).

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz  
Presidente da Banca (Orientador - IFG)

(assinado eletronicamente)

Profª. Dra. Regina Célia Bueno da Fonseca  
Membro Interno (IFG)

(assinado eletronicamente)

Prof. Dr. Leonardo Antônio Souto  
Membro Externo (UEG)

Documento assinado eletronicamente por:

- Leonardo Antonio Souto, Leonardo Antonio Souto - 234515 - Docente de ensino superior na área de pesquisa educacional - Ueg (01112580000171), em 08/03/2023 01:43:45.
- Regina Celia Bueno da Fonseca, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 04/03/2023 11:17:00.
- Duelci Aparecido de Freitas Vaz, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 01/03/2023 08:32:06.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 28/02/2023. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 379066  
Código de Autenticação: 809964a940



## APRESENTAÇÃO

Este produto educacional foi desenvolvido como parte da dissertação de Mestrado em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí e consiste em um experimento didático-formativo aportado nos pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvidor e na Investigação Matemática com o GeoGebra para o ensino da Elipse na 3ª série do Ensino Médio.

Ao elaborarmos este material, levamos em conta a motivação para o desenvolvimento da pesquisa, onde buscamos alternativas metodológicas para o ensino de Matemática, pois acreditamos que um ensino pautado na memorização e repetição de algoritmos não proporciona uma aprendizagem dinâmica e significativa.

Essa sequência didática tem como objetivo principal dinamizar o processo de ensino-aprendizagem da Elipse na 3ª série do Ensino Médio de acordo com os pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvidor e a Investigação Matemática com o GeoGebra.

No decorrer desse texto, é apresentada uma atividade que a partir de um problema gerador pode ser aplicada em sala de aula com o objetivo de, na resolução do problema, por parte do aluno, auxiliado pelo professor, chegar ao conceito nuclear da Elipse.

Este experimento didático-formativo foi aplicado em uma turma da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Rafael Nascimento em Montividiu - GO e desta aplicação obtivemos bons resultados, já que os alunos conseguiram atingir o conceito nuclear da Elipse a partir do problema gerador.

### 1 EXPERIMENTO DIDÁTICO-FORMATIVO

Para a elaboração do experimento didático-formativo, partimos da seguinte questão: “Como a Investigação Matemática com o GeoGebra, baseada nos pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvidor, poderia contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da elipse, na 3ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Rafael Nascimento?”

Assim, o experimento didático-formativo foi elaborado a partir dos pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvidor e da Investigação Matemática com o GeoGebra, ressaltando a importância da ação do professor como mediador e os alunos serem responsáveis pela construção de seu conhecimento.

Como referencial teórico, pautamos a pesquisa no trabalho de Davydov (1930-1998), que dedicou seus estudos ao Ensino Desenvolvimental. Essa teoria é um desdobramento da aplicação pedagógica da teoria histórico-cultural, “fundada por Vygotsky (1896-1934) e desenvolvida por Luria (1902-1977), Leontiev (1903-1979), Galperin, Elkonin (1904-1984), entre outros colaboradores” (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p.327).

Para Davydov, o estudo em ambientes escolares, se organizado, pode contribuir para o desenvolvimento mental da criança, sendo a formação de conceitos científicos uma etapa importante do processo de conhecimento, e o pensamento teórico, a etapa superior deste processo. E mais, fundamentado na teoria histórico-cultural de Vygotsky, elaborou o método do experimento didático-formativo com o objetivo de “investigar os processos de surgimento de novas formações mentais nos alunos durante a atividade de estudo” (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p.340).

Segundo Davydov (1988), o método de intervenção didática é considerado a forma mais eficiente de intervenção nos processos mentais dos alunos. Por ser um método de pesquisa, ele se baseia na organização e na reorganização dos programas de ensino e dos procedimentos necessários para concretizá-los, utilizando procedimentos que formam ativamente nos alunos um novo nível de desenvolvimento das capacidades mentais (DAVYDOV, 1988).

Assim, Freitas (2007), ao explicar que o experimento didático-formativo é uma investigação que resulta em conhecimento sobre as mudanças no sujeito durante o processo de ensino-aprendizagem, explica:

A investigação resulta em um conhecimento que busca explicar o objeto estudado (funções psicológicas), buscando também resultar em mudança qualitativa no sujeito investigado. No experimento didático, o que se busca é a explicação histórica das mudanças qualitativas no pensamento do sujeito, mudanças estas que são investigadas como uma cadeia complexa de processos inseparáveis de aprendizado, decorrentes da realização de uma tarefa proposta no experimento e contida no modo como este se encontra organizado. A tarefa proposta e os passos da tarefa estão ancorados em um determinado conceito científico a ser aprendido. A organização desses passos está ancorada em princípios teóricos da teoria histórico-cultural e da teoria do ensino desenvolvimental. Esses passos, ao serem cumpridos pelos sujeitos participantes exigem determinado movimento do pensamento, movimento este que pode resultar em mudanças na sua qualidade em relação ao conteúdo da tarefa, ou seja, o conceito científico. Em outras palavras: no decorrer do experimento acontece aquisição de atos mentais, atos esses que contribuem para reorganizar o pensamento, as operações mentais realizadas pelo sujeito. (FREITAS, 2007, p. 11)

Assim, nesta pesquisa, o experimento didático-formativo é concebido como um procedimento investigativo que permite a análise da aprendizagem do conceito de Elipse, ressaltando a relação entre a organização do ensino fundamentado nos pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvimental e da Investigação Matemática com o GeoGebra, de modo que os

conhecimentos apropriados sejam mediadores de ações mentais, que resultam em mudanças nas funções cognitivas.

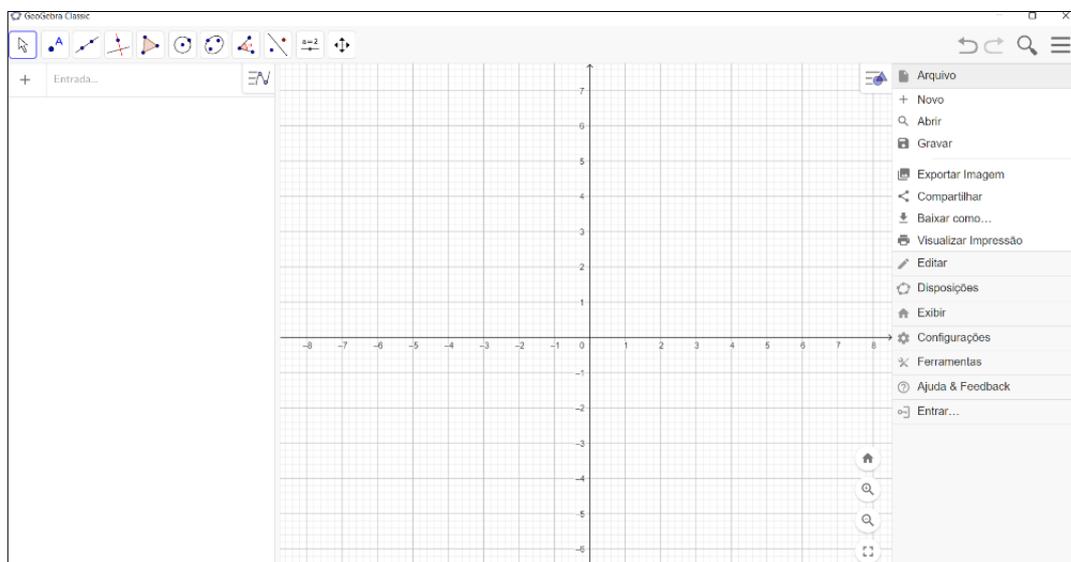
O experimento didático-formativo buscou, dentre outras coisas, impulsionar o desenvolvimento cognitivo dos alunos, atuando no modo de estruturar o processo de ensino-aprendizagem da Elipse, passando por um processo de construção da relação nuclear desse conceito, seguido por uma modelação no software GeoGebra.

### 1.1 Primeiro encontro – Introdução ao software GeoGebra

No primeiro encontro o principal objetivo é a apresentação da interface do software GeoGebra e suas principais ferramentas.

Com a utilização de um projetor o professor apresenta a interface padrão do GeoGebra: barra de menus, barra de ferramentas, janela de álgebra, campo de entrada, janela de visualização e a lista de comandos, como ilustrado na figura 1.

**Figura 1 – Interface do software GeoGebra.**



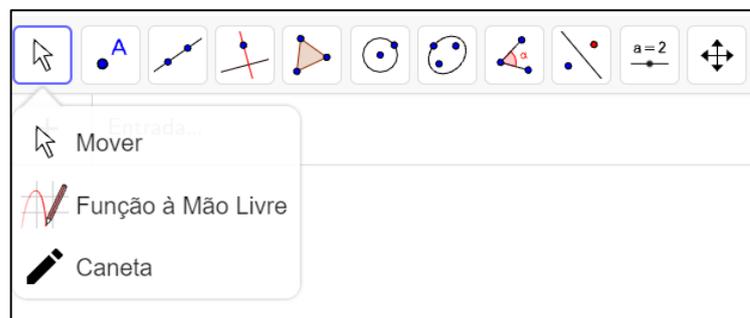
Fonte: dados da pesquisa

É importante ressaltar, nesse momento, que na barra de menus estão dispostas as opções para salvar o arquivo e as configurações gerais. Na barra de ferramentas são concentradas todas as ferramentas para a construção de pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos, interseção entre objetos, entre outros. A janela de álgebra é caracterizada pela exibição das coordenadas, equações, medidas e outras características dos objetos

construídos. O campo de entrada é dedicado a digitação de comandos e/ou equações. Na janela de visualização são apresentados os gráficos dos objetos que possuem representação geométrica.

Como as ferramentas mais utilizadas estão na barra de ferramentas, é importante fazer uma breve apresentação de cada ferramenta e suas principais aplicabilidades, conforme as figuras 15-25.

**Figura 2 – Ferramenta mover do GeoGebra.**



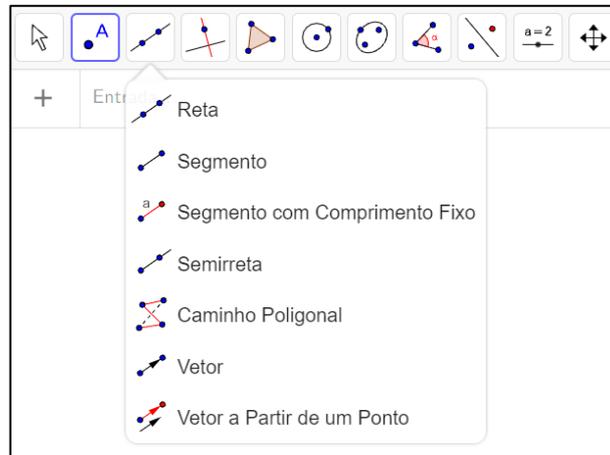
Fonte: dados da pesquisa

**Figura 3 – Ferramenta ponto do GeoGebra.**



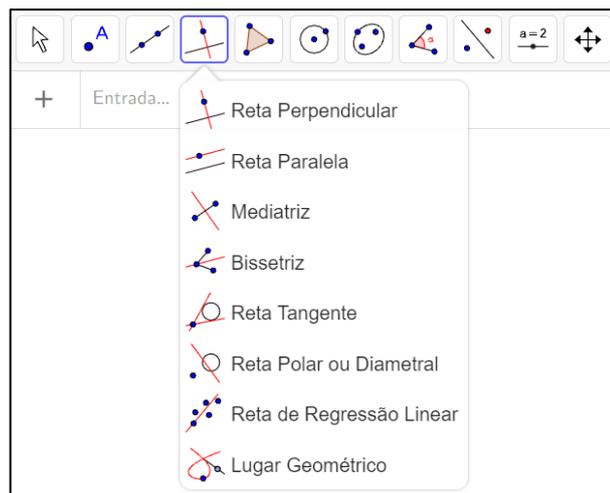
Fonte: dados da pesquisa

**Figura 4 – Ferramenta reta do Geogebra.**



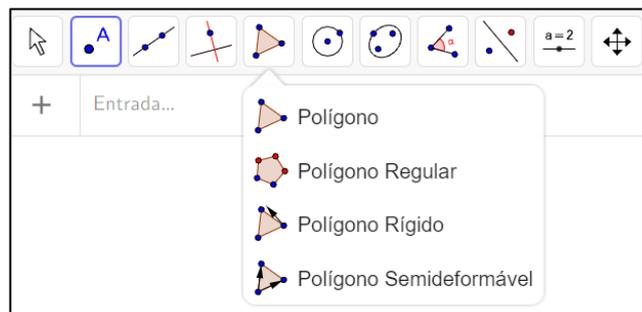
Fonte: dados da pesquisa

**Figura 5 – Ferramenta reta perpendicular no GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

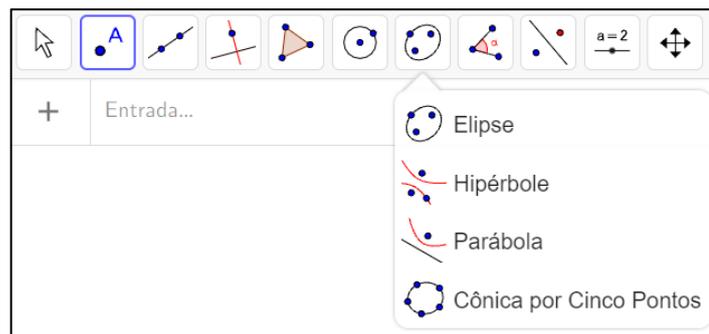
**Figura 6 – Ferramenta polígono do GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

**Figura 7 – Ferramenta círculo do GeoGebra.**

Fonte: dados da pesquisa

**Figura 8 – Ferramenta cônicas do GeoGebra.**

Fonte: dados da pesquisa

**Figura 9 – Ferramenta ângulo do GeoGebra.**

Fonte: dados da pesquisa.

**Figura 10 – Ferramenta reflexão do GeoGebra.**



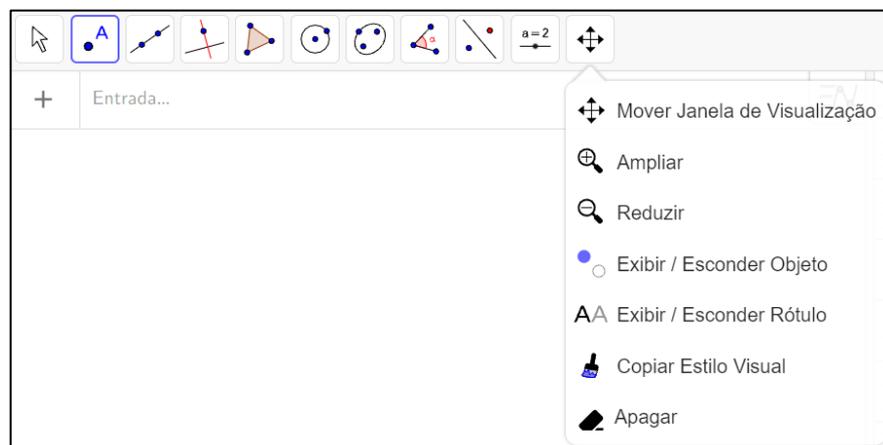
Fonte: dados da pesquisa

**Figura 11 – Ferramenta controle deslizante.**



Fonte: dados da pesquisa

**Figura 12 – Ferramenta mover do GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

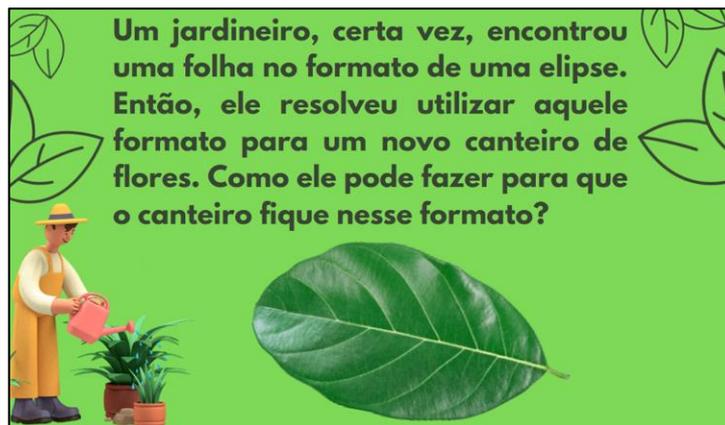
É importante ao finalizar essa atividade, reservar um momento final para que os alunos possam manusear as ferramentas e criar objetos de forma aleatória, destacando a principal funcionalidade do software que é integrar os tratamentos algébricos e geométricos dos objetos matemáticos.

## 1.2 Segundo Encontro – Problema Gerador

Neste encontro o principal objetivo é a apresentação e a resolução do problema gerador para que os alunos possam identificar o conceito nuclear da elipse.

Neste encontro deverá ser entregue a cada aluno o problema gerador de forma impressa para o início da resolução, a partir da leitura individual. Após essa etapa o problema pode ser projetado para toda a turma para que seja realizada uma leitura em grupo e o compartilhamento de possíveis estratégias para a resolução do problema.

**Figura 13 – Problema do jardineiro.**



Fonte: dados da pesquisa

Este problema motivador cumpre os quatro passos da metodologia da Investigação Matemática em Sala de Aula de Ponte et al (2013, p. 21). Pois, a exploração e a formulação da questão, já é intrínseca ao problema e propõe o levantamento de conjecturas.

Nesse momento o software GeoGebra não será utilizado, pois a intenção é que os alunos tentem resolver o problema a partir de conhecimentos prévios. O professor pode apresentar algumas questões auxiliares como:

- *Se a folha encontrada pelo jardineiro tivesse o formato de um quadrado, de um retângulo ou de um círculo? Como ele poderia fazer o canteiro de flores nesses formatos?*

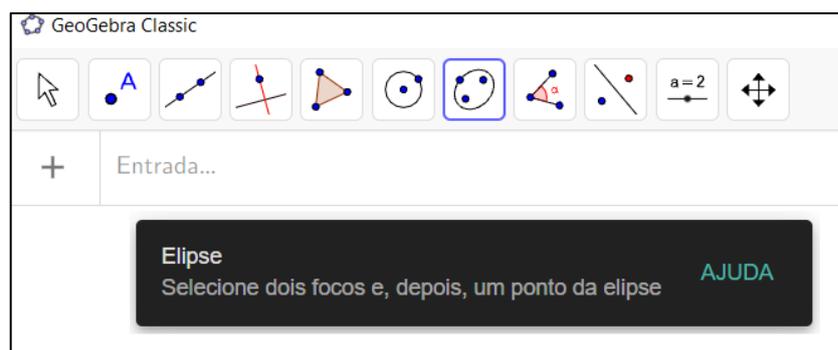
Ao finalizar a atividade do problema motivador, a intenção é que os alunos se sintam desafiados e empolgados para a resolução. Logo, em consonância com nosso referencial teórico a interação coloca em movimento vários processos de desenvolvimento que, sem a ajuda externa, seriam impossíveis de ocorrer. Esses processos se internalizam e passam a fazer parte das aquisições do seu desenvolvimento individual (REGO, 2007, p. 74).

### 1.3 Terceiro encontro – Construção da Elipse no GeoGebra

Este encontro é dedicado a construção da elipse utilizando o software GeoGebra a partir da resolução do problema gerador do encontro anterior. Durante essa atividade, o objetivo é atingir a Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos, através da utilização do problema gerador e do software GeoGebra, pelas relações com os colegas e a mediação da atividade pelo professor. Com a utilização do GeoGebra é possível a testagem de conjecturas e a integração entre os tratamentos algébricos e geométricos da elipse.

É esperado que os alunos, com o auxílio do professor, cheguem a um consenso, próximo a resolução do problema do jardineiro (problema gerador), que poderiam ser utilizadas duas estacas com uma corda inextensível com comprimento maior que a distância entre as estacas e esticando essa corda com outra estaca e marcando o terreno teria o formato de uma elipse. Então, a partir desse resultado será iniciado o estudo no software GeoGebra partindo da ferramenta elipse.

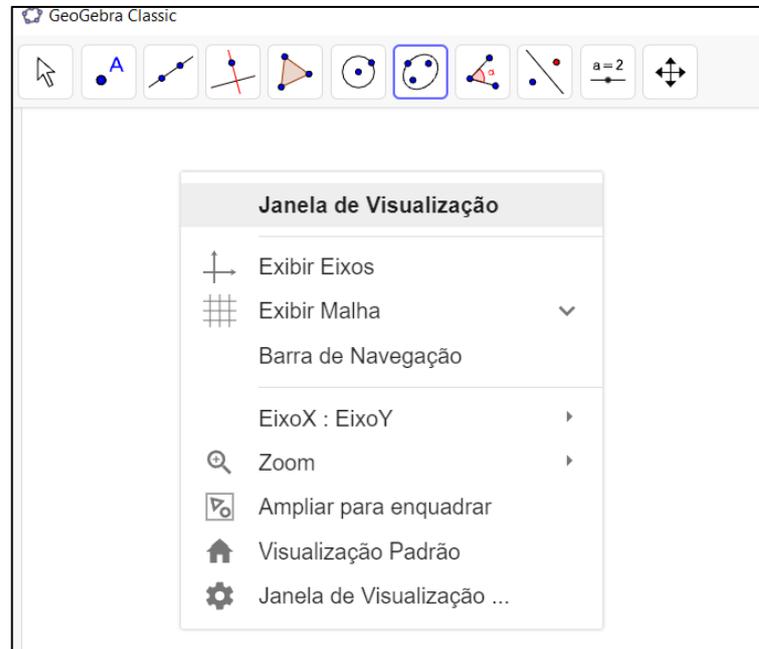
**Figura 14 – Ferramenta elipse do GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

Então com a mediação do professor a construção da elipse pode ser iniciada a partir da ferramenta de mesmo nome situada na barra de menus do GeoGebra. Para o início da construção, os eixos e a malha quadriculada deverão ser ocultados da janela de visualização utilizando o botão direito do mouse, conforme a figura 15.

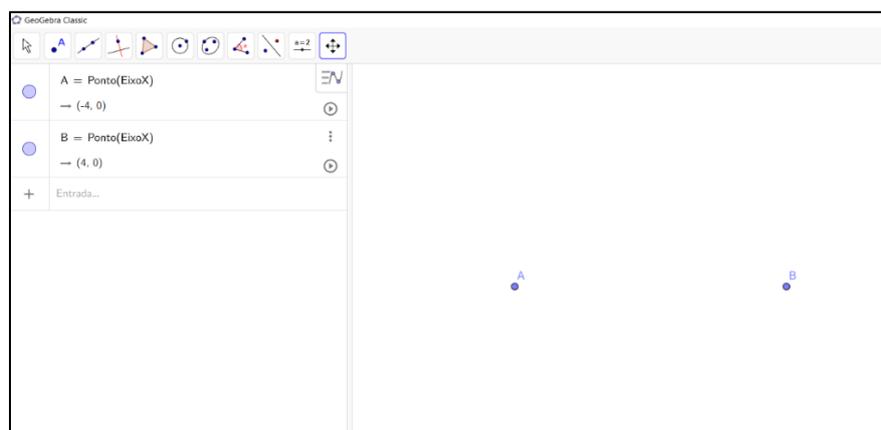
**Figura 15 – Ferramenta eixos e malhas no GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

Em seguida, são marcados dois pontos aleatórios A e B, utilizando a ferramenta ponto, representando as estacas da resolução do problema do jardineiro (problema gerador), conforme a figura 16.

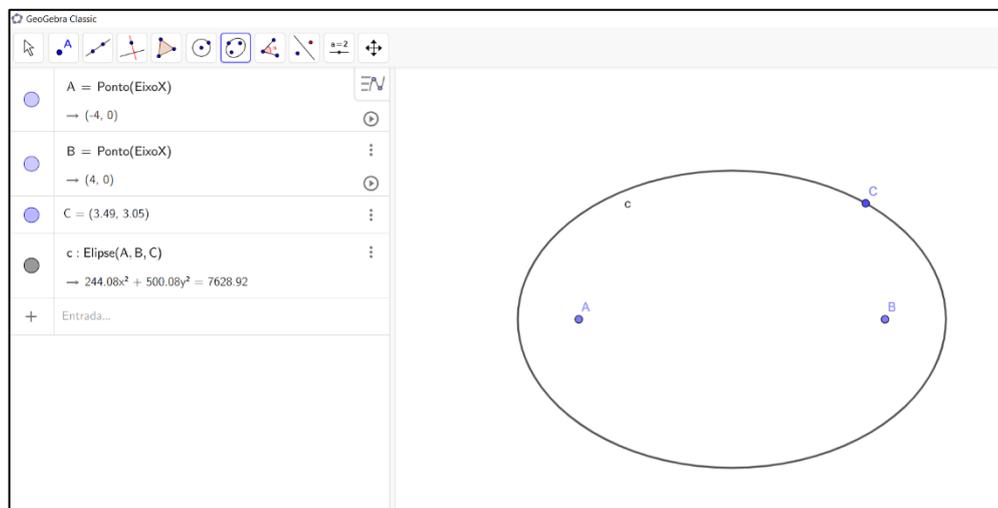
**Figura 16 – Criação de dois pontos no GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa.

Após essa etapa utilizando a ferramenta elipse, conforme orientação do próprio software, são selecionados os dois pontos já construídos A e B (estacas) e marcado o ponto C que representa a estaca que estaria esticando as cordas da resolução do problema.

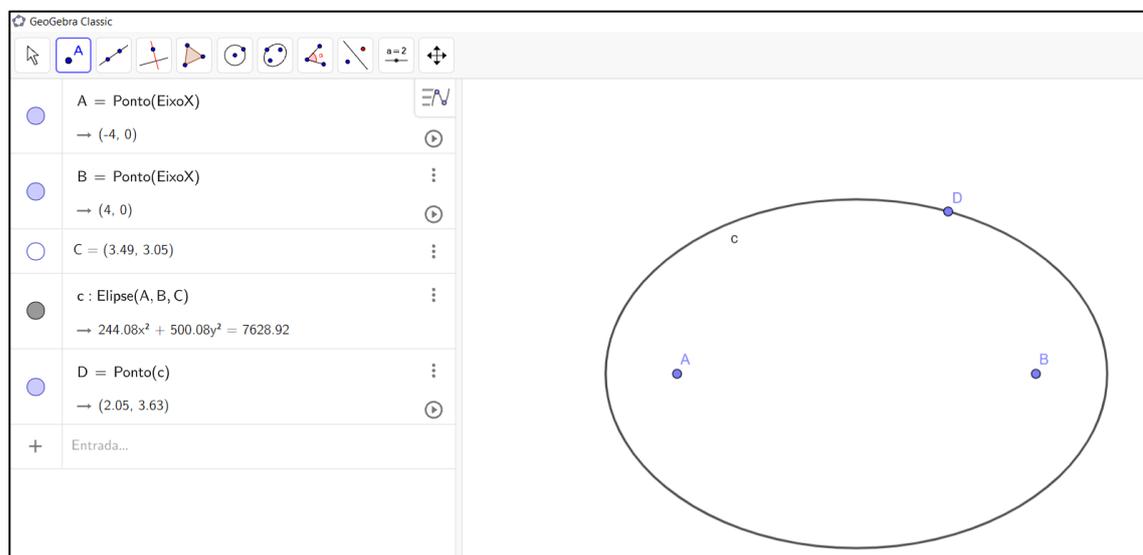
**Figura 17 – Construção da elipse no GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

Para evidenciarmos a resposta do problema do jardineiro (problema gerador) encontrada na outra aula, ocultamos o ponto C da elipse, e com a ferramenta ponto marcamos um novo ponto na Elipse, conforme a figura 18.

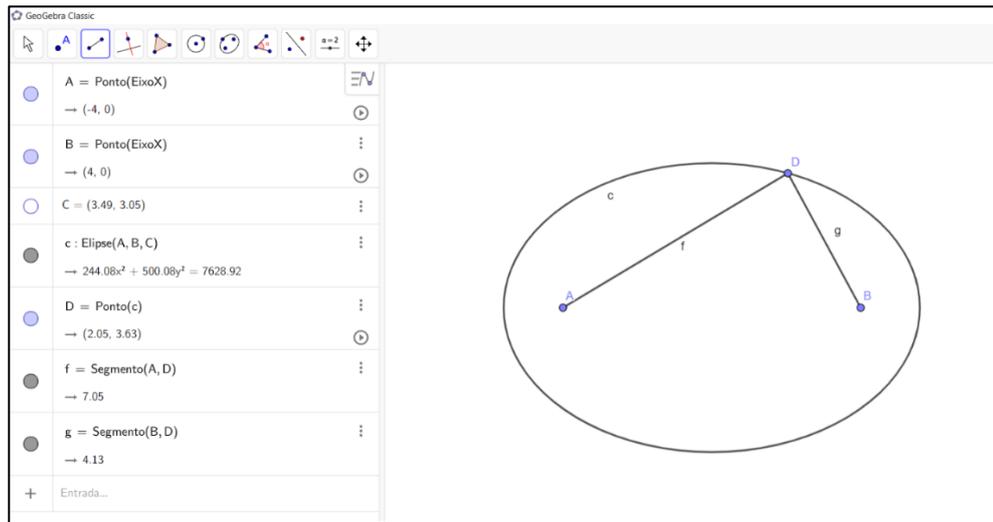
**Figura 18 – Ponto da elipse no GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa.

Em seguida, utilizando a ferramenta segmento de reta, marcamos os segmentos AD e BD, ilustrando a corda da resolução do problema.

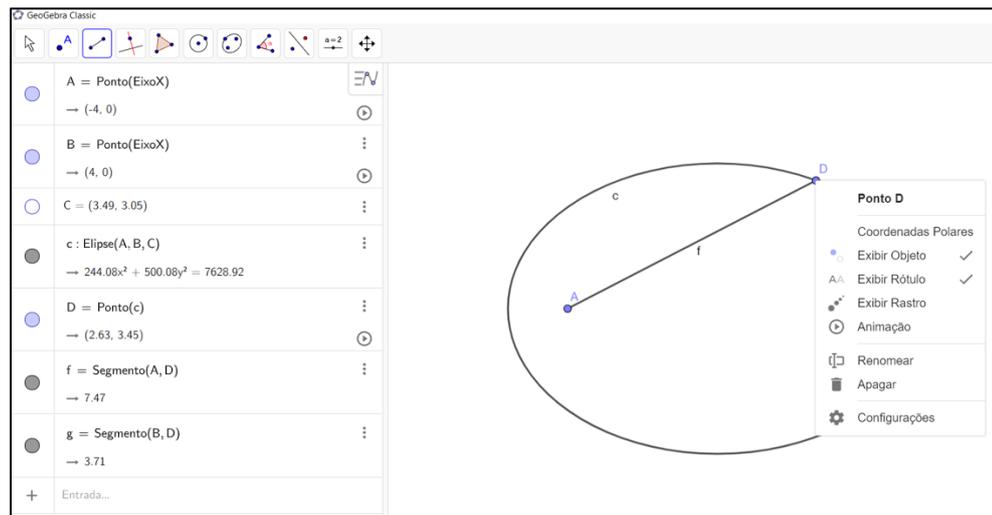
**Figura 19 – Segmentos de reta na elipse.**



Fonte: dados da pesquisa

Com essa construção, conseguimos ilustrar a resolução do problema gerador, onde um aluno chegou à conclusão de que se o jardineiro fixa uma corda inextensível em duas estacas, com o comprimento da corda maior que a distância entre as duas estacas, e com a corda esticada fosse riscando o terreno, o desenho seria de uma elipse. Para essa ilustração no software GeoGebra, utilizamos o comando “animar” com o botão direito no mouse sobre o ponto D.

**Figura 20 – Animando um ponto da elipse.**

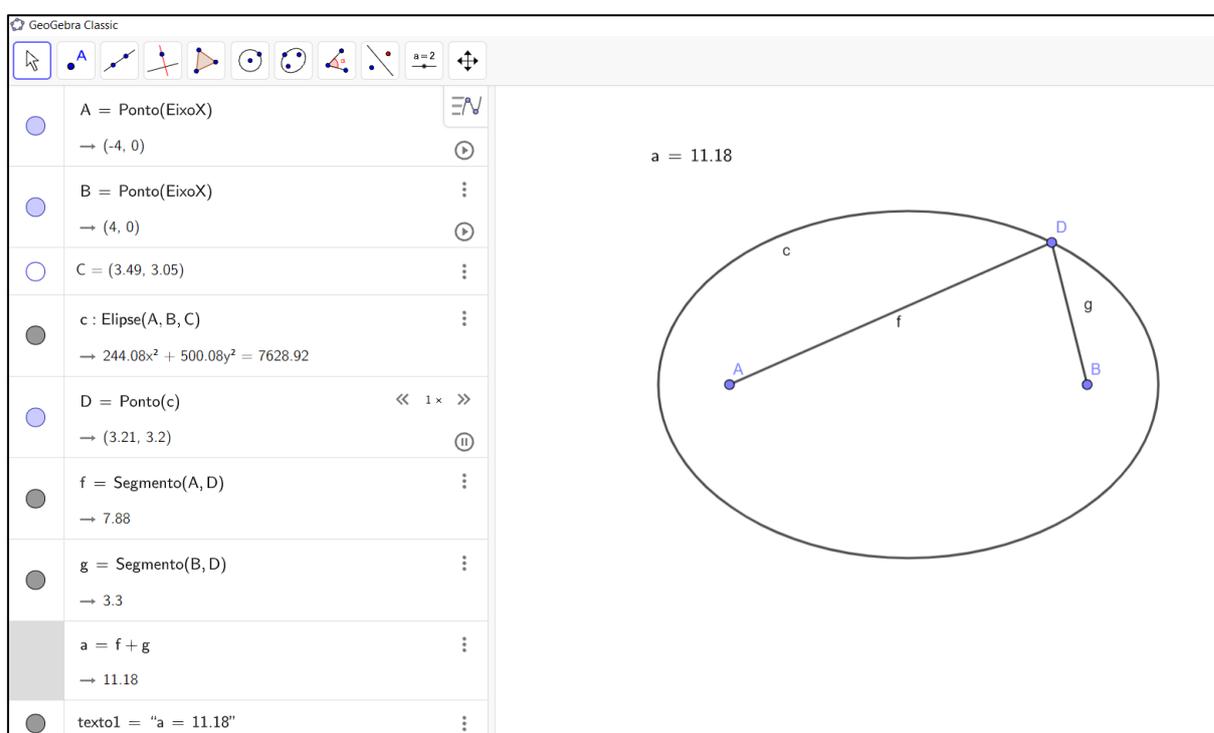


Fonte: dados da pesquisa.

Após esta etapa, é esperado que os alunos consigam compreender a resolução do problema através da construção realizada no GeoGebra.

Assim, o professor pode sugerir que as hipóteses sejam testadas utilizando a construção no GeoGebra. A seguir ilustramos a hipótese apresentada por uma aluna durante a aplicação do experimento didático-formativo. Então, como o segmento de reta AD, foi nomeado  $f$  e o segmento de reta BD, foi nomeado  $g$ ; no campo de entrada do software digitamos:  $f + g$ . Logo, validamos as hipóteses levantadas anteriormente, como ilustra a figura a seguir.

**Figura 21 – Soma dos comprimentos dos segmentos de reta.**



Fonte: dados da pesquisa

Diante do que foi exposto, após a construção realizada no GeoGebra e a animação do ponto espera-se que os alunos consigam enxergar a resolução do problema do jardineiro (problema gerador) de forma dinâmica, atingindo o conceito nuclear do objeto matemático Elipse, que é a sua própria definição: **elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.**

Segundo Vygotsky (2000, p.237), a formação de conceitos surge sempre durante o processo de resolução de algum problema que se coloca para o pensamento do adolescente, com a resolução desse problema surgem os conceitos. Quando o aluno entra em atividade realizando a construção da elipse no GeoGebra a partir da resolução do problema gerador, ele

está construindo conhecimento a partir do movimento do abstrato para o concreto. Assim, entendemos que o aluno, conseguiu atingir a ascensão dos conhecimentos abstratos aos conhecimentos concretos.

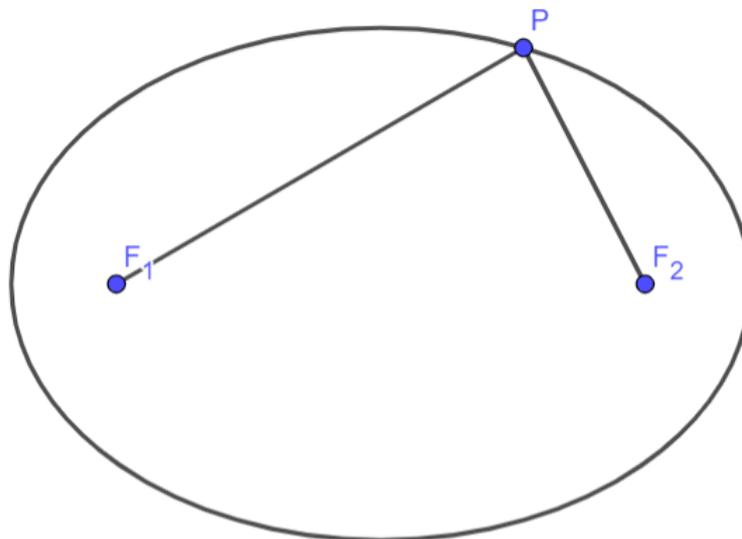
#### 1.4 Quarto encontro - Elementos da Elipse no GeoGbera

Neste momento, dedicamos a identificação dos elementos da elipse e suas equações reduzidas, utilizando o software GeoGebra, conforme figura. Partimos da definição da elipse para construção e identificação dos elementos da elipse.

Consideremos dois pontos distintos,  $F_1$  e  $F_2$ , tal que a distância  $d(F_1, F_2) = 2c$ , e um número real positivo  $a$  com  $2a > 2c$ .

Chamando de  $2a$  a constante relatada na definição, um ponto  $P$  pertence à elipse se, e somente se,  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , como ilustra a figura 22.

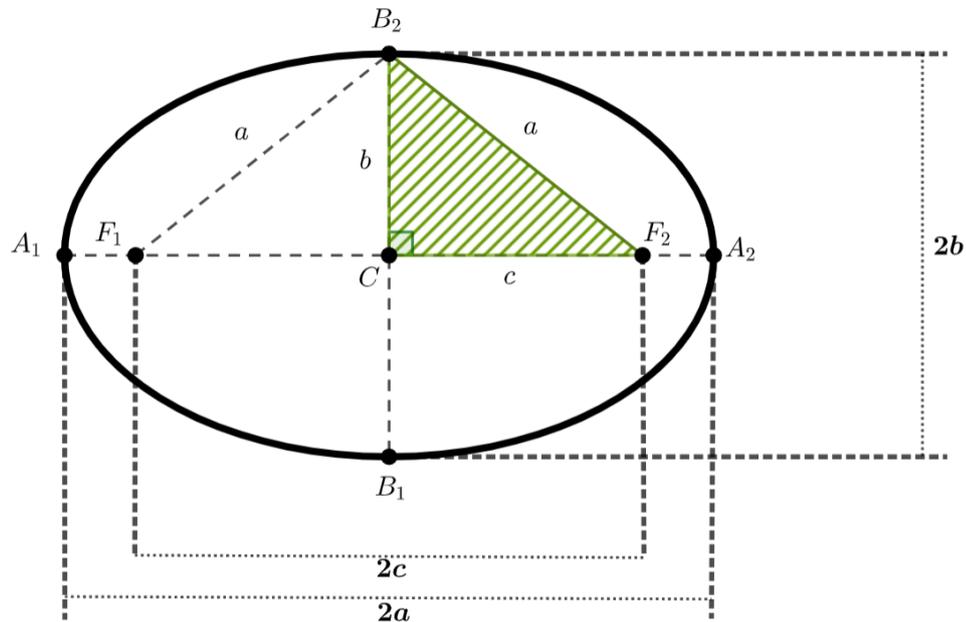
**Figura 22 – Definição geométrica da elipse.**



Fonte: dados da pesquisa

Com base na figura 23, podemos destacar os elementos da elipse.

**Figura 23 – Elementos da elipse.**



Fonte: dados da pesquisa

**Quadro 1 – Elementos da Elipse**

ELEMENTOS DA ELIPSE	
<b>Focos</b>	São os pontos $F_1$ e $F_2$ .
<b>Distância focal</b>	É a distância $2c$ entre os focos.
<b>Centro</b>	É o ponto médio $C$ do segmento $F_1F_2$ .
<b>Eixo maior</b>	É o segmento $A_1A_2$ de comprimento $2a$ (este segmento contém os focos).
<b>Eixo menor</b>	É o segmento $B_1B_2$ de comprimento $2b$ e perpendicular a $A_1A_2$ no seu ponto médio.
<b>Vértices</b>	São os pontos $A_1$ , $A_2$ , $B_1$ e $B_2$ .

A partir da figura, temos que  $B_2F_2 = a$  pois  $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$ , que é a definição da elipse e  $B_2F_1 = B_2F_2$ .

Assim, do triângulo retângulo  $B_2CF_2$  temos que:  $a^2 = b^2 + c^2$ . Essa igualdade mostra que  $b < a$  e  $c < a$ .

Também apresentamos a excentricidade da elipse, que é um número real obtido por:

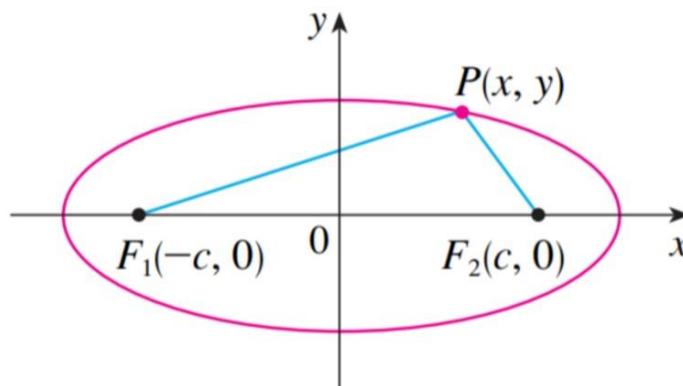
$$e = \frac{c}{a}, \text{ onde } (0 < e < 1).$$

A excentricidade é responsável pela “forma” da elipse: elipses com excentricidade próximas a zero são aproximadamente circulares, enquanto elipse com excentricidade próxima a um são achatadas.

Seja a elipse de centro  $C(0,0)$ , consideramos dois casos, o primeiro quando o eixo maior está sobre o eixo das abscissas.

Seja  $P(x, y)$  um ponto qualquer de uma elipse de focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ , de acordo com a definição temos que  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , logo

**Figura 24 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas com focos no eixo  $x$ .**



Fonte: dados da pesquisa

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \quad (1.11)$$

isto é,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação e simplificando, temos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Elevando ao quadrado e simplificando novamente:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Do triângulo  $F_1F_2P$ , da Figura 24, temos que  $2c < 2a$ , assim,  $c < a$  e, portanto,  $a^2 - c^2 > 0$ .

Seja  $b^2 = a^2 - c^2$ . Então, a equação da elipse torna-se

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

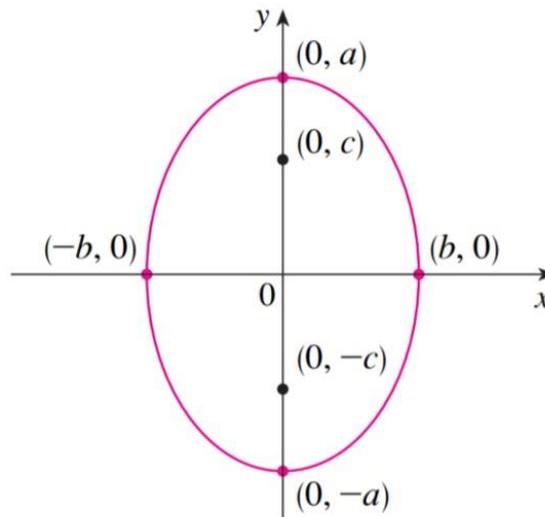
Se ambos os membros da equação forem divididos por  $a^2b^2$ , temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O segundo caso consiste se os focos de uma elipse estiverem localizados no eixo  $Oy$  em  $(0, \pm c)$ , conforme a Figura 25. Então, a equação da elipse será:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

**Figura 25 – Elipse no sistema ortogonal de coordenadas com focos no eixo y.**



Fonte: dados da pesquisa

### 1.5 Quinto Encontro - Construção da Elipse no Geogebra a partir da Equação Reduzida

Este momento é dedicado a construção de uma elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo das abscissas, essa construção foi realizada a partir da equação reduzida e dos elementos da elipse abordadas no último encontro.

Para o início da construção os eixos e as malhas são ocultados no GeoGebra para que a visualização da elipse e de seus elementos fiquem mais evidentes, já que trabalharemos de forma generalizada utilizando a ferramenta de controle deslizante, como ilustra a figura 26.

**Figura 26 – Ferramenta controle deslizante do GeoGebra.**



Fonte: dados da pesquisa

Para a utilização da ferramenta do controle deslizante, clicamos em qualquer lugar livre na janela de visualização para criar um controle deslizante para um número ou ângulo. Imediatamente é apresentada uma janela de diálogo que permite a especificação do nome, intervalo e incremento do número ou ângulo, bem como o alinhamento e largura do controle deslizante.

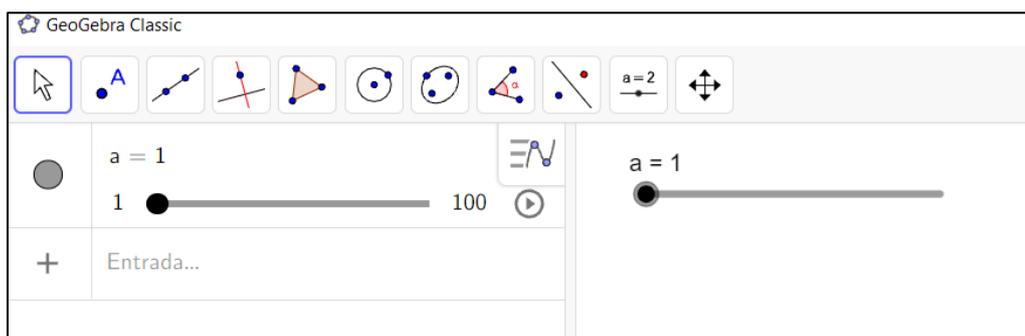
Para a nossa construção utilizamos o nome do controle deslizante  $a$  com intervalo definido entre 1 e 100 com incremento 1, como mostra a figura 27.

**Figura 27 – Configuração do controle deslizante  $a$ .**

Fonte: dados da pesquisa

Como apresentado na figura 28, após as configurações na janela de diálogo o controle deslizante é ilustrado dessa forma na janela de visualização.

**Figura 28 – Controle deslizante  $a$ .**



Fonte: dados da pesquisa

Seguindo a construção da elipse a partir de sua equação reduzida, repetimos os mesmos passos para a construção do controle deslizante  $b$ , com as mesmas configurações do controle deslizante  $a$ .

**Figura 29 – Configuração do controle deslizante  $b$ .**

Controle Deslizante

Nome  
b = 1

Número  Ângulo  Inteiro

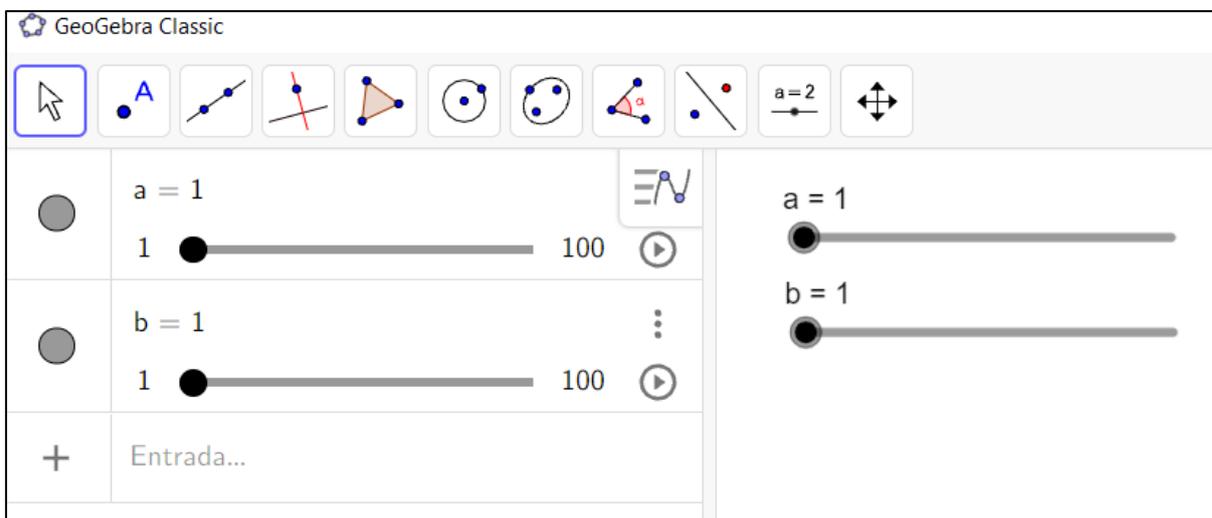
Intervalo	Controle Deslizante	Animação
min 1	max 100	Incremento 1

CANCELAR OK

Fonte: dados da pesquisa

Após os controles deslizantes  $a$  e  $b$  serem configurados, eles ficaram dispostos na janela de visualização conforme apresenta a figura 30.

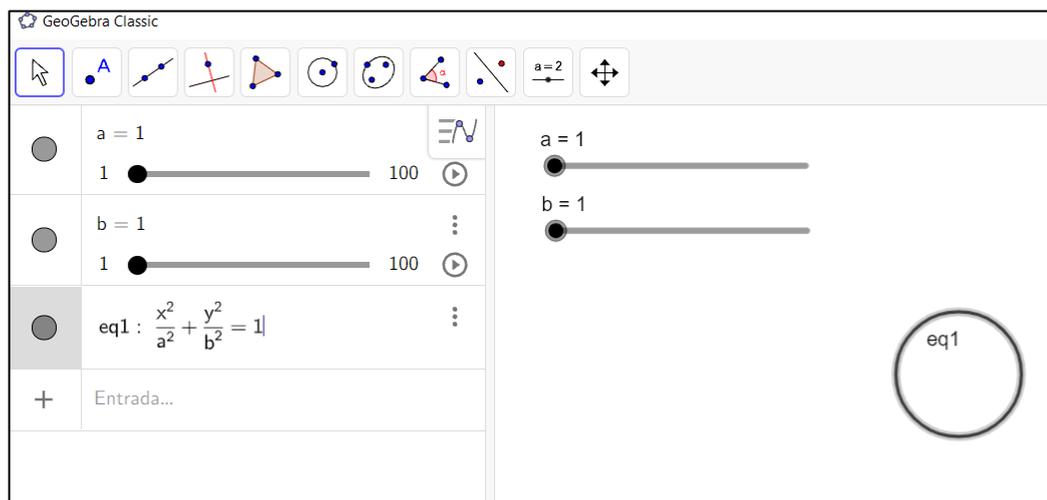
**Figura 30 – Controles deslizante  $a$  e  $b$ .**



Fonte: dados da pesquisa

Assim, com os controles deslizantes configurados, no campo de entrada, digitamos a equação da elipse centrada na origem com eixo maior no eixo das abscissas, conforme ilustra a figura 31.

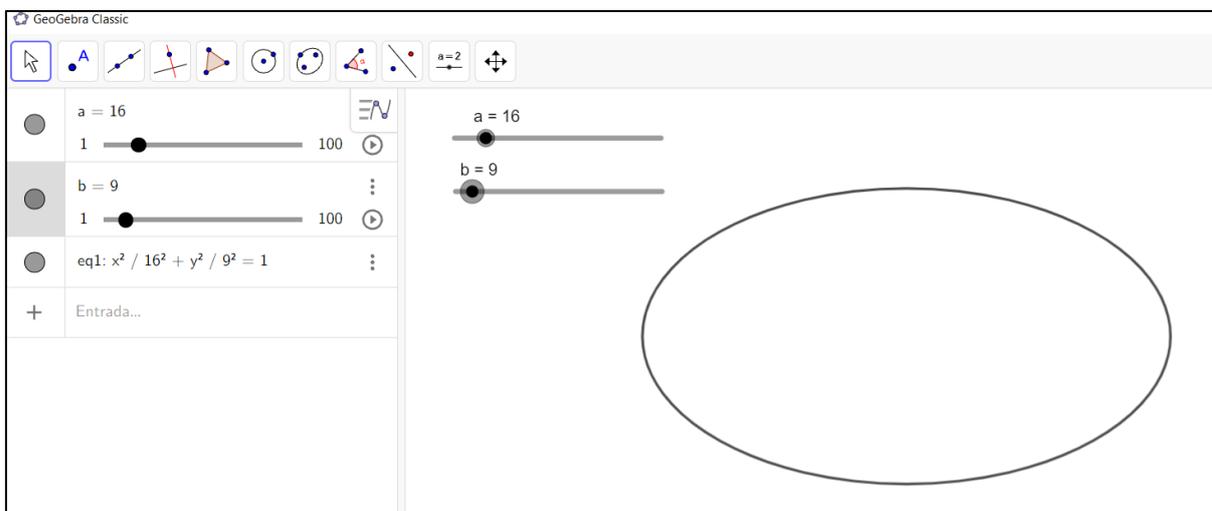
**Figura 31 – Equação da elipse no campo de entrada.**



Fonte: dados da pesquisa

Neste momento, o Professor-Pesquisador apresentou que os controles deslizantes  $a$  e  $b$  poderiam ser alterados, conforme ilustra a figura 32.

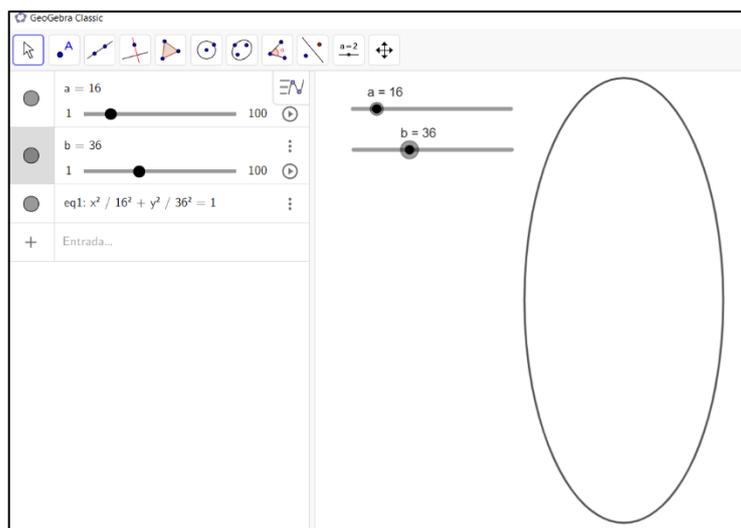
**Figura 32 – Elipse com eixo maior em x.**



Fonte: dados da pesquisa

Logo, os alunos podem fazer as modificações e relacionar os conhecimentos construídos nos encontros anteriores.

**Figura 33 – Elipse com eixo maior em y.**

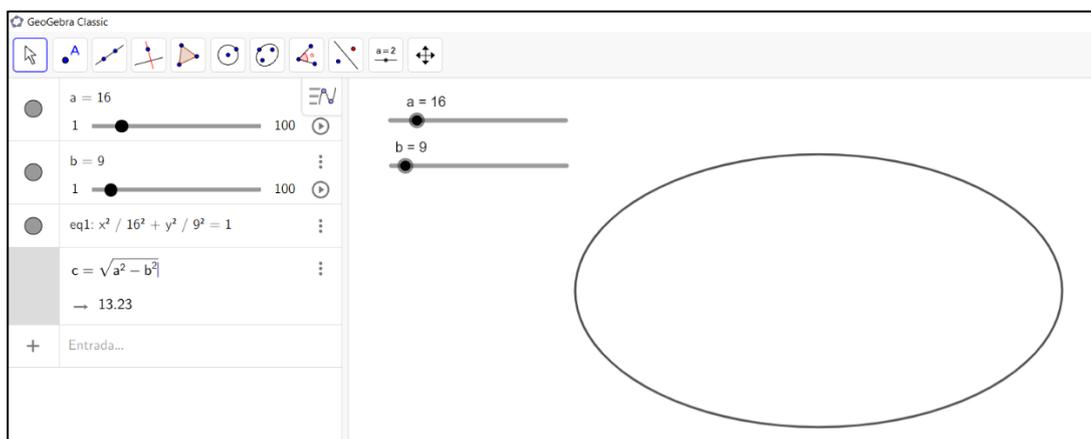


Fonte: dados da pesquisa

Continuando a construção da elipse e de seus elementos a partir da equação reduzida, o professor pode ressaltar como a equação inserida no campo de entrada, era de uma elipse centrada na origem com eixo maior no eixo das abscissas o controle deslizante  $a$  sempre deveria estar maior que o controle deslizante  $b$ .

Então, serão inseridos no campo de entrada a equação dos focos da elipse, como mostra a figura 34, no GeoGebra o seguinte comando:  $c = \text{sqrt}(a^2 - b^2)$ .

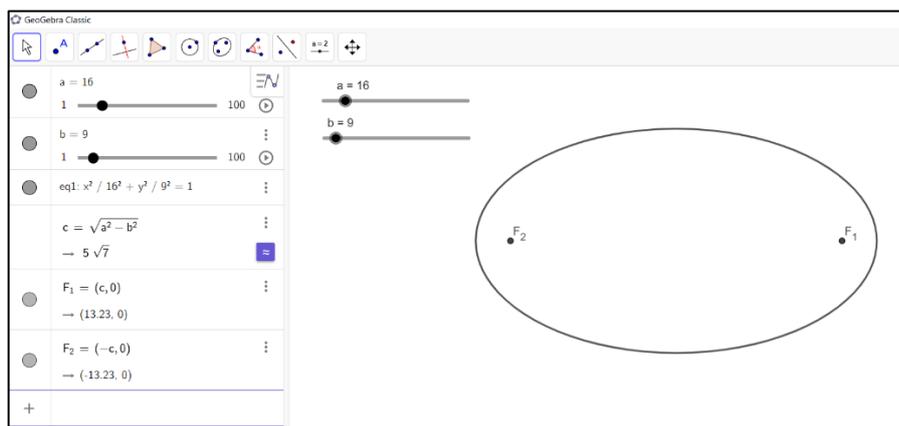
**Figura 34 – Equação dos focos.**



Fonte: dados da pesquisa

Após esta etapa, podem ser inseridos as coordenadas dos focos da elipse no comando de entrada  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$ .

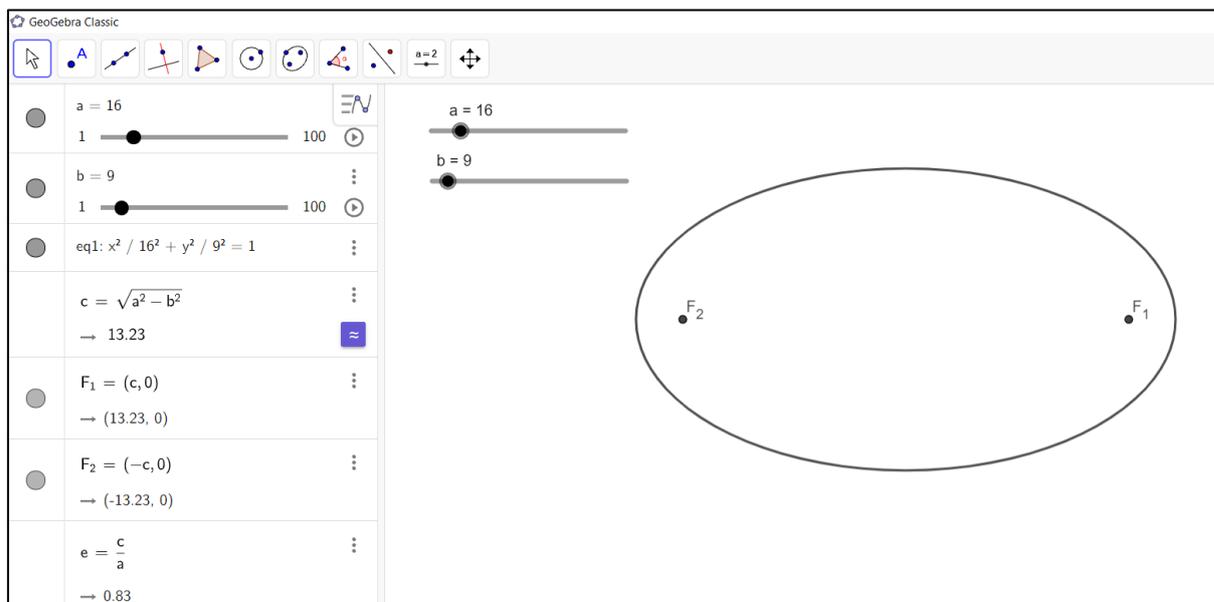
**Figura 35 – Coordenadas dos focos  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$ .**



Fonte: dados da pesquisa

Também são inseridos a equação da excentricidade da elipse segundo a figura 36.

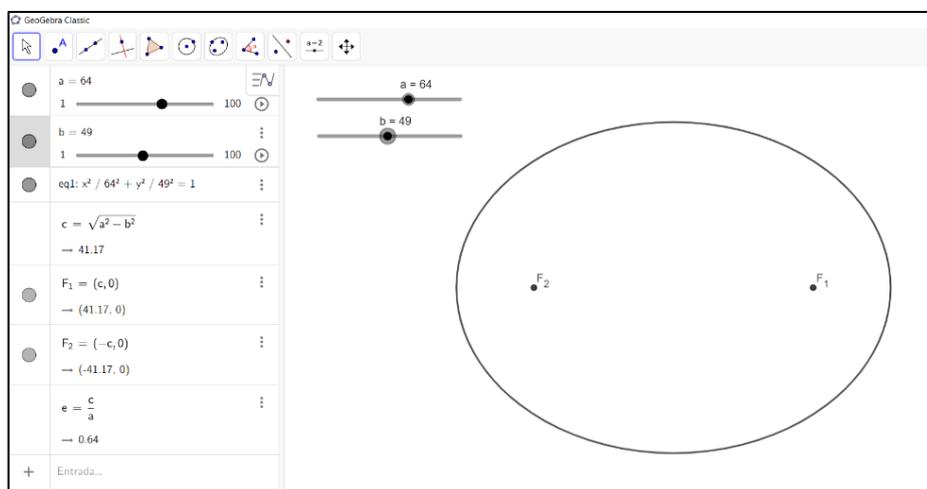
**Figura 36 – Excentricidade no campo de entrada.**



Fonte: dados da pesquisa

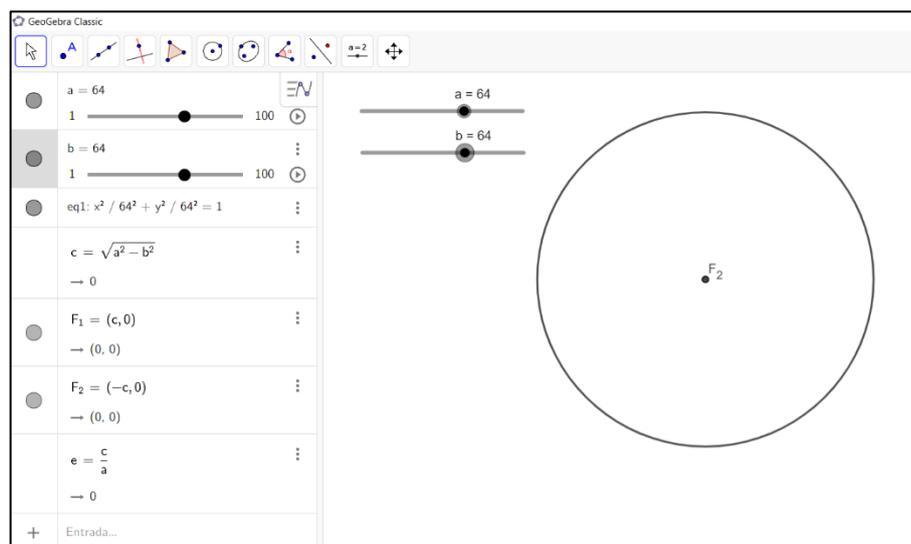
Após essas etapas, um momento deve ser reservado os alunos possam manusear a elipse construída e analisar o comportamento de seus elementos.

**Figura 37 – Manuseio da distância focal.**



Fonte: dados da pesquisa

**Figura 38 – Focos coincidentes.**



Fonte: dados da pesquisa

## 2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa, conforme retratada, apresentou como objetivo principal, analisar as contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvidamental e da Investigação Matemática no processo de ensino-aprendizagem da elipse na 3ª série do Ensino Médio. Com base nos pressupostos de nosso referencial teórico, buscamos responder ao seguinte problema de pesquisa: como a Investigação Matemática com o GeoGebra, baseada nos pressupostos da Teoria do Ensino

Desenvolvimental, poderia contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da elipse, na 3ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Rafael Nascimento?

Após todas as reflexões tendo esta pergunta como norte, voltamos para a análise dos dados coletados e ao referencial teórico adotado nesta pesquisa.

Para tanto, construímos um experimento didático-formativo que foi apresentado no quarto capítulo deste trabalho. O experimento didático-formativo, em nossa avaliação, além de contribuir para que o aluno percebesse o conceito nuclear da elipse através da resolução do problema gerador e da utilização do software GeoGebra. Na aplicação do experimento, os alunos conseguiram usar o conceito nuclear da elipse na resolução do problema gerador, bem como, nas atividades desenvolvidas utilizando o GeoGebra.

Ressaltamos o movimento de ascensão do abstrato ao concreto, durante o desenvolvimento do experimento-didático formativo meio das atividades realizadas, para que o aluno de forma ativa experimentasse movimento, formando uma unidade dialética em benefício do avanço cognitivo.

O desenvolvimento desta pesquisa apoiada na Teoria do Ensino Desenvolvimental e na Investigação Matemática com o GeoGebra foi de suma importância para a análise da ampliação da Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos durante a aplicação experimento didático-formativo. Pois, todas as atividades, partindo do problema gerador, exploraram diversas técnicas operatórias, manipulação dos objetos matemáticos no software GeoGebra, mesmo que, algumas vezes, alguns conteúdos já fossem conhecidos, corroboraram para a construção de um novo conhecimento.

Nesta pesquisa, através de nosso produto educacional (experimento didático-formativo), foi apresentada uma alternativa para se desenvolver o ensino de Matemática de forma participativa, onde o professor atua como mediador do conhecimento e os alunos são protagonistas na construção do conhecimento matemático.

A Teoria do Ensino Desenvolvimental e a Investigação Matemática com o GeoGebra colaboraram positivamente para o percurso desta pesquisa. Podemos notar que os alunos durante a aplicação do experimento didático-formativo foram protagonistas na construção de seu próprio conhecimento, desde a primeira etapa da resolução do problema gerador.

Durante todas as etapas, os alunos fizeram conexões entre técnicas operatórias e conteúdos já aprendidos, viabilizando a percepção do conceito nuclear da elipse, trabalhar com o que é nuclear, o que é a relação geral principal do objeto matemático é valioso para o processo

de ensino-aprendizagem da Matemática e se demonstrou importante ao longo da realização do nosso experimento didático-formativo sobre a Elipse.

Os materiais produzidos pelos alunos, os diálogos produzidos por meio de gravações de áudio e as observações anotadas no diário de campo do Professor-Pesquisador, nos levam a perceber os compartilhamentos de experiências e de construção do conhecimento.

Evidenciamos, também, o papel coadjuvante do *software* GeoGebra, onde os alunos conseguiram perceber a relação entre o tratamento geométrico e algébrico da elipse, durante os encontros, facilitando o entendimento dos elementos e da resolução do problema gerador.

Para finalizar nossas considerações, destacamos a importância da Teoria do Ensino Desenvolvimental e da Investigação Matemática com o GeoGebra para a nossa análise das contribuições no ensino da Elipse na 3ª série do Ensino Médio, pois possibilitou a ressignificação da prática docente do Professor-Pesquisador. A utilização desse referencial teórico em nossa pesquisa nos permitiu evidenciar a importância de o aluno ser protagonista no processo de construção do conhecimento e a necessidade da atuação do professor como mediador desse conhecimento.

## REFERÊNCIAS

AQUINO, O. F. O experimento didático-formativo: contribuições para a pesquisa em didática desenvolvimental. E-Book: **Didática e Prática de Ensino na relação com a Formação de Professores**, p. 04645-04657, 2014.

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental**. Moscú: Editorial Progreso, 1988a.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2012.

FREITAS, R. A. M. M. **Formação de conceitos na aprendizagem escolar e atividade de estudo como forma básica para organização do ensino**. *Educativa*, v. 19, n. 2, p. 388, 2017.

FREITAS, R. A. M. M. Pesquisa em didática: o experimento didático formativo. In: Encontro de Pesquisa em Educação da ANPED Centro-Oeste, 2010, Uberlândia. **X Encontro de Pesquisa em Educação da ANPED Centro-Oeste: Desafios da Produção e Divulgação do Conhecimento**. Uberlândia, 2010. v. I. p. 1-11.

GONZÁLEZ, R. F. (2012). A configuração subjetiva dos processos psíquicos: avançando na compreensão da aprendizagem como produção subjetiva. In A. M. Martinez, B. J. L. Scoz, & M. I. S. Castanho (Orgs.), **Ensino e aprendizagem: a subjetividade em foco** (pp. 21-41). Brasília: Líber Livro.

- LARSON, R.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. **Cálculo com Geometria Analítica**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998. v. 2.
- LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: Edufu, 2015, p. 327-362.
- LIBÂNEO, J. C. Didática e epistemologia: para além do debate entre a didática e as didáticas específicas. In: VEIGA, Ilma P.A. e D'ÁVILA, Cristina (orgs.). **Profissão docente: novos sentidos, novas perspectivas**. Campinas (SP): Papirus, 2008.
- LOPES, J. F.; SEIXAS, W. **Cônicas e aplicações**. São Paulo: Dissertação Mestrado Profissional em Matemática Universitária - Departamento de Matemática - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP, 2011.
- PERES, T. F. C. **Volume dos sólidos geométricos – um experimento de ensino baseado na teoria de V. V. Davydov**. Dissertação de Mestrado em Educação – Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2010.
- PINO, A. **O social e o cultural na obra de Vygotsky**. Educação & Sociedade. Revista quadrimestral de Ciências da Educação. Centro de Estudos Educação e Sociedade (CEDES), Campinas, v. 21, n. 71, jul. 2000.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemática na sala de aula**. 3 ed. Belo Horizonte: autêntica, 2013.
- REGO, T. C. **Vygotsky - Uma Perspectiva Histórico-Cultural** da Educação. Petrópolis: Vozes, 2007.
- SATO, J. **As cônicas e suas aplicações**. Uberlândia: Dissertação Mestrado em Matemática - Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, 2004.
- STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Vol. 2.
- VAZ, D. A. F. **Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o GeoGebra**. Revista Educativa, v. 15, n. 1. Goiânia: Editora PUC Goiás, 2012. p. 39-51
- VIGOTSKI, L. S. A construção do pensamento e da linguagem. Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.
- VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e linguagem**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.
- VYGOTSKY, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In: VIGOTSKY, Lev Semenovich; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Alexis N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Tradução de Maria da Penha Villa.
- WATARI, K. **Mecânica Clássica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2003.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014.